

<학술논문>

DOI:10.3795/KSME-A.2009.33.2.145

## 유한요소 교호법을 이용한 삼차원 균열의 탄소성 J 적분 해석

박 재 학<sup>†</sup>

(2008년 10월 15일 접수, 2009년 1월 19일 수정, 2009년 1월 22일 심사완료)

### Analysis of Elastic-Plastic J Integrals for 3-Dimensional Cracks Using Finite Element Alternating Method

Jai Hak Park

**Key Words :** Finite Element Alternating Method(유한요소 교호법), 3-Dimensional Crack(삼차원균열), Elastic-plastic Analysis(탄소성해석), J Integral (J 적분), Symmetric Galerkin Boundary Element Method(대칭 Galerkin 경계요소법)

#### Abstract

SGBEM(Symmetric Galerkin Boundary Element Method)-FEM alternating method has been proposed by Nikishkov, Park and Atluri. In the proposed method, arbitrarily shaped three-dimensional crack problems can be solved by alternating between the crack solution in an infinite body and the finite element solution without a crack. In the previous study, the SGBEM-FEM alternating method was extended further in order to solve elastic-plastic crack problems and to obtain elastic-plastic stress fields. For the elastic-plastic analysis the algorithm developed by Nikishkov et al. is used after modification. In the algorithm, the initial stress method is used to obtain elastic-plastic stress and strain fields. In this paper, elastic-plastic J integrals for three-dimensional cracks are obtained using the method. For that purpose, accurate values of displacement gradients and stresses are necessary on an integration path. In order to improve the accuracy of stress near crack surfaces, coordinate transformation and partitioning of integration domain are used. The coordinate transformation produces a transformation Jacobian, which cancels the singularity of the integrand. Using the developed program, simple three-dimensional crack problems are solved and elastic and elastic-plastic J integrals are obtained. The obtained J integrals are compared with the values obtained using a handbook solution. It is noted that J integrals obtained from the alternating method are close to the values from the handbook.

#### 1. 서론

구조물에 존재하는 균열에 대한 파괴변수(fracture parameter)를 구하기 위하여 유한요소법(finite element method)이 많이 사용되고 있으나 정확한 파괴변수를 구하기 위하여 균열근처에 크기가 아주 작은 요소들을 배치하거나 특별한

균열요소를 사용하여야 한다. 특히 삼차원 균열의 해석의 경우 정확한 파괴변수를 구할 수 있는 모델을 구성하는데 특별한 노력이 필요하다.

이러한 단점을 극복할 수 있는 균열해석 방법으로 유한요소 교호법(finite element alternating method)이 제안되었다. 이 방법은 균열을 고려하지 않는 유한요소 해석과 무한 물체 내에 존재하는 균열에 대한 해를 번갈아 해석함으로써 원하는 해를 얻는 방법으로 유한요소 모델에 균열을 포함시킬 필요가 없으므로 간단히

<sup>†</sup> 책임저자, 회원, 충북대학교 공과대학 안전공학과  
E-mail : jhpark@chungbuk.ac.kr  
TEL : (043)261-2460, FAX : (043)264-2460

모델링을 행할 수 있다. 또한 균열이 고려되지 않은 유한요소 모델의 균열이 존재하는 위치에 독립적인 균열요소를 끼워 넣음으로써 모드 I 뿐만 아니라 모드 II 및 III 의 응력강도계수(stress intensity factor)를 구하게 된다.

Nikishkov, Park과 Atluri<sup>(1)</sup>는 임의 형태의 삼차원 균열에 대한 탄성 균열해를 구하는 유한요소 교호법을 제안하였다. 이 방법에서는 무한 물체내의 균열해로 Li와 Mear<sup>(2)</sup>가 제안한 대칭 Galerkin 경계요소법을 이용하였다. 또한 박재학과 박상윤<sup>(3)</sup>은 Nikishkov 등<sup>(1)</sup>이 제안한 방법의 적용범위를 확대시켜 탄성문제뿐만 아니라 탄소성문제에도 적용할 수 있도록 하였고, 삼차원 내부 균열에 대하여 탄소성 응력장을 얻을 수 있음을 보였다. 이때 탄소성 유한요소 교호법 알고리즘은 Nikishkov와 Atluri<sup>(4)</sup>가 2 차원 균열에 대하여 제안한 알고리즘을 3 차원 균열에 대하여 수정하여 사용하였고, 탄성해를 이용하여 탄소성문제를 해석하기 위하여 Nayak과 Zienkiewicz<sup>(5)</sup>의 초기응력법이 이용되었다.

그러나 박재학과 박상윤<sup>(3)</sup>의 해에서는 균열에서 멀리 떨어진 점이나 균열선단의 전방에서는 비교적 정확한 응력값들이 얻어지나 균열면 근처에서 부정확한 응력이 얻어져 이에 대한 개선의 필요성이 있었다.

따라서 본 논문에서는 균열면 근처에서의 탄소성 응력장의 정확성을 향상시킬 수 있는 방법을 제안하였고 이를 이용하여 삼차원 균열에 대한 탄소성 J 적분을 계산하였다.

## 2. 유한요소 교호법

### 2.1 유한요소 교호법

유한요소 교호법은 중첩의 원리에 바탕을 두고 있다. 균열을 고려하지 않은 유한요소 해석해와 무한 물체 내에 존재하는 균열의 해를 번갈아가며 해석함으로써 원하는 해를 얻는 방법이다. 이 방법의 과정에 대한 자세한 설명은 참고문헌 1 이나 6 에 기술되어 있다.

### 2.2 대칭 Galerkin 경계요소법

유한요소 교호법을 위해서는 무한물체 내에 존재하는 균열에 대한 해가 필요하다. 이를 위하여 Li와 Mear<sup>(2)</sup>가 제안한 대칭 Galerkin 경계요소법을 이용하였다.

무한 물체 내에 임의 형태의 평면 또는 비평면 삼차원 균열이 존재하고, 균열면 상에는 임의의 트랙션이 작용하는 경우, 균열은 두 개의 균열면에서의 변위의 불연속의 연속된 분포로 나타낼 수 있다. Li와 Mear<sup>(2)</sup>는 균열에 대하여 다음 식과 같은 낮은 특이성(weak singularity)을 갖는 경계적분방정식(boundary integral equation)이 만족됨을 보였다.

$$-\int_S \int_S D_\alpha u_i^*(\mathbf{z}) C_{\alpha\beta\gamma}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{z}) D_\beta u_j(\boldsymbol{\xi}) dS(\boldsymbol{\xi}) dS(\mathbf{z}) = \int_S u_k^*(\mathbf{z}) t_k dS(\mathbf{z}) \quad (1)$$

여기서  $S$  는 균열면,  $u_i$  는 균열면 사이의 변위의 불연속 성분,  $u_i^*$  는 Galerkin 법에 사용되는 시험함수(test function)의 성분,  $t_k$  는 균열면에 작용되는 트랙션의 성분,  $\boldsymbol{\xi}$  및  $\mathbf{z}$  는 좌표이다. 또한  $D_\alpha$  는 접선연산자(tangential operator)이고  $C_{\alpha\beta\gamma}(\boldsymbol{\zeta})$  는 낮은 특이성을 가지는 커널이다. 이들에 대한 정의는 참고문헌 3 에 주어져 있다.

또한 변위와 변위의 미분치는 식 (2)와 식 (3)과 같이 표현된다.

$$u_p(\mathbf{x}) = -\int_S n_i(\boldsymbol{\xi}) S_{ij}^p(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}) u_j(\boldsymbol{\xi}) dS(\boldsymbol{\xi}) \quad (2)$$

$$u_{p,q}(\mathbf{x}) = -\int_S e_{iqm} S_{ij}^p(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}) D_m u_j(\boldsymbol{\xi}) dS(\boldsymbol{\xi}) \quad (3)$$

그리고 응력은 다음 식으로 표현된다.

$$\sigma_{kl}(\mathbf{x}) = -\int_S E_{klpq} e_{iqm} S_{ij}^p(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}) D_m u_j(\boldsymbol{\xi}) dS(\boldsymbol{\xi}) \quad (4)$$

여기서  $E_{klpq}$  는 탄성 텐서(elasticity tensor)이고  $e_{iqm}$  는 퍼뮤테이션 부호(permutation symbol), 그리고  $S_{ij}^p$  는 응력 기본해이다.<sup>(3)</sup>

균열면을 몇 개의 균열요소로 나누고 요소 내 일점에서의 변위의 불연속과 트랙션은 균열요소의 절점에서의 값과 형상함수로 기술한다고 하면 적분방정식으로 표현된 식 (1)을 식 (5)와 같이 이산화(discretization) 할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & - \iint_S C_{\alpha\beta\gamma} D_\alpha N_a(z) D_\beta N_b(\xi) dS(\xi) dS(z) u_{jb} \\
 & = \int_S N_a N_q dS(z) t_{iq} \quad (5)
 \end{aligned}$$

여기서  $N_b$  등은 형상함수,  $u_{jb}$  는 절점에서의 변위의 불연속,  $t_{iq}$  는 절점에서의 트랙션이다.

식 (5)를 해석하여 균열요소의 절점에서의 변위의 불연속을 구하면 식 (3) 및 식 (4)로부터 J 적분의 계산에 필요한 변위의 미분치와 응력을 구할 수 있다.

### 2.3 탄소성 해석

유한요소 교호법으로 구할 수 있는 해는 탄성해이다. Nayak과 Zienkiewicz<sup>(5)</sup>는 탄성해를 이용하여 탄소성해를 구할 수 있는 초기응력법을 제안하였다. 또한 Nikishkov와 Atluri<sup>(4)</sup>는 2 차원 균열에 대하여 유한요소 교호법으로 탄소성해석을 행할 수 있는 알고리즘을 제안하였다. 본 논문에서는 이들이 제안한 알고리즘을 3 차원 균열 문제에 적용하여 탄소성 해석을 행하였다. 자세한 알고리즘은 참고문헌 3에 제시되어 있다.

## 3. 탄소성 J 적분

### 3.1 탄소성 J 적분 계산

삼차원 균열문제에서 평면응력 또는 평면변형 상태가 되는 곳에서는 선적분을 사용하여 J 적분을 구할 수 있다. 이 경우 탄소성 J 적분의 계산은 다음과 같은 절차로 수행된다.

- (1) J 적분 경로를 몇 개의 구간으로 나누고 각 구간의 시작점과 끝나는 점을 결정한다.
- (2) 각 구간에서 Gauss 적분공식을 사용할 때의 적분점들의 위치를 구한다. 본 논문에서는 n=3의 Gauss 적분공식을 사용하였다.
- (3) 각 적분점이 속해 있는 유한요소 모델에서의 요소번호를 구한다. 또한 각 요소에 속한 적분점에 대하여 요소 내 좌표계에 대한 국부좌표를 구한다.
- (4) 탄소성해석 중에 각 적분점에 대한 응력, 변위의 미분치, 변형에너지밀도를 구한다.
- (5) 구해진 값들을 이용하여 J 적분을 계산한다.

탄소성해석 과정 중에 외부 하중의 증분에 대한 응력 및 변위 미분치의 증분을 구할 때에는 균열해에 의한 증분과 유한요소해석에 의한 증분을 고려하여야 한다. 정확성을 향상시키기 위하여 균열해에 의한 증분은 균열면에서 구한 변위의 불연속을 이용하여 식 (3) 및 식 (4)로부터 계산하였다. 유한요소해석에 의한 증분을 고려할 때에는, 응력의 경우 각 유한요소의 강성행렬(stiffness matrix)을 구하기 위한 적분점에서의 응력값의 증분을 이용하여 다항식으로 외삽 또는 내삽하여 구하였으며, 변위 미분치의 경우는 각 절점에서의 변위의 증분과 형상함수를 이용하여 구하였다.

### 3.2 응력의 정확성 향상

식 (5)로부터 구해진 균열면에서의 변위의 불연속으로부터 식 (4)를 이용하여 응력을 계산할 경우 균열면에서 멀리 떨어진 곳에서의 응력값들은 정확하게 구해지나 균열면에 가까운 점들에서의 응력값은 큰 오차를 보이게 된다. 그 이유는 식 (4)에서의  $S_{ij}^p$  가  $1/r$ 의 특이성을 가지고 있기 때문에 수치적 적분을 행할 때 오차가 커지기 때문이다. 따라서 적분영역의 분할과 변수 변환의 방법들을 사용하여 응력의 정확성을 향상시켰다. 이러한 방법들은 참고문헌 7-9에서 이중적분의 값을 수치적으로 구하기 위하여 사용된 방법과 유사하다.

문제를 간단히 하기 위하여 균열면이 전체좌표계의 xy 평면과 평행하다고 가정하고, 균열은 몇 개의 균열요소로 나누어졌다고 가정한다.

임의의 균열요소의 국부좌표를  $\xi, \eta$ 라고 하면 적분영역은 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$D = \begin{cases} 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \eta \leq 1 \end{cases} \quad (6)$$

적분영역 D를 다음과 같이 두 개의 하부영역  $D_1$ 과  $D_2$ 로 나눌 수 있다.

$$\begin{aligned}
 D & = \begin{cases} 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \eta \leq \xi \end{cases} + \begin{cases} 0 \leq \xi \leq 1 \\ \xi \leq \eta \leq 1 \end{cases} \\
 & \equiv D_1(\xi, \eta) + D_2(\xi, \eta) \quad (7)
 \end{aligned}$$

$D_2$ 의 영역은  $D_1$ 에서부터  $D_2(\xi, \eta) = D_1(\eta, \xi)$ 의 변수변환에 의하여 얻어진다.

변환된 새로운 좌표  $\eta_1$ 과  $\eta_2$ 를 도입한다.

새로운 좌표계는 기존좌표계와 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\xi = \eta_1, \quad \eta = \eta_1 \eta_2 \quad (8)$$

$D_1$  영역을 새로운 좌표계로 표현하면 다음과 같다.

$$D_t = \begin{cases} 0 \leq \eta_1 \leq 1 \\ 0 \leq \eta_2 \leq 1 \end{cases} \quad (9)$$

그리고 좌표변환에 대한 Jacobian 은 다음과 같다.

$$J_t = \eta_1 \quad (10)$$

변환된 좌표  $\eta_1$  과  $\eta_2$  에 대하여 식 (5)의 적분을 수행하면 피적분함수의 특이성이 식 (10)의  $\eta_1$  과 상쇄되어 수치적분에서 어려움이 없어진다. 이것은  $1/r$  의 피적분함수를 수치적으로 면적적분할 경우 Cartesian 좌표계에서는 어렵지만 극좌표계로 변환하여 적분할 경우 특이성이 없어지는 것과 동일한 원리이다.

균열면 근처에 존재하는 임의의 점을  $P$  라 하고, 이점에서 균열면 상에 수직으로 내린 점을  $Q$  라 하자. 또한 균열요소 중 현재 식 (4)의 적분이 행해지는 요소를  $i_{int}$  라 하고,  $Q$  점이 존재하는 요소를  $i_Q$  라 하자. 이때  $i_{int}$  와  $i_Q$  의 상대적인 위치에 따라 다음과 같은 경우로 나눌 수 있다.

- (1)  $i_Q$  가 존재하지 않는 경우
- (2)  $i_{int}$  와  $i_Q$  가 서로 이웃하지 않는 경우
- (3)  $i_{int}$  와  $i_Q$  가 서로 일치하는 경우
- (4)  $i_{int}$  와  $i_Q$  가 공동의 변을 가지는 경우
- (5)  $i_{int}$  와  $i_Q$  가 공동의 꼭지점을 가지는 경우

위의 (3), (4) 및 (5)의 경우를 그림으로 나타내면 Fig. 1 의 (a), (b) 및 (c)와 같다. 위의 (1)과 (2)의 경우는 일반적인 Gauss 형태의 수치적분공식을 사용하여 적분 가능하다. 다른 경우에 대해서는 변환된 좌표계와 적분영역의 분할법을 사용한다.

우선 (3)의 경우를 고려해 보자. 이는 Fig.

1(a)에 해당한다. 요소 내에서  $Q$  점의 국부좌표를  $\xi_Q, \eta_Q$  라 하고, 이 좌표를 사용하여 그림과 같이 4 개의 영역으로 나눈다. 나누어진 영역에 대하여 식 (8)로 표현되는  $\eta_1$  과  $\eta_2$  로의 좌표변환을 행하면 식 (4)의 적분을 정확하게 행할 수 있다. 단 이때 각각의 나누어진 영역에서  $\eta_1, \eta_2$  좌표계의 원점은  $Q$  점이 되어야 한다.

Fig. 1(b)의 경우는 적분을 행하는 요소  $i_{int}$  를 두 개의 요소로 다시 나누어 적분을 행한다. 각각의 나누어진 요소에서  $\eta_1, \eta_2$  좌표계의 원점은  $A$  점이 되어야 한다. Fig. 1(c)의 경우는  $i_{int}$  를 다시 나눌 필요는 없고, 다만  $\eta_1, \eta_2$  좌표계의 원점을  $A$  점으로 취하여야 한다.

이상에서 설명한 응력의 정확성을 향상시키는 방법을 박재학과 박상윤<sup>(3)</sup>의 프로그램에 적용하였다.

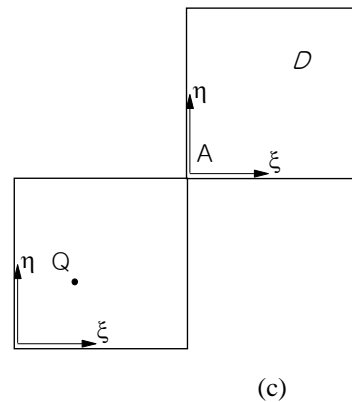
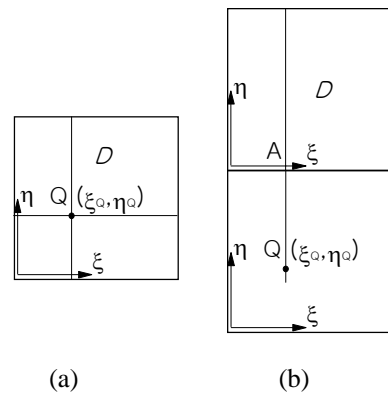


Fig. 1 Three cases of stress integration when transformed coordinates are used (a) coinciding elements, (b) elements with common edge and (c) elements with common vertex

### 4. 삼차원 균열의 해석

#### 4.1 원기둥 내부의 원형균열

프로그램 결과의 정확성을 검토하기 위하여 원기둥 내부에 존재하는 원형 균열을 해석하여 유한요소해석 결과와 비교하였다. 해석한 문제는 Fig. 2 와 같이 직경이 2 m 이고 높이가 4 m 인 원기둥의 중간에 직경 0.8 m 의 원형균열이 존재하는 문제이며, 이때 원기둥의 상부면에 160 MPa 의 일정한 응력이 작용되고 있고 하부면은 고정되어 있다고 가정한다.

재료의 탄성계수는 200 GPa, 푸아송비는 0.3, 항복강도는 200 MPa 이고 소성변형 중의 응력 변형률관계는 식 (11)의 Ramberg-Osgood 식을 만족한다고 가정한다.

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_o} = \frac{\sigma}{\sigma_o} + \alpha \left( \frac{\sigma}{\sigma_o} \right)^n \quad (11)$$

식 (11)에서  $\sigma_o$  는 참조응력으로 보통 항복강도로 택한다.  $\epsilon_o = \sigma_o / E$  이며,  $\alpha$  와  $n$  은 각각 실험에서 구해지는 무차원 상수와 변형률 경화지수(strain-hardening exponent)이다. 고려한 재료의 경우  $\alpha=1.0$ ,  $n=5.0$  으로 취하였다.

Fig. 3(a)에서는 사용된 유한요소 격자를 보여주고 있다. 2880 개의 20 절점 삼차원 요소가 사용되었다. Fig. 3(b)는 대칭 Galerkin 경계요소법에서 사용된 균열요소의 예를 보여주고 있다.

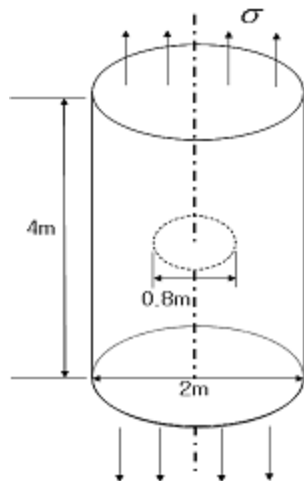


Fig. 2 Penny-shaped crack embedded in a cylindrical column

우선 탄성해석에서 구해진 응력 분포와 J 적분의 결과를 보도록 한다. Fig. 4 는  $\sigma = 160$  MPa 의 하중이 작용되는 경우 균열선단 근처 0.05 m <math>r < 0.1 m 영역에서의 응력값을 나타낸 것이다. 여기서  $r$  은 균열선단으로부터의 수직거리이다. 응력의  $r$  에 대한 의존성을 없애기 위하여  $S_{yy} = \sigma_{yy} \sqrt{r}$  및  $S_{eq} = \sigma_{eq} \sqrt{r}$  로 정의되는  $S_{yy}$  및  $S_{eq}$  값을 도시하였다. 이때  $\sigma_{yy}$  는 원기둥의 축방향 수직응력,  $\sigma_{eq}$  는 von Mises 등가응력이며,  $S_{yy}$  및  $S_{eq}$  의 단위는  $MPa\sqrt{m}$  이다. 그림에서  $\theta$  는 균열선단을 도는 각으로  $\theta = 0^\circ$  는 균열 전방,  $\theta = 180^\circ$  및  $\theta = -180^\circ$  는 균열면에 해당한다.

그림에서 알 수 있는 바와 같이  $\theta$  값이  $180^\circ$  가까이 되는 영역을 제외하고는 각  $\theta$  에 해당되는 응력점들이 거의 한 점을 이루어 값의 분산이 심하지 않다는 것을 알 수 있다.  $\theta$  가  $180^\circ$  가 되는 점이 균열면에 해당 되므로 이 점에서  $S_{yy}$  는 작은 값을 유지하여야 한다. 그림에서 보는 바와 같이  $S_{yy}$  가 작은 값을 유지하고 있다. 그러나 아직 어느 정도의 값의 분산이 존재함을 알 수 있다. 3.2 절에 기술된 응력의 정확성을 향상시키는 방법을 사용하지 않는 경우  $S_{yy}$  의 최대값에 가까운 값들이  $180^\circ$  부근에서 나타남과 비교할 때 균열면 근처

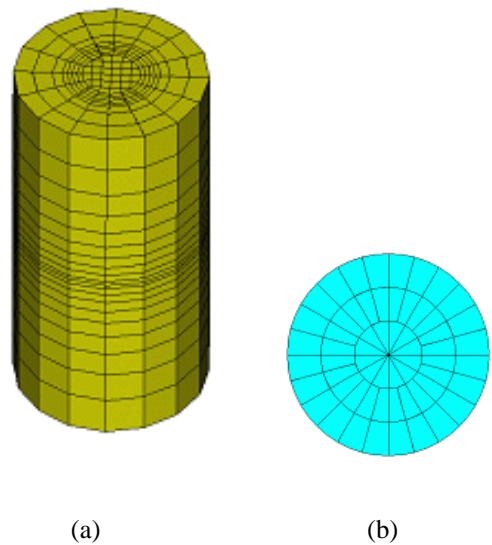


Fig. 3 Meshes used in the alternating method (a) finite element mesh without crack (b) crack mesh

에서의 응력의 정확성이 많이 향상되고 있음을 확인할 수 있다. 그러나 아직 정확성을 향상시키기 위한 노력은 더 필요한 것으로 판단된다.

균열선단의 근처에 대하여 탄소성 응력을 구하여, 보다 작은 격자를 사용한 축대칭의 2 차원 유한요소해석<sup>(3)</sup>에서 구해진 응력과 비교하였다. Fig. 5 는 균열선단 근처에서의 응력을 나타낸 그림이다. 비교를 위하여 유한요소해석에서 구한 값을 함께 도시하였다. 응력의  $r$  에 대한 의존성을 없애기 위하여  $S_{yy} = \sigma_{yy} \times r^{1/(n+1)}$  로 정의되는  $S_{yy}$  값을 도시하였다. 여기서 응력의 단위는 MPa, 길이의 단위는 m이다. 유한요소 교호법에서 구한 값들이 유한요소해석에서 구한 값들과 유사한 값을 보이나 값의 분산이 유한요소해석의 결과보다 심한 것을 알 수 있다. 그 이유는 유한요소해석에서는 보다 작은 요소를 사용하여 축대칭을 이용한 이차원해석으로 응력을 구한 반면에 유한요소 교호법에서는 보다 큰 요소를 사용하였기 때문이며, 또한 균열의 트랙션을 없애기 위한 반복계산에서 에러가 쌓이기 때문이다.

본 모델에 대하여 균열선단을 도는 3 개의 적분경로에 대하여 탄성 J 적분을 구하였다. 각 적분경로는 균열선단과 수직을 이루는 면상에서 균열선단을 중심으로하는 정육각형 형태로 취하였으며 균열선단으로부터의 최대 거리는, 1 번 경로는 0.1 m, 2 번은 0.15 m, 3 번은 0.2 m 이다. J 적분 계산 결과는 Table 1 과 같다. 각 적분경로에서 구해진 J 적분값들이 유사한 값들을 보이고 있지만 약간의 차이가 있음을 알 수 있다. 또한 해석에서 구해진 K 값으로부터 구해진 J 적분은 균열선단에서 가장 가까운 경로 1 에서 구해진 J 적분과 유사함을 알 수 있다.

각 적분경로에서 구한 탄성 J 적분값에 차이가 나는 이유에는 계산상의 오차도 있지만 엄밀하게 균열선단에서의 J 적분을 구하기 위해서는 면적적분까지 포함되는 3 차원 J 적분 정의를 사용하여 구하여야 하나 현재는 선적분으로 구하기 때문인 이유도 있다.

본 문제에 대하여 탄소성 J 적분도 구하였으나 균열선단의 접선 방향의 응력이 크므로 인하여 탄성 J 적분값에서 많이 증가되지는 않았다. 또한 구해진 J 적분과 비교할 J 적분값이 없어 핸드북에서 탄소성 J 적분을 구할 수 있는 다른 문제를 고려하였다.

4.2 원통 내부에 존재하는 표면균열

개발된 프로그램을 이용하여 양단이 열린 원통 내부에 존재하는 축방향 반타원형 표면균열에 대하여 탄소성 J 적분을 구하였다. 원통의 내부반경은 200 mm, 두께는 20 mm, 표면균열의 깊이는 5 mm, 표면에서의 균열길이는 20 mm 로 가정하였다.

사용된 유한요소 모델은 Fig. 6 과 같다. 3584 개의 20 절점 3 차원 요소가 사용되었다. 균열 근처에서는 보다 작은 크기의 요소를 사용하였다. 균열 근처에서의 유한요소 격자모양과 균열 요소의 형상은 Fig. 7 과 같다. 응력 변형률관계는 식 (11)의 Ramberg-Osgood 식을 만족한다고 가정하였다. 이때 항복강도는 400 MPa,  $n = 2.0$ ,  $\alpha = 1.0$  의 값을 사용하였고,  $\sigma_0$  는 항복강도로 취하였다.

내압을 원통 내면에 가하면서, 균열선단을 도는 적분경로에 대하여 탄소성 J 적분을 구하였다. 얻어진 J 적분을 그림으로 나타내면 Fig. 8 과 같다.

비교를 위하여 핸드북에서 주고 있는 J 적분값을 함께 도시하였다. 핸드북에서 원통의 내부에 존재하는 축방향 반타원형 균열의 최고 깊은 점에 대하여 J 적분은 식 (12)와 같이 주어진다.<sup>(10)</sup> 단 이때 재료의 응력 변형률 관계는 식 (11)로 표현된다.

Table 1 Elastic J integral values

Path	J Integral (MPa · m)
1	0.06715
2	0.07081
3	0.07500
From K	0.06546

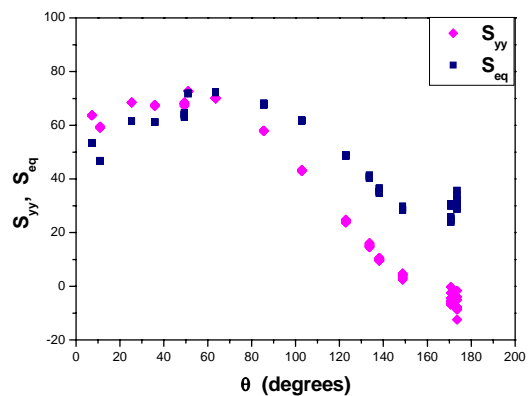


Fig. 4 Variation of elastic  $S_{yy}$  and  $S_{eq}$  as a function of

$\theta$

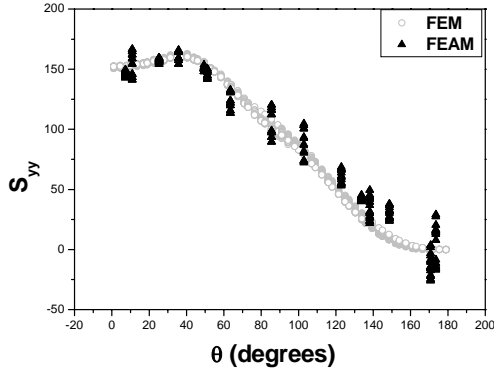


Fig. 5 Variation of elastic-plastic  $S_{yy}$  as a function of  $\theta$

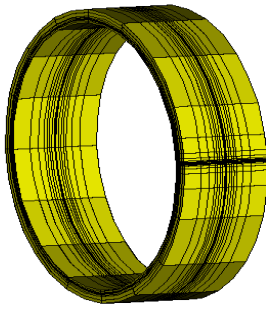


Fig. 6 Finite element model used in FEAM analysis

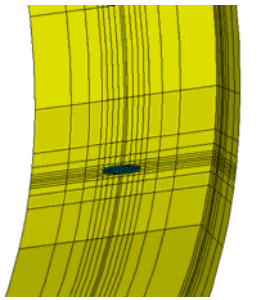


Fig. 7 Finite element and crack meshes near the crack

$$J = \frac{\pi f \sigma_h^2}{E'} + \alpha \sigma_o \epsilon_o t H_1 \left( \frac{\sigma_h}{\sigma_o} \right)^{n+1} \quad (12)$$

여기서 평면응력의 경우  $E' = E$  평면변형의 경우  $E' = E/(1-\nu^2)$  이고,  $H_1$  은 균열의 형상, 균열 깊이의 두께에 대한 비율 및  $n$  에 따라 달라지는 값으로 본 문제의 경우 1.012 의 값을

가진다. 또한 각 변수들의 정의는 다음과 같다.<sup>(10)</sup>

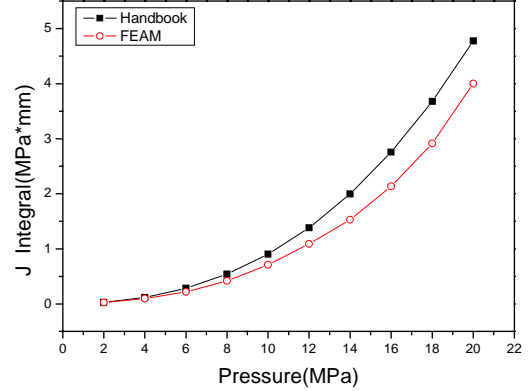


Fig. 8 J integral values from FEAM and handbook

$$f = [0.25 + 0.4759\alpha_e + 0.1262\alpha_e^2]^2 \quad (13)$$

$$\alpha_e = [(a/t) + (F^2/6) \cdot \{(n-1)/(n+1)\} \times (\sigma_h/\sigma_o)^2 / \{1 + B_0(\sigma_h/\sigma_o)^2\}] / (a/c)^{0.58} \quad (14)$$

$$F = 0.25 + 0.4759\alpha + 0.1262\alpha^2 \quad (15)$$

$$\sigma_h = p(R_o^2 + R_i^2) / (R_o^2 - R_i^2) \quad (16)$$

$$x = a/t \quad (17)$$

$$\alpha = (a/t) / (a/c)^{0.58} \quad (18)$$

$$B_0 = 1.0453[(1-x/B_1)/(1-x)] \quad (19)$$

$$B_1 = [1 + 0.1533(c/t)^2]^{0.5} \quad (20)$$

여기서  $t$  는 두께  $R_o$  는 원통의 외부반경,  $R_i$  는 원통의 내부반경이다.

Fig. 8 에서 보는 바와 같이 FEAM 에서 얻어진 J 적분값과 핸드북 값이 유사하나 FEAM 에서 얻어진 값이 조금 작은 값을 보임을 알 수 있다. 이때 적분경로는 표면균열의 가장 깊은점에서 균열선단과 수직을 이루는 평면상에서 균열선단에 중심을 둔 정육각형 형태로 취하였으며, 균열선단에서부터의 최대거리는 3 mm 이다. 동일한 형상의 적분 경로에 균열선단에서부터의 거리가 1 mm 인 적분경로에 대해서도 J 적분을 구하였다. 이 경우는 20 MPa 의 압력에서 3.45 MPa\*mm 의 값이 얻어졌다. 이렇게 FEAM 에서 얻어진 J 적분값과 핸드북 값이 차이를 보이는 이유는 핸드북 값 자체도 에러가 포함된 값인 이유도 있을 것이고, FEAM 해석에서 반복계산 중에 에러가 쌓여 응력 및 변위장의 정확성이 감소되는 이유도 있을 것으로 본다. 따라서 FEAM

해석에서 정확성을 높이기 위한 연구는 계속 필요하리라 판단된다.

## 5. 결 언

유한요소 교호법을 이용하여 탄소성 J 적분을 구할 수 있는 방법을 제시하였고 예제 문제를 해석하여 제시한 방법의 유용성을 살펴보았다. 이로부터 다음과 같은 사실들을 알 수 있었다.

(1) 균열면 근처에서 응력의 정확성을 높이기 위하여 적분영역의 분할과 변수변환을 이용하였다. 이로부터 응력의 정확성을 많이 향상시킬 수 있었다.

(2) 원통 내부에 존재하는 반타원 표면균열에 대하여 탄소성 J 적분을 구한 결과 유한요소 교호법으로 얻어진 J 적분은 핸드북에서 주고 있는 J 적분과 유사한 값을 보였다.

## 후 기

이 논문은 2007년도 충북대학교 학술연구지원사업의 연구비지원에 의하여 연구되었습니다. 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참고문헌

- (1) Nikishkov, G.P., Park, J.H. and Atluri, S.N., 2001, "SGBEM-FEM Alternating Method for Analyzing 3D Non-planar Cracks and Their Growth in Structural Components," *Comp. Modeling in Engng & Sci.*, Vol. 2, No. 3, pp. 401~422.
- (2) Li, S. and Mear, M.E., "Singularity-reduced Integral Equations for Displacement Discontinuities in Three Dimensional Linear Elastic Media," *Int. J. Fracture*, Vol. 93, pp. 87~114.
- (3) Park, Jai Hak and Park, Sang Yun, 2007, "Elastic-plastic Analysis of a 3-Dimensional Inner Crack Using Finite Element Alternating Method", *Transactions of the KSME A*, Vol. 31, No 10, pp. 1009-1016.
- (4) Nikishkov, G.P. and Atluri, S.N., 1994, "Analytical-Numerical Alternating Method for Elastic-Plastic Analysis of Cracks," *Comput. Mech.*, Vol. 13, No. 6, pp. 427~442.
- (5) Nayak, G.C. and Zienkiewicz, O.C., 1972, "Elasto-plastic Stress Analysis Generalization for Various Constitutive Relations Including Strain Softening," *Int. J. Numer. Methods in Engng*, Vol. 5, pp. 113~135.
- (6) Atluri, S.N., 1997, *Structural Integrity and Durability*, Tech Science Press, Forsyth..
- (7) Andra, H., 1998, "Integration of Singular Integrals for the Galerkin-type Boundary Element Method in 3D Elasticity," *Com. Methods Appl. Mech. Engng*, Vol. 157, pp. 239~249.
- (8) Erichsen, S. and Sauter, S.A., 1998, "Efficient Automatic Quadrature in 3-d Galerkin BEM," *Com. Methods Appl. Mech. Engng*, 157, pp. 215~224.
- (9) Frangi, A., Novati, G., Springhetti, R. and Rovizzi, M., 2000, "Fracture Mechanics in 3D by the Symmetric Galerkin Boundary Element Method," VIII Conf. on Numerical Methods in Continuum Mechanics, Liptovsky Jan, Slovak Republik.
- (10) Zahoor, A., 1991, *Ductile Fracture Handbook*, EPRI.