

2차 요소를 이용한 2차원 상향가중 유한요소모형 2-D SU/PG Finite Element Model Using Quadratic Elements

최 승 용* / 김 병 현** / 김 상 호*** / 한 건 연****

Choi, Seung Yong / Kim, Byung Hyun / Kim, Sang Ho / Han, Kun Yeun

Abstract

The objective of this study is to develop an efficient and accurate quadratic finite element model based on Streamline Upwind/Petrov Galerkin (SU/PG) scheme for analyzing and predicting two dimensional flow features in complex natural rivers. For a development of model, quadratic tin, quadrilateral and mixed elements as well as linear tin, quadrilateral and mixed elements were used in the model. Also, this model was developed through reinforcement of Gauss Quadrature which was necessary to integral of governing equation. Several tests for bottom-rising channel and U-type channel were performed for the purpose of validation and verification of the developed model. Such results showed that solutions of second order elements are better accurate and improved than those of linear elements. Results obtained by the developed model and RMA-2 model are compared, and the results for the developed model were better accurate than those of RMA-2 model. In the future if the developed model is applied in natural rivers, it can provide better accurate results than those of existing model.

Keywords : finite element model, streamline upwind, quadratic elements, Gauss Quadrature

요 지

본 연구의 목적은 하도의 형상이 불규칙한 자연하천에서 2차원 흐름 특성을 해석하고 예측하기 위해 2차 요소를 이용한 정확하고 효과적인 상향가중 유한요소모형의 개발에 있다. 모형의 개발을 위해 선형 삼각형 요소, 선형 사각형 요소와 혼합요소를 적용하였고 2차 삼각형, 사각형 요소와 혼합요소를 적용하여 모형을 개발하였으며, 지배방정식의 수치적분식으로 Gauss Quadrature 방법을 사용하였다. 개발된 모형의 적용성 검증을 위해 하상용기가 있는 수로, U자형 수로 등에 모의를 실시하여 해석해 및 실측치와 비교 검토하였다. 모의 결과 2차 요소가 선형 요소에 비해 보다 정확한 해를 제공하는 것으로 판단되었으며 2차요소를 적용한 상용모형인 RMA-2 모형과 비교한 결과 본 연구 개발 모형이 보다 정확한 해를 나타내는 것을 확인할 수 있었다. 개발된 모형을 향후 자연하천에 적용할 경우 기존의 모형에 비해 향상된 결과를 얻을 수 있을 것으로 판단된다.

핵심용어 : 유한요소모형, 상향가중, 2차 요소, Gauss Quadrature

* 경북대학교 공과대학 건축·토목공학부 박사과정수료

Ph.D. Candidate, School of Archi. & Civil Engineering, Kyungpook National Univ., Daegu, 702-701, Korea

** 교신저자, 경북대학교 공과대학 건축·토목공학부 BK21사업단 박사후연구원

Corresponding Author, Post-Doc., School of Archi. & Civil Engineering, Kyungpook National Univ., Daegu, 702-701, Korea (e-mail: hydrobk@knu.ac.kr)

*** 상지대학교 이공과대학 건설시스템공학과 부교수

Associate Professor, Department of Civil Engineering, Sangji Univ., Wonjusi Gangwondo, 220-702, Korea

**** 경북대학교 공과대학 건축·토목공학부 교수

Professor, School of Archi. & Civil Engineering, Kyungpook National Univ., Daegu, 702-701, Korea

1. 서 론

유한요소법은 공학 및 물리학에서의 연속체의 문제를 해결하는데 매우 효과적인 방법으로 연구 발전되어 오고 있으며 특히 자연하천에 있어서 빈번히 나타나는 불규칙한 지형 특성을 효과적으로 정의할 수 있으며 요소의 이산화가 쉽기 때문에 수리학 분야에서 널리 사용되고 있다.

유한요소법에서 해의 정확도를 결정하는 요인에는 두 가지가 있는데, 첫 번째가 요소의 형태 및 차수이고 두 번째가 가중함수의 형태이다. 요소의 형태 및 차수의 경우 일반적으로 선형 요소에 비해 고차 요소의 해의 정확도가 우수한 것으로 알려져 있다. 이는 선형 요소와 고차 요소에 사용되는 보간함수의 차수에 기인한 것으로 판단된다. 그러나 선형 요소와 고차 요소를 사용했을 때 해의 정확도가 얼마나 차이가 나는지에 대한 정량적인 평가는 거의 이루어지지 않았다.

이러한 유한요소 해석에 대한 연구개발 현황을 살펴보면 대부분의 유체흐름을 해석함에 있어 범함수(functional)가 존재하지 않기 때문에 변분법을 적용할 수 없으므로 흐름해석을 위해 Galerkin 방법을 적용한다. 이 기법은 주어진 연립형태의 미분방정식을 풀기 위해서 모의영역에서 가중방정식의 적분과정에서 도출되는 잔차를 최소화시키는 과정으로 구성된다. 기존의 BG (Bubnov-Galerkin) 기법에서는 가중함수를 보간함수와 같게 놓고 해석함으로써 전체 해의 오차를 최소화시키는 과정을 적용하였다. 그러나 이 기법은 많은 실용적인 개수로 흐름문제에 있어 해가 불안정한 것으로 나타났으며, 특별히 해석구간에 shock 등 급변 부정류가 존재하는 경우 해의 불안정성은 매우 크게 나타났다(Dupont, 1973; Gray, 1980). 이러한 Bubnov-Galerkin 기법이 가지고 있는 수치 불안정성을 보완하기 위해 이제까지 하천흐름해석을 위한 대부분의 연구와 상업적인 유한요소 프로그램은 수심과 유속에 대해 선형 보간함수보다 정확한 2차 보간 함수를 사용하지 않고 수심에 대해서는 선형보간 함수를 사용하고 유속에 대해서는 2차 보간 함수를 도입하는 혼합보간 개념을 도입하여 천수방정식을 해석하였다(King and Norton, 1978; Walters and Cheng, 1978; Norton, 1980; Gee and MacArthur, 1981). 그러나 혼합보간 역시 복잡한 유한요소망 적용시 유속의 진동현상이 발생하였으며 유속에 대한 2차 보간함수를 적용해야 하기 때문에 많은 수의 절점이 필요함에도 불구하고 계산의 정확성은 보간함수의 차수에 의해서 지배되었다

(Walters, 1983). 또한 이러한 유속과 수심에 다른 차수의 보간 함수를 도입하는 혼합보간 기법을 적용하기 위해서는 비보존형 천수방정식을 사용해야 하는 문제점이 있다. Lee and Froehlich(1986)의 연구에서는 2차원 천수방정식을 유한요소법으로 해석할 때 유속 및 수심항에 대하여 동일한 차수의 보간함수를 사용하였으나 여전히 가중함수 처리 문제로 인해 해석에 제한을 받았다.

가중함수에 대한 연구로는 Katopodes(1984)가 1차 요소를 이용한 감쇠형 유한요소기법을 개수로 내의 홍수류 해석에 적용하였고, Hicks and Steffler(1992)는 특성선과 감쇠형 유한요소법에 의해 상류-사류의 천이영역에서의 부정류 해석을 실시하였으며, Berger(1993) 그리고 Stocksill and Berger(1994)는 각각 만곡부에서의 흐름해석과 댐 여수로 등 고유속부(高流速部)에서의 흐름해석을 위해서 Petrov-Galerkin 기법을 적용하였다. Alam and Bhuiyan(1995)는 collocation 기법에 의한 댐 파괴류 해석을 실시하였으며, Zienkiewicz *et al.* (1996, 1999)은 특성선의 전과 양상을 고려하여 유체이송에 대한 보다 효율적인 알고리즘인 CBS (Characteristic Based Split)에 대해서 연구하였으며 Berger and Howington(2005)는 이송-확산식의 수치해석을 위해서 Streamline Upwind/Petrov-Galerkin(SU/PG) 기법을 적용하여 유체 플릭스와 질량보존 양상을 검토하였다. 그러나 위의 대부분의 연구는 선형 요소를 이용한 연구에 국한되었다.

국내에서 2차원 천수방정식에 관한 수치해석기법은 주로 유한차분기법을 중심으로 연구되어 왔는데 유한요소기법에 대한 연구로는 윤태훈(1982)이 각각 항만내 토사이동 예측과 단면 급확대에 의한 흐름영향을 고찰하기 위해서 2차원 천수방정식의 유한요소기법을 적용하였고, 윤용남과 박무중(1994)은 한강 하류부에 FESWMS 모형을 적용하여 해석한 예가 있다. 한건연 등(1996)은 개수로내의 점변 및 급변 부정류 해석을 위해서 감쇠형 유한요소모형을 적용하여 해석한 바 있고, 한건연과 김상호(2000)는 2차원 이송-확산해석을 위한 유한요소모형을 개발하고 이를 낙동강 유역에 적용하여 해석한 바 있다. 한건연 등(2003)은 하천에서의 흐름해석을 위해서 급변부정류에 대한 1차 요소를 이용한 SU/PG 유한요소법의 적용성을 검증하였고, 백창현(2006)은 3차원 유동 해석을 위한 SU/PG 기법의 적용과 그 해석 결과를 제시하였다.

국내외에서 현재 상용되고 있는 SMS, FESWMS 모형 등은 지형적 이산화와 정확도의 향상을 위해서 2차

요소를 사용함에도 불구하고 Bubnov-Galerkin 기법을 사용함으로써 발생하는 수치 문제를 보완하기 위해 혼합보간 기법을 이용하고 있다. 또한 수치적 발산을 해결하기 위해 개선된 가중함수를 도입하는 경우에도 모형의 수식화가 간단한 1차 요소를 적용한 연구가 대부분이다.

따라서 본 연구에서는 하천 흐름해석에서 복잡한 지형 조건과 불규칙한 경계조건을 가진 자연하천에서의 흐름을 모의하는데 적합한 2차 요소를 이용한 상향가중 유한요소모형을 개발하고 요소의 형태 및 요소의 차수에 따른 모형의 정확도와 기존 모형과의 비교를 통해 본 연구 개발 모형의 적용성을 검증하고자 한다.

2. 기본방정식

2.1 지배방정식

2차원 천수 자유수면 흐름을 나타내는 방정식은 3차원 Reynolds 방정식을 수심에 대해 적분하거나 (Weiyan, 1992), 하상과 자유수면에 의해 만들어지는 균일한 수직 수주에 질량 및 운동량 보존 원리를 적용함으로써 구할 수 있다(Daubert and Graffe, 1967; Van Rijn, 1990). 지배 방정식을 보존 형태로 나타내면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial y} \\ + g \frac{\partial(h^2/2)}{\partial x} = gh(S_{ox} - S_{fx}) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(v^2h)}{\partial y} + \frac{\partial(uvh)}{\partial x} \\ + g \frac{\partial(h^2/2)}{\partial y} = gh(S_{oy} - S_{fy}) \end{aligned} \quad (3)$$

여기에서 h 는 흐름 수심을 나타내고 u, v 는 x, y 방향으로의 유속을 나타낸다. 또한 S_{ox}, S_{oy} 는 x, y 방향으로의 바닥 경사 성분을 나타내고, S_{fx}, S_{fy} 는 x, y 방향으로의 수리학적 저항을 나타내며 g 는 중력 가속도 성분을 나타낸다. 만약 Manning 공식이 적용된다면 마찰 경사 성분은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$S_{fx} = \frac{n^2 u (u^2 + v^2)^{1/2}}{h^{4/3}}, \quad S_{fy} = \frac{n^2 v (u^2 + v^2)^{1/2}}{h^{4/3}} \quad (4)$$

또한 $S_{ox} = -\frac{\partial z_0}{\partial x}$, $S_{oy} = -\frac{\partial z_0}{\partial y}$ 이며, z_0 는 바닥 경사를 나타낸다. 만약 $p = uh$ 이고 $q = vh$ 라고 한다면 Eqs. (1)~(3)은 다음과 같이 다시 정리될 수 있다.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{pq}{h} \right) \\ + gh \frac{\partial z_0}{\partial x} + gn^2 \frac{p(p^2 + q^2)^{1/2}}{h^{7/3}} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{pq}{h} \right) \\ + gh \frac{\partial z_0}{\partial y} + gn^2 \frac{q(p^2 + q^2)^{1/2}}{h^{7/3}} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

2.2 가중함수의 수식화

유한요소기법에 있어 가중함수 W 의 선택에 따라 Galerkin 기법은 다양하게 분류할 수 있게 된다. 본 연구에서는 형상함수와 동일한 가중함수를 선택하는 대신 특성선의 전과양상을 고려하여 상향가중 메트릭스를 가지는 불연속 함수를 사용하였다.

SU/PG 유한요소기법은 2차원의 경우 Eq. (7)과 같은 형태의 가중 함수를 가진다.

$$N'_i = N_i + \alpha \Delta x W_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + \alpha \Delta y W_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \quad (8)$$

2차원의 x, y 방향 유체이송 메트릭스는 Eq. (8)과 같다.

$$A_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - U^2 & 2U & 0 \\ -UV & V & U \end{bmatrix}, \quad A_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -UV & V & U \\ c^2 - V^2 & 0 & 2V \end{bmatrix} \quad (9)$$

유체이송 메트릭스를 SU/PG 기법에 적용하면 Eqs. (9) and (10)과 같이 상향 가중항을 정리할 수 있다.

것이나, 본 연구에서는 적용성의 확장 및 계산의 정확성을 높이기 위해 다양한 차수의 요소를 검토하고 이중 2차 요소 및 2차 보간함수를 적용하여 모형을 개발하였다. 고차 요소를 이용하는 것은 실제적인 지형문제에 있어서 주어진 요소의 수에 대해 훨씬 정확한 해를 제공한다. 그러나 복잡성과 계산비용 및 시간 소요로 인해 일반적으로 3차 이상의 고차다항식을 통한 요소의 해석보다 2차 다항식을 이용한 Quadratic 요소 해석이 유리하며, 선형 요소보다 곡선 경계를 정확히 표현을 할 수 있는 장점을 가지고 있다(Allaire, 1985). Quadratic 요소 영향을 고려한 해석은 보간함수에 대해 2차 다항식을 이용함으로써 수행되는데 본 연구에서는 이를 위해서 삼각형 요소와 사각형 요소 및 혼합요소와 Quadratic 요소 등을 모두 고려하여 각각의 요소에 대한 보간함수를 도입하였고 지배방정식의 적분과정에서 필요한 Gaussian Quadrature 기법을 통해 2차 요소를 적용하였다.

3.1 보간함수 및 수치적분

3.1.1 2차 사각형 요소

3차 이상의 요소에서는 계산 시간상의 효율에 비해 정확도의 향상이 거의 이루어지지 않음으로 인해 본 연구에서는 고차 사각형 요소는 8절점 사각형 요소만을 고려하였다. 8절점 사각형 요소에 대한 보간함수는 Eq. (20)과 같다.

$$T^{(e)} = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi\eta + \alpha_5\xi^2 + \alpha_6\eta^2 + \alpha_7\xi^2\eta + \alpha_8\xi\eta^2 \quad (20)$$

이 보간함수를 형상함수를 포함하는 형태로 다시 나타내면 Eq. (21)과 같다.

$$T^{(e)} = N_1T_1 + N_2T_2 + N_3T_3 + N_4T_4 + N_5T_5 + N_6T_6 + N_7T_7 + N_8T_8 \quad (21)$$

형상함수의 유도는 연립방정식을 계산함으로써 구할 수 있으며, 또한 요소의 경계선상을 따라 제거된 함수의 조합을 이용함으로써 직접 구할 수도 있다. 각 절점에 대한 형상함수를 구해보면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$N_1 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(\xi+\eta+1) \quad N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \quad N_4 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi)$$

$$N_5 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \quad N_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\ N_7 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(\xi-\eta+1) \quad N_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi) \quad (22)$$

Fig. 1은 8절점 2차 사각형요소에 대한 전체 좌표계에서 국지 좌표계로의 변환 시스템과 보간함수를 나타내고 있다.

Fig. 1. Local Coordinates System and Interpolation Function for Quadrilateral Element

3.1.2 2차 삼각형 요소

6절점 삼각형 요소에 대한 보간 함수는 Eq. (23)과 같다.

$$T^{(e)} = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\eta^2 \quad (23)$$

보간 함수를 형상함수를 포함한 형태로 다시 나타내면 Eq. (24)와 같다.

$$T^{(e)} = N_1T_1 + N_2T_2 + N_3T_3 + N_4T_4 + N_5T_5 + N_6T_6 \quad (24)$$

Eqs. (23) and (24)를 이용해 형상함수를 구하면 Eq. (25)와 같이 나타낼 수 있다.

$$N_2 = 4\xi(1-\xi-\eta) \\ N_1 = (1-\xi-\eta)(1-2\xi-2\eta) \\ N_3 = \xi(2\xi-1) \quad N_4 = 4\xi\eta \\ N_5 = \eta(2\eta-1) \quad N_6 = 4\eta(1-\xi-\eta) \quad (25)$$

Fig. 2. Local Coordinates System and Interpolation Function for Triangular Element

3.1.3 수치적분

유한요소에서의 수치 적분법에는 다양한 기법이 있으나 본 연구에서는 가장 널리 사용되는 기법인 Gauss Quadrature 방법을 사용하였다. Gauss Quadrature 방법은 적분식을 각 요소의 수치 적분 점(Gauss Point)의 함수 값과 그 수치적분점에 해당하는 가중 값의 곱의 합으로 근사화하는 방법이다. 수치적분점의 수는 각 요소에 따라 다른데 3절점 삼각형 요소에 대한 수치적분점의 수는 3개, 6절점 삼각형 요소에 대한 수치적분점의 수는 7개 또는 16개를 일반적으로 사용한다. 본 연구에서는 2차 삼각형요소에는 7개 또는 16개를, 2차 사각형 요소에는 9개 또는 16개를 사용하였다. 이때 모든 수치 적분은 국지 좌표상에서 이루어진다. 수치 적분식은 Eq. (26)과 같다.

$$\int \int_{A_e} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = A_e \sum_{i=1}^k w_i f(\xi_i, \eta_i) \quad (26)$$

여기서, A 는 요소의 면적이고 k 는 Gauss Point의 수, w_i 는 Gauss point에 대한 가중 값이다.

4. 모형의 적용

본 연구에서 개발한 상향가중 2차원 유한요소모형의 적용성을 확인하기 위해서 타원형의 하상용기가 있는 하도에서의 흐름 해석과 U자형 수로에서의 흐름 해석의 경우에 대해서 모의하고 그 결과를 비교 분석하였다.

4.1 하상용기가 있는 하도

정수 중인 초기조건에서 경계조건의 변화로 흐름 상

태는 변하게 된다. 그러나 경계조건이 일정하게 유지된다면 흐름은 정상상태가 되며, 이러한 정상상태 수렴을 모의하는 것은 수치모형의 정확도를 검증하는 일반적인 방법이다. 이에 본 연구에서는 개발된 2차 요소 및 SU/PG 기법의 정확도를 검증하기 위해 해석해가 존재하는 타원형의 하상용기가 있는 하도에 적용하였다.

모의에 적용된 지형의 형상은 Eq. (27)과 같으며, 하도길이는 25m이고, 마찰이 없는 0.5m 폭의 직사각형 단면이다.

$$z_b(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 8m \\ 0.2 - 0.05(x - 10)^2 & \text{if } 8 < x < 12m \\ 0 & \text{if } x \geq 12m \end{cases} \quad (27)$$

Goutal과 Maurel (1997)은 흐름이 상류상태, 천이류 상태에 따른 실험조건을 제시하고, 모든 경우의 초기조건은 부여된 하류부 경계조건의 수위와 동일하게 지정하였다.

요소의 차수에 따른 모의결과를 비교하기 위해 Fig. 3과 같이 계산 격자를 선형 삼각형 요소 및 사각형 요소와 2차 삼각형 및 사각형 요소로 구성하였으며 삼각형 요소와 사각형 요소의 경우 차수에 상관없이 요소의 수를 동일하게 하였다. 선형 요소와 2차 요소의 검증과 더불어 본 연구에 사용된 SU/PG 기법의 검증을 위해 BG 기법을 사용하는 상용 2차원 하천해석 모형인 SMS의 RMA-2를 적용하여 비교 검토하였다. RMA-2 모의에는 2차 사각형 요소를 사용하였다.

4.1.1 상류 흐름해석

경계조건으로 2m의 수위를 하류단에 지정하고, 상류단에는 2.21m³/s의 일정 유량을 지정함으로써 흐름영

(a) Linear Triangular Element

(b) Linear Quadrilateral Element

(c) Quadratic Triangular Element

(d) Quadratic Quadrilateral Element

Fig. 3. Computational Elements

(a) Linear Triangular

(b) Linear Quadrilateral

(c) Quadratic Triangular

(d) Quadratic Quadrilateral

Fig. 4. Comparison of the Analytical and Numerical Solutions for Water Surface EL.

(a) Linear Triangular

(b) Linear Quadrilateral

(c) Quadratic Triangular

(d) Quadratic Quadrilateral

Fig. 5. Comparison of the Analytical and Numerical Solutions for Fr Number

(a) Linear triangular

(b) Linear quadrilateral

(c) Quadratic triangular

(d) Quadratic quadrilateral

Fig. 6. Comparison of the Analytical and Numerical Solutions for Fr Number

(a) Water surface EL.

(b) Fr number

(c) Discharge

Fig. 7. Comparison of the Analytical and RMA-2 Solutions

역은 상류로만 구성된다. Figs. 4~6은 수위, Froude 수, 유량에 대한 본 연구 개발 모형의 모의 결과를 적용된 요소의 형태 및 차수에 따라 도시한 것으로 그림상으로는 각 요소의 형태 및 차수에 따른 모의 결과의 정확성을 판단하기가 쉽지 않다. Fig. 7은 기존 상용 모형인 SMS의 RMA-2를 모의한 결과로 그림에서 보는 바와 같이 수위, Froude 수, 유량 모두 해석해와 상당한 차이를 보이는 것으로 나타났다. 이를 통해 본 연구에서 개발된 2차 요소를 적용한 SU/PG 유한요소모형이 기존 모형보다 정확함을 확인할 수 있었다.

앞서 요소의 차수에 따른 모의 결과를 Figs. 4~6에 도시하였으나 그림상으로는 모의 결과의 정확도를 판단하기 힘든 관계로 모의 결과를 정량적으로 판단하기 위해 다음과 같은 5가지의 오차를 사용하였다.

L_1 오차(절대값평균 오차) :

$$\|e\|_{L_1} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{\psi_{\max}} \sum_{i=1}^m |e_{i,j}| \right) \quad (28)$$

L_2 (제곱평균제곱근 오차) :

$$\|e\|_{L_2} = \left[\frac{1}{m} \left(\frac{1}{\psi_{\max}^2} \sum_{i=1}^m |e_{i,j}|^2 \right) \right]^{1/2} \quad (29)$$

L_{∞} error (최대 오차) :

$$\|e\|_{L_{\infty}} = \frac{1}{\psi_{\max}} \max |e_{i,j}| \quad (30)$$

평균제곱근(RMS) 오차 :

$$\|e\|_{RMS} = \left[\frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m |e_{i,j}|^2 \right) \right]^{1/2} \quad (31)$$

평균(Mean) 오차 : $\|e\|_{ME} = \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m |e_{i,j}| \right)$ (32)

여기서, e 는 근사치 ψ 와 정확치 $\hat{\psi}$ 의 차이 ($e_{i,j} = \psi_{i,j} - \hat{\psi}_{i,j}$), m 은 자료수, ψ_{\max} 는 ψ_i 의 최대값을 나타낸다.

Tables 1~3은 요소의 형태 및 차수에 따른 수위, Froude 수 그리고 유량의 오차를 나타내고 있다. Table 1은 해석해에 대한 수위 오차로 표에서 보는 바와 같이 모든 오차에 대해서 같은 차수의 경우 삼각형 요소에 비해 사각형 요소의 경우가 오차가 작은 것을 알 수 있었고, 2차 요소가 선형 요소에 비해 오차가 작은 것을 확인할 수 있었다. 평균 오차의 경우 선형 삼각형 요소 대비 선형 사각형 요소의 오차가 약 4 % 정도 작게 나

타나는 것을 확인할 수 있었고, 2차 삼각형 요소에 비해 2차 사각형 요소의 평균 오차가 57.3 % 정도 개선된 것을 확인할 수 있었다. 또한 각 요소의 차수에 따른 평균 오차를 비교해 보면 삼각형 요소의 경우 선형 요소에 비해 2차 요소의 평균 오차가 11.3 % 정도 작게 나타났으며 사각형 요소의 경우 선형 요소에 비해 2차 요소의 평균 오차가 59.8% 정도 작게 나타나고 있음을 확인할 수 있었다. 또한 오차가 가장 큰 선형 삼각형 요소에 비해 2차 사각형 요소의 평균 오차가 약 96.2 % 정도 개선된 것을 알 수 있었으며 기존의 상용 모형인 RMA-2 모형과 비교해서 본 연구 개발 모형의 수위에 대한 오차가 요소의 형태 및 차수에 상관없이 상당히 작게 나타나고 있음을 확인할 수 있었다.

Table 2는 해석해에 대한 Froude 수의 오차로 수위 오차의 결과와 동일하게 같은 차수의 경우 선형 요소에 비해 사각형 요소의 오차가 작게 나타났으며, 선형 요소에 비해 2차 요소의 오차가 작게 나타났다. 평균 오차의 경우 오차가 가장 큰 선형 삼각형 요소의 비해 2차 사각형 요소의 평균 오차가 약 48.96 % 개선된 것을 확인할 수 있었다.

Table 3은 유량에 대한 오차로 앞선 모의 결과와 마찬가지로 2차 사각형 요소의 오차가 가장 작게 나타나고 있음을 확인할 수 있었다. 평균 오차의 경우 선형 삼각형 요소 대비 선형 사각형 요소의 오차가 약 3 % 정도, 2차 삼각형 요소 대비 2차 사각형 요소의 오차가 85.8 % 정도 개선된 것을 확인할 수 있었다. 또한 각 요소의 차수에 따른 평균 오차를 비교해 보면 선형 삼각형 요소 대비 2차 삼각형 요소가 42.5 % 정도, 선형 사각형 요소 대비 2차 사각형 요소의 평균 오차가 91.7 % 정도 작게 나타나고 있음을 확인할 수 있었다. 또한 평균 오차의 경우 오차가 가장 큰 선형 삼각형 요소에 비해 2차 사각형 요소가 약 91.85 % 개선된 것을 알 수 있다. 이를 통해 2차 요소가 선형 요소에 비해 모의 결과가 정확함을 알 수 있었다. 또한 2차 요소를 사용하는 기존의 상용 모형인 RMA-2 모형에 비해서도 본 연구 개발 모형이 우수함을 확인할 수 있었다.

4.1.2 천이류 흐름해석

모의를 위한 경계조건으로 0.406m의 수위를 하류단에 지정하고, 상류단에는 0.765m³/s 유량을 지정하였으며, 이 경우 용기된 하상을 넘어서면서 사류가 발생한다. 모의에 적용된 요소의 형태 및 차수는 Fig. 3의 상류 흐름해석과 같은 요소망을 적용하였다.

Figs. 8(a)~8(c)는 수위, Froude 수 그리고 유량에 대한 본 연구 개발 모형의 모의 결과를 적용된 요소의

Table 1. Comparison of Stage Error Depending on Element Type

Cases of Elements	L_1 Error	L_2 Error	L_∞ Error	RMS Error	Mean Error
Linear Triangular	1.35×10^{-4}	3.07×10^{-4}	2.10×10^{-3}	6.95×10^{-4}	2.21×10^{-4}
Linear Quadrilateral	1.04×10^{-4}	3.00×10^{-4}	2.02×10^{-3}	6.00×10^{-4}	2.08×10^{-4}
Quadratic Triangular	9.81×10^{-5}	1.84×10^{-4}	4.00×10^{-4}	3.67×10^{-4}	1.96×10^{-4}
Quadratic Quadrilateral	4.18×10^{-5}	1.63×10^{-4}	3.03×10^{-4}	3.25×10^{-4}	8.36×10^{-5}
RMA-2	8.86×10^{-3}	1.65×10^{-2}	5.84×10^{-2}	3.40×10^{-2}	1.82×10^{-2}

Table 2. Comparison of Froude Number Error Depending on Element Type

Cases of Elements	L_1 Error	L_2 Error	L_∞ Error	RMS Error	Mean Error
Linear Triangular	4.56×10^{-4}	4.71×10^{-4}	1.17×10^{-3}	2.98×10^{-4}	2.88×10^{-4}
Linear Quadrilateral	4.33×10^{-4}	4.48×10^{-4}	1.14×10^{-3}	2.83×10^{-4}	2.74×10^{-4}
Quadratic Triangular	2.49×10^{-4}	2.93×10^{-4}	6.72×10^{-4}	1.85×10^{-4}	1.58×10^{-4}
Quadratic Quadrilateral	2.32×10^{-4}	2.34×10^{-4}	2.82×10^{-4}	1.48×10^{-4}	1.47×10^{-4}
RMA-2	1.41×10^{-2}	2.77×10^{-2}	1.01×10^{-1}	1.62×10^{-2}	8.23×10^{-3}

Table 3. Comparison of Discharge Error Depending on Element Type

Cases of Elements	L_1 Error	L_2 Error	L_∞ Error	RMS Error	Mean Error
Linear Triangular	5.48×10^{-5}	5.79×10^{-5}	1.06×10^{-4}	2.61×10^{-4}	2.33×10^{-4}
Linear Quadrilateral	5.15×10^{-5}	5.78×10^{-5}	9.50×10^{-5}	2.56×10^{-4}	2.28×10^{-4}
Quadratic Triangular	3.02×10^{-5}	3.32×10^{-5}	7.69×10^{-5}	1.47×10^{-4}	1.34×10^{-4}
Quadratic Quadrilateral	4.23×10^{-6}	5.62×10^{-6}	1.13×10^{-6}	2.48×10^{-5}	1.90×10^{-5}
RMA-2	1.56×10^{-4}	3.51×10^{-4}	1.65×10^{-3}	1.55×10^{-3}	6.89×10^{-4}

(a) Water Surface EL.

(b) Froude Number

(c) Unit Discharge

(d) Zoom A

Fig. 8. Comparison of the Analytical and Numerical Solutions

형태 및 차수에 따라 도시한 것이고 Fig. 8(d)는 유량 결과 중 일부분을 확대한 그림이다.

Fig. 8(a)는 본 개발 모형의 수위에 대한 계산 결과를 나타낸 그림으로 요소의 차수에 따른 모의 결과의 정확도를 명확하게 파악하기는 어려웠으나 선형 요소에 비해 2차 요소의 결과가 해석해와 더 잘 일치함을 확인할 수 있었고 2차 요소를 사용한 기존의 상용 모형인 RMA-2와 비교해서는 본 연구 개발 모형이 모든 차수에 대해서 RMA-2 모형에 비해 계산 결과가 정확함을 확인할 수 있었다. Fig. 8(b)는 Froude 수에 대한 계산 결과로 수위에 대한 계산 결과와 동일하게 선형 요소에 비해 2차 요소 결과의 정확도가 향상되었음을 확인할 수 있었고 RMA-2 모형과 비교해서 본 개발 모형이 정확함을 확인할 수 있었다. Fig. 8(c)와 일부를 확대한 그림인 Fig. 8(d)에서는 유량에 대한 모의 결과로 수위와 Froude 수에 비해 요소의 차수에 따른 모의 결과의 정확도를 그림상으로도 명확하게 판단할 수 있는데 앞선 두 결과와 마찬가지로 선형 요소에 비해 2차 요소가 해석해와 더 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있었다.

요소의 차수에 따른 모의 결과를 정량적으로 판단하기 위해 앞서 제시한 오차를 사용하여 Table 4에 나타내었다. Table 4에서 보는 바와 같이 같은 차수의 요소인 경우 삼각형 요소에 비해 사각형 요소의 계산 결과가 더 정확하게 나타났고 차수에 따른 정확도 면에서는 선형 요소에 비해 2차 요소의 계산 결과가 정확한 것으로 나타났다. 평균 오차의 경우 선형 삼각형 요소 대비 선형 사각형 요소의 오차가 약 48.4 % 정도 작게 나타

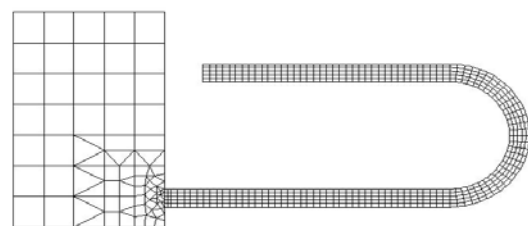
나는 것을 확인할 수 있었고, 2차 삼각형 요소에 비해 2차 사각형 요소의 평균 오차가 53.6 % 정도 개선된 것을 확인할 수 있었다. 또한 각 요소의 차수에 따른 평균 오차를 비교해 보면 삼각형 요소의 경우 선형 요소에 비해 2차 요소의 평균 오차가 92.2 % 정도 작게 나타났으며 사각형 요소의 경우 선형 요소에 비해 2차 요소의 평균 오차가 93.0 % 정도 작게 나타나고 있음을 확인할 수 있었다. 또한 평균 오차의 경우 오차가 가장 큰 선형 삼각형 요소에 비해 2차 사각형 요소의 평균 오차가 약 96.4 % 개선된 것을 알 수 있었으며 이를 통해 2차 요소가 선형 요소에 비해 모의 결과가 정확함을 알 수 있었다. 또한 2차 요소를 사용하는 기존의 상용 모형인 RMA-2 모형에 비해서도 본 연구 개발 모형이 우수함을 확인할 수 있었다.

4.2 U자형 수로에서의 흐름

본 연구에서 개발된 모형의 요소의 차수에 따른 결과를 검토하기 위해 Bell *et al.*(1992)에 의해 개발된 U자형 수로에서의 댐 붕괴 실험모형을 모의에 이용하였으며 모의 결과를 비교 검토하기 위해 Fig. 9(b)과 같은 요소망을 사용하였다. 선형 삼각형 요소와 선형 사각형 요소의 혼합망, 2차 삼각형 요소와 2차 사각형 요소의 혼합망으로 구성하여 모의를 실시하였다. 이때 모의에 적용된 요소의 개수는 모두 같게 하였다. Stockstill and Berger (1994)에 의해 수행된 실험 결과와의 비교를 통해 본 연구에서 개발된 모형의 결과를 검토하였다. 실험에 사용된 모형의 제원 및 규칙은 Fig. 9(a)와 같으며

Table 4. Comparison of Discharge Error Depending on Element Type

Cases of Elements	$L_1 Error$	$L_2 Error$	$L_\infty Error$	RMS Error	Mean Error
Linear Triangular	2.08×10^{-3}	3.31×10^{-3}	8.09×10^{-3}	5.13×10^{-2}	3.22×10^{-3}
Linear Quadrilateral	1.08×10^{-3}	1.30×10^{-3}	3.74×10^{-3}	2.00×10^{-2}	1.66×10^{-3}
Quadratic Triangular	1.63×10^{-4}	2.49×10^{-4}	8.65×10^{-4}	3.83×10^{-3}	2.50×10^{-4}
Quadratic Quadrilateral	7.61×10^{-5}	8.03×10^{-5}	1.49×10^{-4}	1.23×10^{-3}	1.16×10^{-4}
RMA-2	2.27×10^{-2}	6.58×10^{-2}	2.60×10^{-1}	1.02×100	3.51×10^{-2}



(a) Details of Dam Break Test

(b) Computational Mesh

Fig. 9. Details of Test Flume and Numerical Model Computational Mesh for Dam Break

저수지와 U자형 수로가 연결된 형상을 하고 있으며 실험장치는 Plexi Glass로 만들어졌다. Fig. 9(b)에서와 같이 댐이 위치한 단면 축소부에 대해서는 요소망의 해상도를 높여 해의 정확도를 높였다.

저수지의 초기 수위는 0.1898 m 이고 U자형 수로의 초기 수위는 0.0762 m로 모의하였다. 초기에 유속이 0 인 상태에서 댐의 붕괴가 시작되었고 계산 시간간격은 0.05초로 모의를 수행하였다. 실험 결과와의 비교를 위해 관측치가 있는 3개의 단면을 선택하였다. Station 4는 곡선부의 중앙으로 수로의 중심선을 따라 댐으로부터의 거리는 6.0 m이고, Station 6은 곡선부의 끝 지점으로 댐으로부터의 거리는 7.62 m이다. Station 8은 직선부 구간으로 댐으로부터의 거리는 9.97 m이다.

각 단면에서 요소의 차수에 따른 모의 결과를 수로의 내·외측 지점의 실험결과와 비교 검토하였다.

Figs. 10~12는 각 단면의 내·외측 지점에 대한 실험결과와 요소의 차수에 따른 모의 결과를 비교한 그림이다. Fig. 10은 Station 4의 내·외측 수심에 대한 실험결과와 요소의 차수에 따른 모의 결과를 나타낸 것으로 그림으로부터 댐 붕괴와의 선단부의 도달 시간을 알 수 있는데 내측 지점에 대해서 실험결과에 대한 도달 시간은 3.45초이고 선형 요소의 모의 결과에 대한 도달 시간은 3.30초, 2차 요소의 모의 결과에 대한 도달 시간은 3.40초로 선형 요소의 모의 결과에 비해 2차 요소의 모의 결과가 실측치와 더 잘 일치하는 것으로 나타났다. 외측 지점의 경우 실험결과에 대한 도달 시간은 3.45초이고 선형 요소의 모의 결과에 대한 도달 시간은 3.3초, 2차 요소의 모의 결과에 대한 도달 시간은 3.40초로 내측 지점에 대한 결과와 마찬가지로 선형 요소에 비해 2차 요소의 모의 결과가 더 잘 일치하고 있는 것으로 나타났다.

Fig. 11은 Station 6의 내·외측에 대한 실험결과와 요소의 차수에 따른 모의 결과를 나타낸 것으로 내측 지점에 대한 실험결과의 도달 시간은 4.35초이고 선형

요소의 모의 결과에 대한 도달시간은 4.15초, 2차 요소의 모의 결과에 대한 도달시간은 4.30초로 선형 요소의 모의 결과에 비해 2차 요소의 모의 결과가 실험결과와 더 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 또한 외측 지점에 대한 실험결과의 도달 시간은 4.25초이고 선형 요소의 모의 결과의 도달 시간은 4.15초, 2차 요소의 모의 결과의 도달 시간은 4.30초로 내·외측 지점 모두 선형 요소의 모의 결과에 비해 2차 요소의 모의 결과가 실험결과와 더 잘 일치하고 있는 것으로 나타났다. Fig. 12는 Station 8의 내·외측에 대한 실험결과와 요소의 차수에 따른 계산결과를 나타낸 것으로 내측 지점에 대한 실험결과의 도달 시간은 5.85초이고 선형 요소의 모의 결과의 도달 시간은 5.70초, 2차 요소의 계산결과의 도달 시간은 5.80초로 나타났다. 또한 외측 지점에 대한 실험결과의 도달 시간은 5.68초이고 선형 요소의 모의 결과의 도달 시간은 5.70초, 2차 요소의 계산결과의 도달 시간은 5.80초로 내측 지점에서는 선형 요소에 비해 2차 요소의 모의 결과가 실험 결과와 잘 일치한 반면 외측 지점에서는 선형 요소의 모의 결과가 2차 요소의 모의 결과에 비해 좀 더 잘 일치한 것으로 나타났다. 그러나 Station 8의 외측 지점을 제외한 나머지 지점에서는 2차 요소의 결과가 선형 요소의 결과보다 실험 결과와 잘 일치함을 확인할 수 있었다.

Figs. 11~12에서 알 수 있듯이 Station 6과 Station 8에서 실험결과에 대한 댐 붕괴와의 도달 시간이 내측 지점에 비해서 외측 지점이 짧은 것으로 나타나고 있는데 이는 일반적인 만곡부의 최대 유속선은 만곡부의 유입부에서 유속이 만곡부를 따라 하류로 내려갈수록 외측으로 편위하는 현상에 기인한 것으로 판단된다. 본 연구의 모의 결과에 대한 댐 붕괴와의 도달 시간은 내·외측 모두 같은 것으로 나타나고 있는데 이는 본 개발 모형의 지배 방정식에서 만곡부의 영향을 고려하지 않은 것으로 판단되며 향후 만곡부의 영향을 고려한 항을 추가하고자 한다.

Fig. 10. Change of Flow Depth at Station 4

Fig. 11. Change of Flow Depth at Station 6

Fig. 12. Change of Flow Depth at Station 8

Table 5. Correlation Coefficients at Station

Element Type	Stations	Station 4		Station 6		Station 8	
		Inner	Outer	Inner	Outer	Inner	Outer
Linear Elements		0.961	0.952	0.942	0.957	0.871	0.815
Quadratic Elements		0.980	0.986	0.948	0.994	0.932	0.824

요소의 차수에 따른 모의 결과를 좀 더 정량적으로 평가하기 위해 각 Station의 내·외측 지점의 실험 결과와 모의 결과에 대해 Eq. (33)과 같은 상관계수를 이용하였다. 상관계수는 두 값 간의 관계의 정도와 방향을 하나의 수치로 요약해 주는 지수로 상관계수의 절대값이 높을수록 두 값 간의 관계가 높다고 할 수 있다.

$$CC = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sigma_x \sigma_y} \quad (33)$$

여기서 n 은 변량의 개수, x_i, y_i 는 변량, \bar{x}, \bar{y} 는 각 변량의 평균, σ_x, σ_y 는 각 변량의 표준 편차이다. Table 5는 각 Station의 내·외측 지점의 실험 결과와 요소의 차수에 따른 모의 결과의 상관계수를 나타낸 것으로 표에

서 보는 바와 같이 Station 4의 내·외측 지점에서 실험 결과와 선형 요소의 모의 결과와의 상관계수는 각각 0.961, 0.952이고 2차 요소의 모의 결과와의 상관계수는 0.980, 0.986으로 선형 요소의 모의 결과에 비해 2차 요소의 모의 결과의 상관계수가 높게 나타나고 있음을 확인할 수 있었다. Station 6과 Station 8의 내·외측 지점에서도 표에서 보는 바와 같이 실험 결과와 2차 요소의 모의 결과의 상관계수가 선형 요소와의 상관계수에 비해 크게 나타나고 있음을 확인할 수 있었다. 이를 통해 2차 요소의 모의 결과가 선형 요소의 모의 결과에 비해 실측치와 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있었다. 이로써 기존 모형으로는 요소망의 생성의 어려움으로 인해 자연하도에 적용이 제한적이었으나 본 연구에서 개발된 혼합망 요소로 인해 자연하도에서의 SU/PG 기법의 적용이 효과적으로 수행될 수 있을 것으로 판단된다.

5. 결 론

본 연구에서는 자연하천 지형을 효과적으로 반영하기 위해 2차 요소를 이용한 SU/PG (Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin) 유한요소모형을 개발하고 하상 용기가 있는 하도 및 U자형 수로에 모의를 실시하여 요소의 차수에 따른 모의 결과를 검토하였다. 주요 연구 결과를 요약하면 다음과 같다.

- (1) 본 연구에서는 2차원 천수방정식의 수치해를 구하기 위해서 불규칙한 하도 양상의 효율적인 처리, 상류-사류의 천이류 계산 등을 고려하여 SU/PG를 적용한 유한요소해석에 의한 수치모형을 개발하였다. 또한 복잡한 지형 조건과 불규칙한 경계조건을 가진 자연하천에서의 지형적 이산화와 계산의 정확도를 높이기 위해서 2차 요소 및 2차 보간 함수를 도입하여 모형을 개발하고 요소의 차수에 따른 모의 결과를 검토하였다.
- (2) 개발된 모형을 하상 용기가 있는 하도에 대해 적용하고 그 결과를 적용된 요소의 차수에 따라 비교·검토한 결과 같은 차수의 요소의 경우 사각형 요소가 삼각형 요소에 비해 모의 결과가 우수한 것을 확인할 수 있었고, 2차 요소가 선형 요소에 비해 정확도가 향상된 것을 확인할 수 있었다. 또한 같은 차수를 이용했음에도 SU/PG를 적용한 본 연구개발 모형이 BG 기법을 이용한 기존의 상용 모형인 RMA-2에 비해 모의 결과가 우수한 것을 확인할 수 있었다.
- (3) U자형 수로에 대해 선형 혼합요소망과 2차 혼합요소망에 대해 모의를 수행하여 실험치와 비교 분석한 결과, 2차 혼합망 요소가 선형 혼합망 요소에 비해 실측치와 더 잘 일치함을 확인할 수 있었고 이를 통해 선형 요소에 비해 2차 요소의 모의 결과가 정확함을 확인할 수 있었다. 향후 본 연구에서 개발된 SU/PG 기법을 적용한 유한요소모형을 이용하면 효율적인 요소망의 구성과 함께 댐 붕괴류 및 자연하도에서의 천이류 해석이 가능할 것으로 판단된다.

감사의 글

본 연구는 과학기술부가 출연하고 수자원의 지속적 확보기술개발사업단에서 위탁 시행한 21세기 프론티어 연구개발사업중 “RAM2 모형의 확장개발 및 상용화”(과제번호2-3-3)에 의해 수행되었습니다.

참 고 문 헌

- 백창현 (2006). 하천흐름해석을 위한 3차원 상향가중 유한요소모형의 개발. 박사학위논문, 경북대학교, pp. 6-11.
- 윤용남, 박무종 (1994). “FESWMS-2DH에 의한 한강 하류부의 수리특성 분석.” **대한토목학회논문집**, 제14권, 제4호 pp. 847-857.
- 윤태훈 (1982). “유한요소법에 의한 항만에서의 토사이동 추정모형.” **대한토목학회논문집**, 제2권, 제2호, pp. 847-857.
- 한건연, 김상호 (2000). “Petrov-Galerkin 기법에 의한 하천에서의 이송-확산 해석.” **대한토목학회논문집**, 제20권, 제2-B호, pp. 45-53.
- 한건연, 박경욱, 백창현 (2003). “SU/PG 기법에 의한 하천흐름의 유한요소해석 : II. 적용.” **대한토목학회논문집**, 제24권, 제3B호, pp. 193-199.
- 한건연, 이종태, 박재홍 (1996). “개수로내의 점변 및 급변 부정류에 대한 유한요소해석: I. 이론 및 수치안정성 해석.” **한국수자원학회논문집**, 제29권, 제4호, pp. 167-178.
- Alam, M.M. and Bhuiyan, M.A. (1995). “Collocation finite element simulation of dam-break flows.” *Journal of Hydraulics Engineering*, ASCE, Vol. 121, No. 2, pp. 118-128.
- Allaire, P.E. (1985). *Basis of the finite element method*, Ph.D. dissertation, University of Virginia, pp. 8-24.
- Bell, S.W., Elliot, R.C. and Chaudhry, M.H. (1992). “Experimental results of two-dimensional dam-break flows.” *Journal of Hydraulics Research* Vol. 30, No. 2, pp. 225-252.
- Berger, R.C. (1993). *A Finite Element Scheme Shock Capturing*, Technical Report HL-93-12, pp. 1-8.
- Berger, R.C. and Howington, S.E. (2005). “Discrete Fluxes and Mass Balances in Finite Elements.” *Journal of Hydraulics Engineering*, Vol. 128, pp. 97-92.
- Daubert, A. and Graffe, O. (1967). *Quelques aspects des écoulements presque horizontaux a deux dimensions en plan non permants application aux estuaires.*, La Houille Blanche, No. 8, pp. 847-860.
- Dupont, T. (1973). “Galerkin methods for first-order hyperbolic : An example.” *SIAM Journal of*

- Numerical Analysis*, Vol. 10, pp. 890-899.
- Gee, D.M. and MacArthur, R.C. (1981). "Evaluation and Application of the Generalized Finite Element Hydrodynamics Model, RMA-2." *Two-Dimensional Modeling*, Hydrologic Engineering Center, pp. 97-113.
- Goutal, N. and Maurel, F. (1997). "High resolution schemes for hyperbolic conservation laws." *Journal of Computational Physics*, Vol. 49, No.3, pp. 357-393.
- Gray, W.G. (1980). "Do Finite Element Models Simulate Surface Flow?" *Finite Elements in Water Resources III*, Univ. of Mississippi Press, pp. 122-136.
- Hicks, F.E. and Steffler, P.M. (1992). "Characteristic dissipative Galerkin scheme for open channel flow." *J. of Hyd. Eng.*, ASCE, Vol. 118, No. 2, pp. 337-352.
- Katopodes, N.D. (1984). "A dissipative Galerkin scheme for open-channel flow." *Journal of Hydraulics Engineering*, ASCE, Vol. 110, No. 4, pp. 450-466.
- King, I.P. and Norton, W.R. (1978). "Recent application of RMA's finite element models for two-dimensional hydrodynamics and water quality." *Finite Element in Water Resources*, Pentech Press, pp. 81-99.
- Lee, J.K. and Froehlich, D.C. (1986). *Review of Literature on the Finite Element Solution of the Equations of Two-Dimensional Flow in the Horizontal Plane*, U. S. Geological Survey Circular 1009, pp. 1-65.
- Norton, W.R. (1980). "EBMUD Hydrodynamic and Water Quality Models for San Francisco Bay." *Resources Management Associates*, pp. 1-260.
- Stockstill, R.L. and Berger, R.C. (1994). *A Two-Dimensional Flow Model for High-Velocity Channels*, Technical Report REMR-HY-12, pp. 1-11.
- Van Rijn, L.C. (1990). *Principles of fluid flow and surface waves in rivers, estuaries, seas, and oceans.*, Aqua Publications, Amsterdam, The Netherlands, pp. 5-35.
- Walters R.A. (1983). "Numerically induced oscillations in finite element approximations to shallow water equations." *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 3, pp. 591-604.
- Walters, R.A. and Cheng, R.T. (1978). "A Two-Dimensional Hydrodynamic Model of a Tidal Estuary." *Finite Elements in Water Resources*, Pentech, pp. 3-21.
- Weiyang, T. (1992). *Shallow water hydrodynamics*, Elsevier Oceanography Series, pp. 1-37.
- Zienkiewicz, O.C. and Codina, R. (1996). "A general algorithm for compressible and incompressible flow-Part I. The split, characteristic based scheme." *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 20, pp. 869-885.
- Zienkiewicz, O.C., Nithiarasu, P., Codina, R. and Vazquez, M. (1999). "The characteristic based split procedure: An efficient and accurate algorithm for fluid problems." *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 31, pp. 359-392.

논문번호: 09-051	접수: 2009.05.07
수정일자: 2009.07.20/09.30	심사완료: 2009.09.30