위성용 카메라 비선형 모델의 잡음 특성 분석과 영상 신호-잡음비(Image SNR) 분포도 계산

명환춘*, 이상곤**

Noise Analysis of Nonlinear Image Sensor Model with Application to SNR Estimation

Hwan-chun Myung*, Sang-kon Lee**

Abstract

The paper identifies noise characteristics of a nonliner image sensor model which reflects a saturation effect of each detector pixel and extends the result to estimate an image SNR (Signla-to-Noise Ratio) distribution over all the pixels in a detector. In particular, nonlinearity of a pixel is studied from two perspectives of including asymmetry of a noise PDF (Probability Distribution Function) and enhancing a pixel SNR value, in comparison to a linear model. It is noted that the proposed image SNR distribution function is useful to effectively select new optimal operation parameter values: an integration time and an pixel-summing number, even after a launch campaign, assuming sensor gain degradation in orbit or inevitable modification of some operation parameter values due to space contingency.

초 록

본 논문은 검출기의 포화과정을 반영한 비선형 모델의 잡음 특성을 분석하고, 그러한 분석결과를 영상 신호-잡음비(Image SNR)의 분포도를 계산하기위하여 적용한다. 특별히, 검출 화소의 비선형성은 잡음분포(PDF)의 비대칭성과 화소 신호-잡음비(Pixel SNR)의 증폭이라는 두 가지 관점에서 분석되며, 제안된 영상 신호-잡음비 분포도를 이용하여 위성의 발사 후에 카메라 이득의 변화나 기타 상황에서도, 궤도상에서 최적의 위성 카메라 운영 변수들(노출시간, 누적횟수)을 얻을 수 있음이 주요한 특징으로 강조된다.

키워드 : 비선형 영상 센서 모델 (nonlinear image sensor model), 영상 신호-잡음비(image SNR)

1. 서 론

일반적으로 위성 발사 이전에 위성용 카메라는 지상에서 많은 시험을 통하여 실제 운영에 필요한 변수들을 확정하게 된다. 이러한 변수들 중

접수일(2009년5월13일), 수정일(1차 : 2009년 6월 5일, 2차 : 2009년 6월 17일, 게재 확정일 : 2009년 7월 1일)

* 위성전자팀/mhc@kari.re.kr ** 위성전자팀/skon@kari.re.kr

에서 특별히 카메라의 주요 성능중의 하나인 신호-잡음비(SNR)에 영향을 미치는 노출시간과 누적횟수의 결정은 매우 중요하다. 지상 시험에서는 일정한 광원을 이용하여 여러 번의 반복시험을 통하여 각 화소(pixel)의 신호-잡음비를 확정한 후, 측정된 모든 화소의 신호-잡음비를 이용하여 영상의 신호-잡음비 분포도를 구성하게 되고, 이러한 분포도는 주어진 광원에 대하여 알맞은 노출시간과 누적횟수를 결정하는데 사용된다. 실제로 위성용 카메라의 검출기는 입력 광원의 세기가 커질수록 화소의 포화되는 성질에 의하여 비선형적인 출력을 내보내게 되는데, 이러한 비선형성으로 인하여 실제 궤도상에서 카메라의 선형 모델을 이용하여 노출시간과 누적횟수 계산에 오차가 발생할 수 있다. 본 논문은 카메라에 존재하는 비선형적인 특성을 반영한 모델을 사용하여 최종적으로 영상 신호-잡음비 분포도를 유도함으로써 입력 광원의 세기에 상관없이 최적의 노출시간과 누적횟수를 결정할 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

카메라 시스템에서 고려하는 잡음은 일반적으로 암전류 옵셋(O_D), 산탄 잡음(N_S), 판독 잡음(N_R), 양자화 잡음(N_Q), 전기적 옵셋(O_E) 등으로 나눌 수 있으며[1][2][3][4], 이러한 모든 잡음 원인들은 선형과 비선형 이득으로 구성된 카메라의 비선형 모델에 반영된다. 또한 각 이득들은 광학 이득(g_o), 광자-전자 변환 이득(g_s), 전자-전압 변환 선형/비선형 이득(g_l, g_n)으로부터 얻어진다. 본 논문에서는 이러한 잡음 원인들과 이득들을 이용하여 비중심 카이스퀘어 유사 잡음 확률분포(noncentral χ^2 distribution noise PDF)[5][6]를 유도하며, 그러한 잡음 분포의 모멘트 특성을 분석한다. 카메라 비선형 모델의 잡음 분포 모멘트 특성은 신호-잡음비의 정의에 따라서 화소 신호-잡음비를 계산할 수 있으며, 최종적으로 화소 신호-잡음비는 상관된 가우시안 분포 비율(correlated Gaussian distribution ratio)[7]의 분포결과를 적용함으로써 영상 신호-잡음비 분포도를 얻게 된다.

2. 본 론

2.1 화소 잡음분석

광원으로부터 입력되는 검출기의 입력 전자수(I)는 노출시간(T), 입력 광원의 세기(L_o: 망원경 후단, L: 망원경 전단), 공간응답특성($S(x,y)$), 화소 에너지 변환율($R(\lambda)$) 등으로 다음의 식 (1)과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} I_{ij}(\lambda) &= T\int_{y(i,j)}\int_{x(i,j)} L_o(x,y,\lambda)S(x,y)R(\lambda)dxdy \\ &= g_s(i,j)g_o(i,j)TL(i,j,\lambda) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 i와 j는 화소의 위치를, λ는 파장을 나타낸다. 카메라 모델과 관련한 모든 변수는 화소의 위치와 파장에 따라서 다르게 정의되어지며, 간결한 식의 표현을 위하여 본 논문에서는 이러한 부수적인 표현은 이후 식에서 배제하였다. 카메라의 비선형 모델은 디지털 출력값(D)을 고려할 때, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} D = &\, g_l(g_s g_o TL + N_{DSR}) - g_n(g_s g_o TL + N_{DSR})^2 \\ &+ N_{EQ} \end{aligned} \quad (2)$$

N_{DSR}과 N_{EQ}는 각각

$$N_{DSR} = O_D + N_S + N_R \quad (3)$$

$$N_{EQ} = O_E + N_Q \quad (4)$$

이다. 식 (2)에서 잡음을 고려한 출력값의 평균값과 잡음의 확률변수 부분은 다음의 식 (5)와 (6)과 같이 표현된다.

$$\overline{D} = g_{lso}T\left(L + \frac{O_D}{g_{so}}\right) - g_{nso}T^2\left(L + \frac{O_D}{g_{so}}\right)^2 + O_E + \overline{D_N} \quad (5)$$

$$D_N = g_{lso}\widehat{N_{SR}} - g_{nso}\widehat{N_{SR}}\left(\widehat{N_{SR}} + 2T\left(L + \frac{O_D}{g_{so}}\right)\right) + N_Q \quad (6)$$

여기에서 관련 변수들의 정의는 다음과 같다.

$$g_{so} = g_s g_o, \quad g_{lso} = g_l g_{so}, \quad g_{nso} = g_n g_{so}^2 \quad (7)$$

$$\overline{D} = E[D], \quad \overline{D_N} = E[D_N], \quad \widehat{N_{SR}} = \widehat{N_S} + \widehat{N_R} = \frac{N_S}{g_{so}} + \frac{N_R}{g_{so}} \quad (8)$$

식 (6) 확률변수는 다시 다음과 같이 재구성된다.

$$\begin{aligned} D_N &= (g_{lso} - 2\mu g_{nso})\widehat{N_{SR}} - g_{nso}\widehat{N_{SR}^2} + N_Q \\ &= \rho\widehat{N_{SR}} - g_{nso}\widehat{N_{SR}^2} + N_Q \\ &= \widehat{N_I} + N_Q \end{aligned} \tag{9}$$

이 때,

$$\mu = T\left(L + \frac{O_D}{g_{so}}\right) \tag{10}$$

$$\rho = g_{lso} - 2\mu g_{nso} \tag{11}$$

$$\widehat{N_I} = \rho\widehat{N_{SR}} - g_{nso}\widehat{N_{SR}^2} \tag{12}$$

식 (5)와 식 (10)을 이용하여 μ의 근을 다음과 같이 구할 수 있으며,

$$\mu = \frac{g_{lso} - \sqrt{g_{lso}^2 - 4g_{nso}(\overline{D} - O_E - \overline{D_N})}}{2g_{nso}} \tag{13}$$

루트 내부의 조건으로 인하여

$$g_{lso}^2 \geq 4g_{nso}(\overline{D} - O_E - \overline{D_N}) \tag{14}$$

과 식(13)을 식(11)에 적용하여

$$\rho = \sqrt{g_{lso}^2 - 4g_{nso}(\overline{D} - O_E - \overline{D_N})} \geq 0 \tag{15}$$

을 얻을 수 있다. 본 연구에서는 확률변수 $\widehat{N_{SR}}$의 확률분포를 구하기 위하여 포와송(Poisson) 분포를 가지는 산탄잡음(N_S)을 가우시안 분포로 가정하였다. 실제로 카메라에 입력되는 입력 전자의 수가 충분히 크기 때문에 포와송 분포는 이론적으로 가우시안 분포로 근사화될 수 있다[5]. 이 때, 또 다른 가우시안 분포를 가지는 판독 잡음을 함께 고려하여 $\widehat{N_{SR}}$의 확률분포는 식 (16)과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} f_{\widehat{N_{SR}}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(g_{so}\mu + \tau^2)/g_{so}^2}} e^{-g_{so}^2 x^2 / 2(g_{so}\mu + \tau^2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2} \end{aligned} \tag{16}$$

식 (16)을 식 (12)에 적용함으로써, $\widehat{N_I}$의 누적 확률분포(CDF)를 계산할 수 있으며 그 결과는 식 (17)과 같다.

$$F_{\widehat{N_I}}(x) = \frac{\left(\int_{\psi_1(x)}^{\infty} e^{-\psi^2/2\sigma^2} d\psi + \int_{-\infty}^{\psi_2(x)} e^{-\psi^2/2\sigma^2} d\psi\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \tag{17}$$

여기에서

$$\psi_1(x) = \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - 4g_{nso}x}}{2g_{nso}}, \psi_2(x) = \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 - 4g_{nso}x}}{2g_{nso}} \tag{18}$$

이며, 루트 내부의 조건으로 인하여 확률변수 $\widehat{N_I}$의 범위는

$$x < \frac{\rho^2}{4g_{nso}} \tag{19}$$

으로 한정된다. 식 (17)의 미분을 통하여, $\widehat{N_I}$의 확률분포를 얻게된다.

$$f_{\widehat{N_I}}(x) = \frac{\left(e^{-\psi_1^2(x)/2\sigma^2} + e^{-\psi_2^2(x)/2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\rho^2 - 4g_{nso}x)}} \tag{20}$$

이러한 결과는 균일분포를 가지는 양자화 잡음 확률변수와 합해져서 다음과 같이 잡음 확률 분포를 구성하게 된다.

$$\begin{aligned} & f_{D_N}(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{N_Q}(\zeta) f_{\widehat{N_I}}(x - \zeta) d\zeta \\ &= \frac{\left(\int_{\psi_1(x+q/2)/\sqrt{2}\sigma}^{\psi_1(x-q/2)/\sqrt{2}\sigma} e^{-\eta^2} d\eta - \int_{\psi_2(x+q/2)/\sqrt{2}\sigma}^{\psi_2(x-q/2)/\sqrt{2}\sigma} e^{-\eta^2} d\eta\right)}{q\sqrt{\pi}} \end{aligned} \tag{21}$$

단,

$$x \leq \frac{\rho^2}{4g_{nso}} - \frac{q}{2}, \quad q \neq 0 \tag{22}$$

의 조건이 식 (19)의 변형으로 적용되어진다. 식 (21)은 가우스 오류 함수[6]의 정의에 따라서 다시 식 (23)과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} f_{D_N}(x) &= \frac{1}{2q} erf\left(\frac{\psi_1(x - q/2)}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \frac{1}{2q} erf\left(\frac{\psi_1(x + q/2)}{\sqrt{2}\sigma}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2q} erf\left(\frac{\psi_2(x - q/2)}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \frac{1}{2q} erf\left(\frac{\psi_2(x + q/2)}{\sqrt{2}\sigma}\right) \end{aligned} \tag{23}$$

한편, 식 (20)은 식 (24)와 같이 변형될 수 있으므로,

$$f_{\widehat{N}_I}(x) = \frac{e^{-\psi_2^2(x)/2\sigma^2}\left(1+e^{-\rho\sqrt{\rho^2-4g_{nso}x}/2g_{nso}^2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\rho^2-4g_{nso}x)}} \quad (24)$$

다음의 조건을 만족한다면,

$$\frac{\rho\sqrt{\rho^2-4g_{nso}x}}{2g_{nso}^2\sigma^2} \gg 0 \quad (25)$$

$\widehat{N}_I$의 확률분포는 식 (26)과 같이 근사화 될 수 있다.

$$f_{\widehat{N}_I}(x) \simeq \frac{e^{-\psi_2^2(x)/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\rho^2-4g_{nso}x)}} \quad (26)$$

그리고, 식 (26)은 차례대로 식 (23)의 잡음 확률 분포를 식 (27)에서처럼 근사식으로 표현할 수 있게된다.

$$f_{D_N}(x) \simeq \frac{1}{2q}\left(erf\left(\frac{\psi_2(x+\frac{q}{2})}{\sqrt{2}\,\sigma}\right) - erf\left(\frac{\psi_2(x-\frac{q}{2})}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)\right) \quad (27)$$

또한, 비선형 이득 g_{nso}가 0으로 수렴하는 선형 모델의 경우,

$$\lim_{g_{nso}\to 0}\psi_1(x) = 0, \qquad \lim_{g_{nso}\to 0}\psi_2(x) = \frac{x}{g_{lso}} \quad (28)$$

이므로, 식 (23)의 잡음 확률분포는 다음과 같이 더욱 간단한 형태로 변형된다.

$$\lim_{g_{nso}\to 0} f_{D_N}(x) = \frac{\left(erf\left(\frac{x+q/2}{\sqrt{2}\,\sigma g_{lso}}\right) - erf\left(\frac{x-q/2}{\sqrt{2}\,\sigma g_{lso}}\right)\right)}{2q} \quad (29)$$

잡음 확률분포의 평균은 다음과 같고,

$$\overline{D_N} = E[D_N] = E[\widehat{N}_I] + E[N_Q] = E[\widehat{N}_I] \ (\because E[N_Q]=0) \quad (30)$$

확률변수 $\widehat{N}_I$ 는 식 (31)과 같이 재구성된다.

$$\begin{aligned}\widehat{N}_I &= -g_{nso}\sigma^2\left(\frac{\widehat{N_{SR}} - \rho/2g_{nso}}{\sigma}\right)^2 + \frac{\rho^2}{4g_{nso}} \\ &= -g_{nso}\sigma^2\widetilde{N_{SR}^2} + \frac{\rho^2}{4g_{nso}}\end{aligned} \quad (31)$$

$\widehat{N_{SR}^2}$은 자유도 1의 카이스퀘어 유사 확률분포이고, 따라서 평균값은 $1+(\rho/2g_{nso}\sigma)^2$이므로[5][6], 잡음 확률분포의 평균은

$$\begin{aligned}\overline{D_N} = E[\widehat{N}_I] &= -g_{nso}\sigma^2\left(1+\frac{\rho^2}{4g_{nso}^2\sigma^2}\right) + \frac{\rho^2}{4g_{nso}} \\ &= -g_{nso}\sigma^2 \le 0\end{aligned} \quad (32)$$

이 된다. 식 (13)과 식(16)에서 σ^2은 $\overline{D_N}$의 형태로 표현될 수 있으므로, 이러한 결과를 다시 식 (32)에 대입하면 다음의 두 조건들을 바탕으로하여,

$$\overline{D_N} = 0 \qquad \text{if } g_n = 0 \quad (33)$$

$$\overline{D} \le \frac{g_l^2}{4g_n} + \frac{g_n}{4} - \frac{g_l}{2} - g_n\tau^2 + O_E \quad \text{if } g_n \ne 0 \quad (34)$$

$\overline{D_N}$의 새로운 표현식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\overline{D_N} = &\frac{\sqrt{g_l^2+g_n^2-2g_lg_n-4g_n^2\tau^2-4g_n(\overline{D}-O_E)}}{2} \\ &-\frac{g_l-g_n+2g_n\tau^2}{2}\end{aligned} \quad (35)$$

한편, $\widehat{N_{SR}^2}$의 분산은

$$V[\widetilde{N_{SR}^2}] = 2 + \frac{\rho^2}{g_{nso}^2\sigma^2} \quad (36)$$

이므로, 잡음 확률분포의 분산은 식(37)과 같다.

$$\begin{aligned}V[D_N] &= V[\widehat{N}_I] + V[N_Q] \\ &= (g_{nso}\sigma^2)^2 V[\widetilde{N_{SR}^2}] + \frac{q^2}{12} \\ &= 2g_{nso}^2\sigma^4 + \rho^2\sigma^2 + \frac{q^2}{12} \\ &= 2\overline{D_N^2} - \frac{\rho^2}{g_{nso}}\overline{D_N} + \frac{q^2}{12}\end{aligned} \quad (37)$$

식 (32)에서 $\overline{D_N}$은 언제나 음수이므로, 식 (37)에서 잡음 확률분포의 분산은 평균의 절대값 크기에 따라서 단조 증가하는 경향을 갖게 됨을 확인할 수 있다.

2.2 누적 화소 잡음분석

일반적으로 궤도상에서 위성 카메라의 신호-잡음비 성능을 개선하기 위하여 누적 혹은 평균화 과정이 수행되며, 이러한 일련의 후처리 과정을

잡음 확률 분포에 고려하기 위하여 식 (38)과 같이 새로운 확률변수 $X_I(k,n)$을 정의한다. 여기에서 k는 누적횟수를 나타내고, n은 평균화 횟수를 나타내며, 일반적으로 누적화를 수행하는 경우에는 $n=1$이고 평균화를 수행하는 경우에는 $n=k$가 된다.

$$\begin{aligned} X_I(k,n) &= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{k}\widehat{N_{I,l}} \\ &= -\frac{g_{nso}\sigma^2}{n}\sum_{l=1}^{k}\widetilde{N_{SR,l}^2}+\frac{k\rho^2}{4ng_{nso}} \end{aligned} \tag{38}$$

식 (31)과 식 (38)에서 $\sum_{l=1}^{k}\widetilde{N_{SR,l}^2}$은 k-자유도를 가지는 비중심 카이스퀘어 분포를 가지므로, $X_I(k,n)$의 확률분포는 다음의 식 (40)과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} & f_{X_I(k,n)}(x) \\ &= n\frac{e^{-(z(x)+\nu)/2}}{2g_{nso}\sigma^2}\left(\frac{z(x)}{\nu}\right)^{\frac{k-2}{4}}B_{\frac{k-2}{2}}(\sqrt{\nu z(x)}) \end{aligned} \tag{39}$$

여기에서

$$z(x)=\frac{n}{g_{nso}\sigma^2}\left(\frac{k\rho^2}{4ng_{nso}}-x\right) \tag{40}$$

$$\nu=\frac{k\rho^2}{4g_{nso}^2\sigma^2} \tag{41}$$

$$B_{\frac{k-2}{2}}(\sqrt{\nu z(x)})=\left(\frac{\sqrt{\nu z(x)}}{2}\right)^{\frac{k-2}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\nu z(x)/4)^m}{m!\Gamma(k/2+m)} \tag{42}$$

이고, $\Gamma(k/2+m)$은 감마(Gamma) 함수를 나타낸다. $k=n=1$인 경우의 잡음의 확률분포를 나타내는 식 (23)은 식 (39)를 사용하여 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$f_{D_N}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{N_Q}(\zeta)f_{X_I(1,1)}(x-\zeta)d\zeta \tag{43}$$

한편, $B_{k/2-1}(\sqrt{\nu z(x)})$은 수정된 제 1종 변형 베셀함수(modified Bessel function of the first kind)이므로, 식 (44)와 같이 근사화될 수 있다[5].

$$B_{\frac{k-2}{2}}(\sqrt{\nu z(x)})\simeq\frac{(\nu z(x))^{-1/4}}{\sqrt{2\pi}}e^{\sqrt{\nu z(x)}} \tag{44}$$

단, 식 (44)는 식 (45)의 조건을 만족해야한다[5].

$$\sqrt{\nu z(x)}\gg\left|\frac{k^2}{4}-k+\frac{3}{4}\right| \tag{45}$$

만약 누적 횟수가 $k=3$이라면, 식 (45)는

$$\sqrt{\nu z(x)}\gg 0 \tag{46}$$

이 되고, 식 (39)는 다음과 같이 더 간단한 형태의 근사확률분포를 가지게 된다.

$$f_{X_I(3,n)}(x)=n\frac{e^{-(z(x)+\nu)/2+\sqrt{\nu z(x)}}}{2g_{nso}\sigma^2} \tag{47}$$

$k\geq 2$인 경우, 양자화 잡음의 균일분포는 근사적으로 평균이 0이고, 분산이 $kq^2/12n^2$을 가지는 가우시안 분포($G_Q(k,n)$)에 의하여 표현될 수 있으므로, 누적 화소의 잡음 확률 변수($X_{IQ}(k,n)$)는 누적횟수가 클 경우에 다음과 같이 근사적으로 정의될 수 있다.

$$\begin{aligned} X_{IQ}(k,n) &\simeq X_I(k,n)+\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{k}N_{Q,l} \\ &= X_I(k,n)+G_Q(k,n) \end{aligned} \tag{48}$$

이 때, $X_{IQ}(k,n)$의 특성화함수(characteristic function)의 관계식에서

$$\begin{aligned} \Phi_{X_{IQ}(k,n)}(\omega) &\simeq \Phi_{X_I(k,n)}(\omega)\Phi_{G_Q(k,n)}(\omega) \\ &= \Phi_{X_I(k,n)}(\omega)e^{-kq^2\omega^2/12n^2} \\ &= \Phi_{X_I(k,n)}\left(1-\frac{kq^2}{12n^2}\omega^2+\frac{1}{2!}\left(\frac{kq^2}{12n^2}\right)^2\omega^4-\cdots\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{kq^2}{12n^2}\right)^m(-j\omega)^{2m}\Phi_{X_I(k,n)} \end{aligned} \tag{49}$$

을 얻을 수 있다. 따라서, 최종적으로 누적 화소의 잡음 확률분포는 다음과 같다.

$k=n=1$인 경우,

$$f_{X_{IQ}(1,1)}(x)=f_{D_N}(x),\quad x\leq\frac{\rho^2}{4g_{nso}}-\frac{q}{2} \tag{50}$$

$k\geq 2$인 경우,

$$\begin{aligned} & f_{X_{IQ}(k,n)}(x) \\ &\simeq f_{X_I(k,n)}(x)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{kq^2}{12n^2}\right)^m\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}f_{X_I(k,n)}(x), \end{aligned}$$

$$x \le \frac{k\rho^2}{4ng_{nso}} - \frac{kq}{2} \qquad (51)$$

누적 화소 잡음 확률분포의 평균과 분산은 이전의 식(32)와 식(37)의 계산과 유사하게 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}\overline{X_{IQ}}(k,n) &= E[X_{IQ}(k,n)] \\ &= E[X_I(k,n)] + \frac{k}{n}E[N_Q] \\ &= -\frac{g_{nso}\sigma^2}{n}(k+\nu) + \frac{k\rho^2}{4ng_{nso}} \\ &= -\frac{k\rho^2}{4ng_{nso}} \\ &= \frac{k}{n}\overline{D_N} \\ &\le 0\end{aligned} \qquad (52)$$

$$\begin{aligned}&V[X_{IQ}(k,n)] \\ &= V[X_I(k,n)] + \frac{k}{n^2}V[N_Q] \\ &= \frac{g_{nso}^2\sigma^4}{n^2}(2k+4\nu) + \frac{kq^2}{12n^2} \\ &= \frac{kg_{nso}^2\sigma^4}{n^2}\left(2 + \frac{\rho^2}{g_{nso}^2\sigma^2}\right) + \frac{kq^2}{12n^2} \\ &= \frac{2}{k}\left(\overline{X_{IQ}}(k,n)\right)^2 - \frac{\rho^2}{ng_{nso}}\overline{X_{IQ}}(k,n) + \frac{kq^2}{12n^2}\end{aligned} \qquad (53)$$

이전의 식 (37)에서와 마찬가지로 $X_{IQ}(k,n)$의 분산은 평균값의 절대값에 따라서 단조 증가하는 경향이 있음을 알 수 있다.

2.3 영상 신호-잡음비 분포

신호-잡음비의 정의에 따라서, 하나의 화소에 대한 화소 신호-잡음비는 식 (53)을 고려하여 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}SNR_P &= \frac{Noise\ Free\ Signal}{Noise\ Standard\ Deviation} \\ &= \frac{\sqrt{k}\,(g_{lso}TL - g_{nso}T^2L^2)}{\sqrt{g_{nso}^2\sigma^4(2+\rho^2/(g_{nso}^2\sigma^2))}}\end{aligned} \qquad (54)$$

식 (54)는 다음의 세 가지 조건들을 가정하여,

$$L \gg \frac{O_D}{g_{so}} \qquad (55)$$

$$g_{so}\mu \gg \tau^2 \qquad (56)$$

$$\frac{\rho^2}{g_{nso}^2\sigma^2} \gg 2 \qquad (57)$$

식 (58)과 같은 근사화된 화소 신호-잡음비를 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}SNR_P &\simeq \sqrt{kg_{so}TL}\,\frac{g_{lso} - g_{nso}TL}{g_{lso} - 2g_{nso}TL} \\ &= \sqrt{kg_{so}TL}\,\Psi\end{aligned} \qquad (58)$$

여기서, Ψ는 언제나 1보다 크거나 같은 값으로서, 카메라 모델의 비선형성에 의한 화소 신소-잡음비의 증폭 비율을 나타낸다. 카메라 모델의 선형성을 의미하는 $g_{nso}=0$의 경우, Ψ는 1이된다. 식 (55)와 식 (56)의 두 조건들은 다음의 식 (59)를 만족시키기에 충분한 입력 광원을 가정한다면 만족시킬 수 있다. 다시 말해서, 식 (58)은 입력 광원이 매우 낮은 경우에는 적용하기가 어렵다.

$$L \gg \max\left(\frac{O_D}{g_{so}}, \frac{\tau^2}{g_{so}T}\right) \qquad (59)$$

또한, 식 (57)의 세 번째 조건은 식 (59)를 가정하면서, 높은 비율의 g_{so}/g_{nso}와 g_{lso}/g_{nso}를 가지는 카메라 시스템을 대상으로 다음과 같이 만족시킬 수 있다.

$$\frac{\rho^2}{g_{nso}^2\sigma^2} \simeq \frac{g_{so}}{g_{nso}}\left(\frac{g_{lso}}{g_{nso}} - 2TL\right) \gg 2 \qquad (60)$$

한편, 발사 전의 지상 광학시험에서는 화소 신호-잡음비 측정을 통하여 영상 신호-잡음 분포도를 계산하게 되며, 이것은 화소간의 불균일성으로 인하여 일정한 분포를 형성하게 된다. 이러한 영상 신호-잡음 분포도는 특별히 2차원 검출기의 경우에 신호-잡음비 성능 규격을 만족시키기 위한 초기 노출시간과 누적횟수 등을 결정하기위한 기준 함수로서 사용된다. 하지만, 화소 신호-잡음비 측정을 위하여 수행되는 지상 광학시험은 알려진 일정한 광원과 반복적이고 충분한 시간이 요구되는 시험과정이기 때문에, 발사 후의 궤도상에서 관련 운영 변수들(노출시간, 누적횟수)을

재설정하기 위해서는 영상 신호-잡음 분포도를 구성하는 새로운 방법이 필요하게 된다. 더욱이, 실제 궤도상에서는 카메라의 선형/비선형 이득값들이 시간이 지남에 따라서 변하게 되고, 또한 위성의 운영과 관련하여 카메라의 운영 변수들에 제한이 가해질 경우에 새로운 최적의 운영 변수들을 계산할 필요가 발생할 수도 있으므로, 본 연구에서 제시하고자 하는 영상 신호-잡음비 분포도의 계산은 이러한 운영 변수들의 재설정을 위한 기준 함수로서 역할을 할 수 있다는 점에서 그 중요도를 확인할 수 있다. 이 후의 계산을 위해서, 모든 화소들에 대한 각 이득값들의 분포는 궤도상의 켈리브레이션(calibration) 과정을 통하여 얻어지고, 가우시안 분포를 형성하는 것으로 가정한다. 식 (58)의 신호-잡음비 증폭비율 Ψ는 V/U로 정의되고, V와 U는 각각

$$V = g_{lso} - g_{nso}TL,\ U = g_{lso} - 2g_{nso}TL \tag{61}$$

이 된다. 우선, g_{so} 이득값은 확률분포가 아닌 상수로 가정할 때, V와 U의 평균과 표준편차는 식 (62)와 식 (63)이 된다.

$$\begin{aligned} m_V &= E[V] = g_{so}E[g_l] - TLg_{so}^2E[g_n] \\ m_U &= E[V] = g_{so}E[g_l] - 2TLg_{so}^2E[g_n] \end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned} \sigma_V^2 &= V[V] = g_{so}^2V[g_l] + (TL)^2g_{so}^4V[g_n] \\ \sigma_U^2 &= V[U] = g_{so}^2V[g_l] + 4(TL)^2g_{so}^4V[g_n] \end{aligned} \tag{63}$$

식 (61)에서 확률변수 V와 U는 서로 독립(independent)이 아니므로, 상관계수는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} r &= \frac{V[g_{lso}] + 2(TL)^2V[g_{nso}]}{\sqrt{(V[g_{lso}] + 4(TL)^2V[g_{nso}])(V[g_{lso}] + (TL)^2V[g_{nso}]}} \\ &= \frac{V[g_l] + 2(TLg_{so})^2V[g_n]}{\sqrt{(V[g_l] + 4(TLg_{so})^2V[g_n])(V[g_l] + (TLg_{so})^2V[g_n]}} \end{aligned} \tag{64}$$

신호-잡음비 증폭비율 Ψ는 서로 독립이 아닌 가우시안 확률분포를 가지는 확률변수들의 비율이므로, 관련 연구의 결과[7]를 일정한 상수 g_{so}에 대하여 적용하면 영상 신호-잡음비 조건 확률분포는

$$\begin{aligned} & f_{SNR_I}(x|g_{so}) \\ &= \frac{\sigma_V\sigma_U\sqrt{1-r^2}}{\lambda\pi(\sigma_U^2x^2/\lambda^2 - 2r\sigma_V\sigma_Ux/\lambda + \sigma_V^2)}(e^{-B/2} + \\ & \sqrt{2\pi}A(x/\lambda)(\Phi(A(x/\lambda)) - 1/2)e^{-C(x/\lambda)/2} \end{aligned} \tag{65}$$

이 된다. 관련 변수들은 각각,

$$A(z) = \frac{(\sigma_U^2m_V - r\sigma_V\sigma_Um_U)z - r\sigma_V\sigma_Um_V + \sigma_V^2m_U}{\sigma_V\sigma_U\sqrt{1-r^2}\sqrt{\sigma_U^2z^2 - 2r\sigma_V\sigma_Uz + \sigma_V^2}} \tag{66}$$

$$B = \frac{\sigma_U^2m_V^2 - 2r\sigma_V\sigma_Um_Vm_U + \sigma_V^2m_U^2}{\sigma_V^2\sigma_U^2(1-r^2)} \tag{67}$$

$$C(z) = \frac{(m_V - m_Uz)^2}{\sigma_Uz^2 - 2r\sigma_V\sigma_Uz + \sigma_V^2} \tag{68}$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-s^{2/2}}ds \tag{69}$$

$$\lambda = \sqrt{kg_{so}TL} \tag{70}$$

이다. 따라서, 마지막으로 가우시안 확률변수 g_{so} (평균:$m_{g_{so}}$, 표준편차:$\sigma_{g_{so}}$)를 고려하여 영상 신호-잡음비의 확률분포를 조건부 확률분포 관계로부터 계산하면 식 (71)과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & f_{SNR_I}(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{g_{so}}^2}}\int_{-\infty}^{\infty} f_{SNR_I}(x|g_{so})e^{-(g_{so}-m_{g_{so}})^2/(2\sigma_{g_{so}}^2)}dg_{so} \end{aligned} \tag{71}$$

3. 결　　론

본 논문은 카메라의 비선형 모델을 이용하여 화소 잡음의 확률분포를 유도하였으며, 누적화/평균화 과정을 포함하는 누적 화소 잡음의 확률분포도 제시하였다. 확률 분포는 비중심 카이스퀘어 유사 확률분포를 따르고, 평균이 언제나 음의 값을 가짐을 보였으며, 평균과 분산과의 단조 증가관계를 확인하였다. 또한, 서로 상관된 가우시안 확률분포의 비율에 관한 이전의 연구결과[7]를 적용하여 화소 신호-잡음비로부터 영상 신호-잡음비 분포도를 얻을 수 있음을 보였으며,

제시된 영상 신호-잡음비 분포도는 궤도상에서 운영변수들의 재설정이 요구되는 경우에 유용하게 사용될 수 있음을 설명하였다.

추후 연구로서 제시된 영상 신호-잡음비 분포도의 특성을 각 이득값의 확률분포 관점에서 분석하고, 잡음 확률분포를 이용하여 모사된 영상 신호-잡음비의 분포와 제시된 분포도와의 비교 과정이 수행될 예정이다.

참 고 문 헌

1. Gelnn E. Healy, “Radiometric CCD Camera Calibration and Noise Estimation”, IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 제16권, 제3호, 1994, pp.267-276
2. Y. Matsushita and S. Lin, “Radiometric Calibration from Noise Distribution“, Computer Vision and Pattern Recognition Conference Proceeding, 2007
3. Ryan D. Gow et al., “A Comprehensive Tool for Modeling CMOS Image Sensor Noise Performance“, IEEE Trans. on Electron Devices, 2007, 제54권, 제9호, pp.1321-1329
4. N. Famramarzpour, M. Jamel Deen, “An Apporcah to Improve the Signal-to-Noise Ratio of Active Pixel for Low-Light-Level Applications“, 2006, IEEE Trans. on Electron Devices, 제53권, 제9호, pp.-2384-2391
5. Mary L. Boas, Mathematical Method in the Physical Science, Wiley, 1983, pp.701-703
6. Carl W. Helsotrom, Probability and Stochastic Process for Engineers, Maxwell Macmillan, 1984, pp.203-207
7. D. V. Hinkley, “On the ratio of two correlated normal random variables“, Biometrika, 1964, 제56권, 제3호, pp.635-639