DOI: 10.3745/KIPSTA.2009.16A.6.501

상호연결망 폴디드 하이퍼-스타 FHS($2n$,n)의 대칭성과 임베딩 알고리즘

김 종 석[†] · 이 형 옥[††] · 김 성 원[†††]

요 약

본 논문에서는 상호연결망 폴디드 하이퍼-스타 연결망 FHS($2n$,n)이 노드 대칭임을 증명하고, 이분할 연결망임을 증명한다. FHS($2n$,n)이 오드 연결망 O_{n+1}에 연장율 2, 밀집율 1로 임베딩 가능함을 보이고, 오드 연결망 O_d이 FHS($2d$,d)에 연장율 2, 밀집율 1로 임베딩 가능함을 보인다. 또한 $2n$×n 토러스가 FHS($2n$,n)에 연장율 2, 밀집율 2로 임베딩 가능함을 보인다.

키워드 : 폴디드 하이퍼-스타 연결망, 노드 대칭성, 이분할 연결망, 임베딩

Symmetry and Embedding Algorithm of Interconnection Networks Folded Hyper-Star FHS($2n$,n)

Kim Jongseok[†] · Lee Hyeongok[††] · Kim Sung Won[†††]

ABSTRACT

In this paper, we prove that folded hyper-star network FHS($2n$,n) is node-symmetric and a bipartite network. We show that FHS($2n$,n) can be embedded into odd network O_{n+1} with dilation 2, congestion 1 and O_d can be embedded into FHS($2n$,n) with dilation 2 and congestion 1. Also, we show that $2n$×n torus can be embedded into FHS($2n$,n) with dilation 2 and congestion 2.

Keywords : Folded Hyper-Star Network, Node Symmetry, Bipartite Network, Embedding

1. 서 론

최근 이미지 파일, 동화상, 실시간 처리 등의 많은 응용 분야에서 고성능의 컴퓨터에 대한 요구가 증가하고 있다. 고성능을 얻기 위한 방법으로 병렬처리에 대한 필요성이 크게 증가하여 병렬컴퓨터에 대한 연구가 많이 진행되고 있다. 병렬처리 컴퓨터는 다중프로세서(multiprocessor) 시스템과 다중컴퓨터(multi-computer) 시스템으로 분류한다. 다중컴퓨터 시스템은 자신의 기억장치를 갖는 프로세서들을 상호연결망(interconnection network)으로 연결하고, 프로세서들 간의 통신은 상호연결망을 통하여 메시지 전송 방식으로 구동되는 시스템이다. 다중컴퓨터 시스템에서 상호연결망은 전체 시스템의 성능과 시스템의 확장성에 큰 영향을 미친다. 널리 알려진 상호연결망으로 메쉬, 하이퍼큐브, 스타 그래프 등이 있다. 상호연결망을 평가하는 척도는 분지수(degree), 연결도(connectivity), 고장허용도(fault tolerance), 대칭성(symmetric), 지름(diameter), 망비용(network cost), 방송(broadcasting), 임베딩(embedding) 등이 있다.

하이퍼큐브는 노드 및 에지 대칭이고, 임베딩 관점에 있어서 링, 트리, 메쉬 등과 같은 다른 연결망 구조들이 효율적으로 임베딩 될 수 있다는 장점이 있다. 그렇지만 노드 개수의 증가에 따른 분지수의 증가로 인해 네트워크의 망비용이 증가하는 단점이 있다. 이러한 단점을 개선하고자 하이퍼-스타(hyper-star) 연결망[10, 17], 오드(odd)연결망[8] 등이 제안되었다. 노드의 분지수가 정규형 형태를 갖는 하이퍼-스타 연결망 $HS(2n,n)$은 하이퍼큐브와 스타(star) 연결망의 성질을 가지고 있으면서, 같은 노드수를 갖는 하이퍼큐브보다 망비용(network cost)이 더욱 우수하고, 차원이 증가함에 따라 노드수가 급격하게 증가하는 스타 연결망의 단점을 개선한 연결망으로 [3-4, 9-10, 12-14, 17]에서 다양한 성질들이 분석되었다. 이러한 하이퍼-스타 연결망의 지름을 1/2 개선한 폴디드(folded) 하이퍼-스타가 제안되었는데, 폴

† 정 회 원 : 영남대학교 전자정보공학부 연구교수
†† 종신회원 : 순천대학교 컴퓨터교육과 부교수(교신저자)
††† 정 회 원 : 영남대학교 전자정보공학부 부교수
논문접수 : 2009년 6월 11일
심사완료 : 2009년 9월 13일

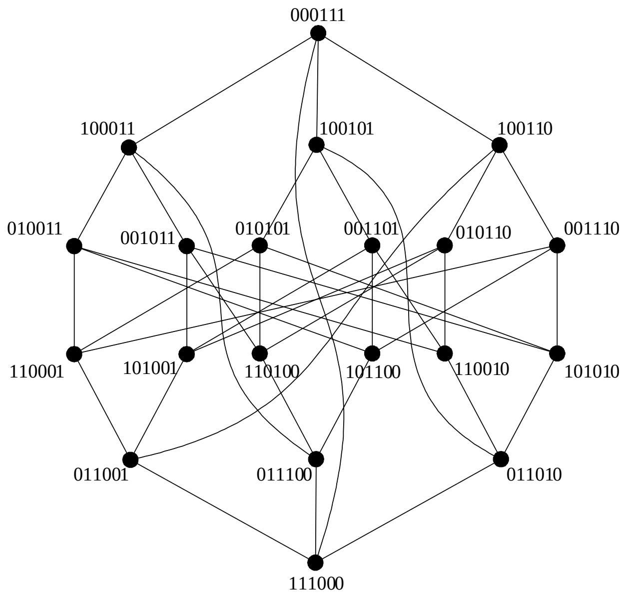
디드 하이퍼-스타 연결망은 하이퍼-스타 연결망의 각 노드에 한 개의 부가적인 에지를 추가한 연결망으로, 여러 하이퍼큐브군의 상호연결망보다 망비용이 우수하다[10, 17].

대칭성은 상호연결망을 평가하는 아주 중요한 요소 중의 하나이다[1]. 대칭성이 있는 연결망은 노드의 부하를 다른 노드들에게 동일하게 분산할 수 있으므로 부하가 한 노드에 집중되지 않으며, 모든 노드가 같은 역할을 수행하므로 모든 노드에 동일한 알고리즘을 적용할 수 있게 한다. 다양한 연결망 구조에서 여러 가지 문제들을 풀기 위해 병렬 알고리즘들이 설계되었다. 이 알고리즘들을 원래와는 다른 연결망 구조에서 실행시킬 수 있는 방법이 있다면 이는 이미 개발된 알고리즘을 효율적으로 사용할 수 있는 장점으로 인해 알고리즘 분야에서 의미 있는 연구이다. 이러한 연구방법 중 널리 사용되는 것으로 임베딩이 있다[6-7, 9, 11, 16]. 임베딩은 한 연결망의 프로세서와 통신링크를 다른 연결망의 프로세서와 통신링크들로 사상(mapping)시키는 방법을 일컫는다.

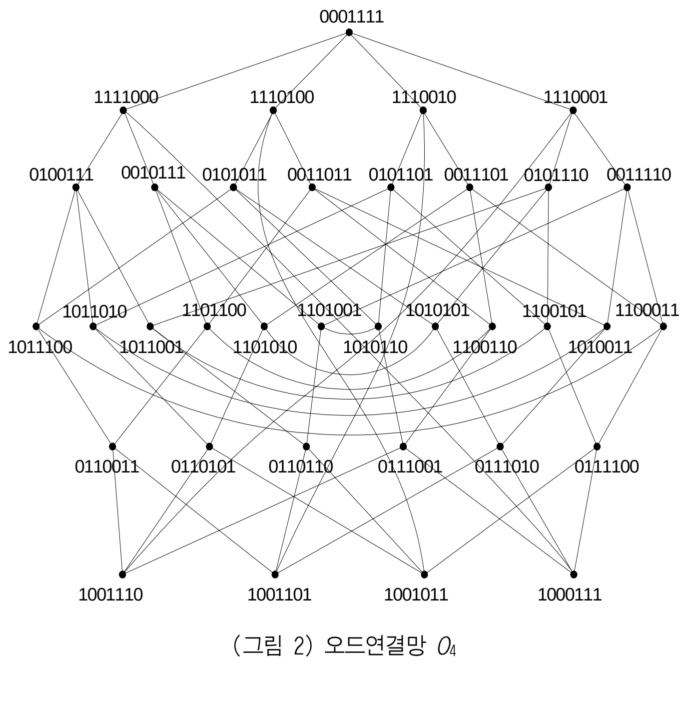
본 논문에서는 상호연결망 폴디드 하이퍼-스타 연결망 FHS($2n,n$)이 노드 대칭임을 증명하고, 이분할 연결망임을 증명한다. FHS($2n,n$)이 오드 연결망 O_{n+1}에 연장율 2, 밀집율 1로 임베딩 가능함을 보이고, 오드 연결망 O_d이 FHS($2d,d$)에 연장율 2, 밀집율 1로 임베딩 가능함을 보인다. 또한 $2n\times n$ 토러스가 FHS($2n,n$)에 연장율 2, 밀집율 2로 임베딩 가능함을 보인다.

2. 관련 연구

폴디드 하이퍼-스타 연결망 FHS($2n,n$)는 $\binom{2n}{n}$개의 노드로 구성된 연결망으로 각 노드는 $2n$개의 비트스트링 $b_1b_2 \ldots b_i \ldots b_{2n}$으로 표현되며, $|1|=|0|=n$ 이다. $|x|$는 x의 개수를 의미한다. b_1과 b_i가 보수일 때 b_1과 b_i를 교환하는 치환을 σ_i라 하면, $V=\sigma_i(U)$인 두 노드 $U=b_1b_2 \ldots b_i \ldots b_{2n}$와 $V=b_ib_2 \ldots b_1 \ldots b_{2n}$ 사이에 에지가 발생하는데 이 에지를 i-에지라고 한다. 노드 U를 보수 노드 $\overline{U}$로 변환하는 치환을 σ_c라 하면, 보수 관계에 있는 두 노드 $U=b_1b_2 \ldots b_i \ldots b_{2n}$와 $V=\overline{b_1b_2 \ldots b_i \ldots b_{2n}}$ 사이에 에지가 발생하는데 이 에지를 c-에지라고 한다. FHS($2n,n$)에서 연속된 n개의 0과 1로 구성된 노드 U=0...01...1을 $U=0^n1^n$로 표현하겠다. FHS($2n,n$)의 라우팅 알고리즘, 고장지름, 방송, 연결도, 폴디드 하이퍼큐브와의 임베딩 등이 [10, 15, 17-18]에서 발표되었다.



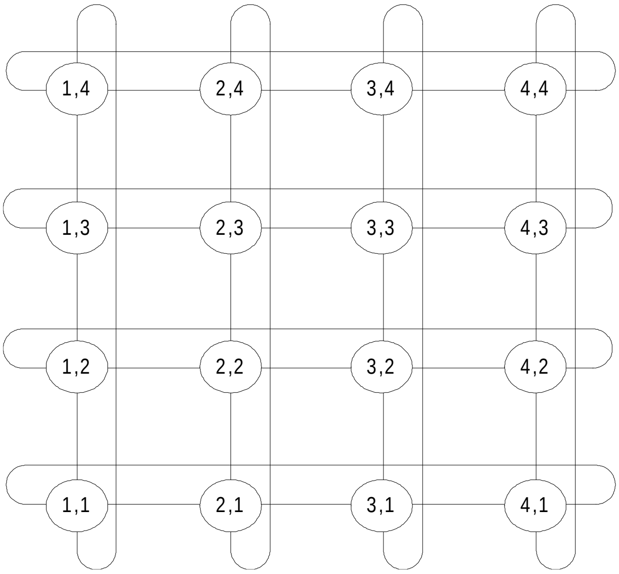
(그림 1) FHS(6,3)



(그림 2) 오드연결망 O_4

오드연결망은 [2]에서 그래프이론 모델의 하나로 발표되었는데, [7]에서 Ghafoor가 상호연결망으로 소개하였고 지금까지 여러 가지 성질들 즉, 최대고장허용도, 노드 및 에지 대칭성, 노드중복 없는 경로, 간단한 라우팅 알고리즘, 하다마드 매트릭스(hadamard matrix)를 이용한 고장허용도 등이 발표되었다. 오드연결망 O_d의 노드수는 $\binom{2d-1}{d}$이고, 분지수는 d이며, 지름은 $d-1$이다. 각 노드는 $2d-1$개의 이진수로 비트스트링 $x_1x_2\ldots x_i\ldots x_{2d-1}$으로 나타내고, 이진수 “0”과 “1”의 개수는 한 개 차이난다. 노드를 연결하는 에지는 오직 하나의 비트스트링만 같은 두 노드 사이에 에지가 존재하고, 이러한 에지를 i-에지가 존재한다($1 \le i \le 2d-1$). 즉, 해밍거리가 $2d-2$인 두 노드 사이에 i-에지가 존재한다. (그림 3)은 이진수 7개를 이용하여 노드를 나타내는 오드연결망 O_4이다.

m-차원 메쉬 $M_m(N)$은 N^m개의 노드와 mN^m-mN^{m-1}개의 에지로 구성된다. 각 노드는 m-차원 벡터로 표현 될 수 있고, 임의의 두 노드의 주소가 한 개의 차원에서 1 차이 날 때 그들 사이에 에지가 있다. $M_m(2)$는 하이퍼큐브이며, $M_2(N)$은 격자 형태의 2-차원 배열이다. 특히 수직 방향으로 n개씩, 수평 방향으로 k개씩의 노드로 구성된 2-차원 메쉬를 $M_{n,k}$로 나타낸다. 2-차원 메쉬는 정규 그래프가 아니고 노드 대칭적이지 않으며, $n \times k$개의 노드로 구성된 2-차원 메쉬 $M_{n,k}$의 지름은 $n+k-2$이다. 낮은 차원의 메쉬는 설계하기 쉽고 알고리즘 관점에서도 매우 유용하므로 병렬처리 컴퓨터의 연결망으로 많이 쓰이고 있으며, 높은 차원의 메쉬 일수록 지름이 작아지고 여러 가지 병렬 알고리즘을 빨리 수행할 수 있지만, 비용이 많이 드는 단점이 있다. 이러한 메쉬의 지름을 개선한 연결망으로 토러스(torus)가 있다. 토러스는 메쉬의 행과 열을 링 형태를 갖도록 하는 랩어라운드(wraparound) 에지라고 불리는 에지를 추가하여 구성한 연결망이다. $k \times n$으로 표현되는 토러스는 $k \times n$개의 노드와 $2kn$



(그림 3) 4×4 토러스

개의 에지로 구성되며, 분지수는 4, 지름은 $\left|\frac{k}{2}\right| + \left|\frac{n}{2}\right|$이다[5].

3. 폴디드 하이퍼-스타 연결망 FHS(2*n*,*n*)의 성질 분석

연결망 G에 속한 어떤 노드에서도 G가 똑같이 보일 때 G는 노드 대칭적이라 한다. 즉, 연결망의 임의의 두 노드 V와 W에 대응시키는 자기동형(automorphism)이 존재하면 그 연결망은 노드 대칭적이다[1]. 대칭성은 주어진 연결망으로 노드 중복 없는 컴퓨터를 설계할 때 각종 자원의 관리를 쉽게 하고, 효율적인 라우팅을 설계할 수 있도록 한다.

[정리 1] 폴디드 하이퍼-스타 연결망 FHS(2*n*,*n*)는 노드 대칭이다.

[증명] 증명을 위해 폴디드 하이퍼-스타 연결망 FHS(2*n*,*n*)의 임의의 노드들을 $U=x_1x_2\cdots x_i\cdots x_{2n}$, $V=\overline{x_1}x_2\cdots\overline{x_i}\cdots x_{2n}$, $V'=\overline{x_1x_2\cdots x_i\cdots x_{2n}}$라고 하자. 노드 U와 V 또는 U와 V'는 인접한 노드들이다. FHS(2*n*,*n*)의 모든 노드들을 구성하는 이진비트스트링 0과 1을 1과 0으로 바꾸는 함수를 ϕ라 하자. 그러면 $\phi(U)=\overline{x_1x_2\cdots x_i\cdots x_{2n}}$이고, $\phi(V)=x_1\overline{x_2\cdots}x_i\overline{\cdots x_{2n}}$이며, $\phi(V')=x_1x_2\cdots x_i\cdots x_{2n}$이다. 함수 ϕ에 의해 변환된 노드 $\phi(U)$와 $\phi(V)$, 또는 $\phi(U)$와 $\phi(V')$는 인접한 노드임을 쉽게 알 수 있다. 이러한 결과로 FHS(2*n*,*n*)의 임의의 두 노드 U와 V 또는 U와 V'에 대응되는 자기동형이 존재함을 알 수 있으므로 FHS(2*n*,*n*)는 노드대칭이다.

이진 비트스트링에서 비트스트링의 첫 번째 비트가 “1”과 “0”으로 구성된 노드들의 집합을 각각 V^1과 V^0라 하자. 비트스트링에서 이진수 {0, 1}의 개수가 $|1|=|0|+1$인 노드들의 집합을 S^1라고 하며, $|0|=|1|+1$인 노드들의 집합을 S^0라고 하자. $|x|$는 x의 개수를 나타낸다($x \in \{0, 1\}$).

[정리 2] 폴디드 하이퍼-스타 연결망 FHS(2*n*,*n*)는 이분할 연결망(bipartite network)이다.

[증명] 증명을 위해 폴디드 하이퍼-스타 연결망 FHS(2*n*,*n*)의 임의의 노드들을 $U=x_1x_2\cdots x_i\cdots x_{2n}$, $V=\overline{x_1}x_2\cdots\overline{x_i}\cdots x_{2n}$, $V'=\overline{x_1x_2\cdots x_i\cdots x_{2n}}$라고 하자. 노드 U와 V 또는 U와 V'는 인접한 노드들이다. $U \in V^1$이면 $V, V' \in V^0$이다. 또한 $U \in V^0$이면 $V, V' \in V^1$이다. 그러므로 FHS(2*n*,*n*)는 이분할 연결망임을 알 수 있다.

상호연결망 $G(V,E)$에서 G의 노드집합, 에지집합, 경로집합을 각각 $V(G)$, $E(G)$, 그리고 $P(G)$로 표현하겠다. 상호연결망 $G(V,E)$를 다른 상호연결망 $G'(V',E')$로 임베딩하는 함

수 (Φ,ρ)은 $V(G)$의 노드들을 $V'(G')$의 노드들로 사상하고, $E(G)$의 에지들을 $P(G')$의 경로들로 사상하는 것을 말한다. 즉, $V(G)$의 노드들을 $V'(G')$의 노드들로 사상하는 함수 Φ: $V\rightarrow V'$이고, $E(G)$의 에지들을 $P(G')$의 경로들로 사상하는 함수는 ρ: $E\rightarrow P(G')$이다. 임베딩의 비용을 나타내는 대표적인 척도로 연장율(dilation)과 밀집율(congestion)이 있다. 연장율은 G의 한 에지 (S, T)를 구성하는 노드 S와 T가 G'의 노드 S'와 T'로 사상되었을 때, 연결망 G'의 노드 S'에서 T'까지 최단경로길이를 나타낸다. 즉, S'에서 T'까지 최단경로를 구성하는 에지의 개수를 의미한다. 연결망 G가 G'에 사상되었을 때, 밀집율은 G'의 한 에지 e를 경유하는 연결망 G의 에지 개수를 의미한다. 즉, G'의 한 에지 e의 중복 사용회수를 나타낸다. 본 논문에서는 연결망 G의 임의의 에지에 의해 연결되어 있는 두 노드의 관계를 몇 가지 경우로 나누어서 연장율을 증명하겠다. 그리고 연장율 증명을 위해 제시된 각각의 경우에서 사용된 에지의 중복 여부를 보임으로써 밀집율을 분석하겠다.

[정리 3] FHS$(2n,n)$이 오드 연결망 O_{n+1}에 연장율 2, 밀집율 1에 임베딩 가능하다.

[증명] FHS$(2n,n)$의 첫 번째 비트스트링을 제거한 임의의 한 노드를 $U=u_2u_3...u_i...u_{2n}$라고 하고, 노드 U의 보수 노드를 $\overline{U}=\overline{u_2u_3\cdots u_i\cdots u_{2n}}$라고 하겠다. 만약, 노드 $U\in S^1$이면 $\Phi(U)=0U1$이고, 노드 $U\in S^0$이면 $\Phi(U)=1\overline{U}0$이다. 이 경우 사상함수 $\Phi(U)$의 비트스트링의 길이는 $2n-1$이고, $\Phi(U)\in S^1$이다. 임의의 한 에지를 e라고 하면 에지 $e\in E(\text{FHS}(2n,n))$이다. 에지 e의 발생 조건에 따라 다음의 2가지 경우로 나누어 연장율이 2임을 증명하겠다.

(경우1) 에지 e가 i-에지$(2\le i\le 2n)$인 경우

에지 e에 의해 연결되어 있는 두 노드 U와 V에서 노드 $U=B_10B_2$와 $V=B_11B_2$라고 하자. B_1과 B_2는 임의의 이진비트스트링을 나타내고, 비트스트링의 길이는 $0\le|B_1,B_2|\le 2n-2$이다. 노드 $U\in S^0$이므로 $\Phi(U)=1\overline{B}_11\overline{B}_20$이고, 노드 $V\in S^1$이므로 $\Phi(V)=0B_11B_21$이다. 두 노드 $\Phi(U)$와 $\Phi(V)$의 비트스트링의 길이가 $2d-1$이고, 이진수의 개수는 $|1|=|0|+1$임을 알 수 있으므로 두 노드 $\Phi(U)$와 $\Phi(V)$은 O_d의 노드들임을 알 수 있고, $\rho(e)=(1\overline{B}_11\overline{B}_20$ – $0B_11B_21)$임을 알 수 있으므로 에지 e가 i-에지인 경우에는 연장율 1로 임베딩 가능함을 쉽게 알 수 있다.

(예제1) U=00011, V=00111일 때, $\Phi(U)$=1111000, $\Phi(V)$=0001111이고, $\rho(e)$=(1111000, 0001111)이다.

(경우2) 에지 e가 c-에지인 경우

에지 e에 의해 연결되어 있는 두 노드 U와 V에서 노드 $U=B_10B_2$와 $V=\overline{B}_11\overline{B}_2$라고 하자. B_1과 B_2는 임의의 이진비트스트링을 나타내고, 비트스트링의 길이는 $0\le|B_1,B_2|\le 2n-2$이다. 노드 $U\in S^0$이므로 $\Phi(U)=1\overline{B}_11\overline{B}_20$이고, 노드 $V\in S^1$이므로 $\Phi(V)=0\overline{B}_11\overline{B}_21$이다. 두 노드 $\Phi(U)$와 $\Phi(V)$의 비트스트링의 길이가 $2d-1$이고, 이진수의 개수는 $|1|=|0|+1$임을 알 수 있으므로 두 노드 $\Phi(U)$와 $\Phi(V)$은 O_d의 노드들임을 알 수 있다. 또한, 사상된 노드의 경로 $\rho(e)=(1\overline{B}_11\overline{B}_20$ – $1B_10B_21$ – $0\overline{B}_11\overline{B}_21)$임을 알 수 있으므로 에지 e가 보수 관계에 있는 경우에는 연장율 2로 임베딩 가능함을 쉽게 알 수 있다.

(예제 2) U=11000, V=00111일 때, $\Phi(U)$=1001110, $\Phi(V)$=001111이고, $\rho(e)$=(1001110, 1110001), (1110001, 0001111)이다.

임베딩의 밀집율이 1임을 다음의 2가지 경우로 나누어 증명하겠다.

(경우3) 경우1에서 사용된 노드 $1\overline{B}_11\overline{B}_20$와 경우2에서 사용된 노드 $1B_10B_21$가 다르다는 것은 두 노드의 마지막 비트가 다르기 때문에 쉽게 알 수 있다.

(경우4) 경우1에서 사용된 노드 $0B_11B_21$와 경우2에서 사용된 노드 $1B_10B_21$가 다르다는 것은 두 노드의 첫 번째 비트가 다르기 때문에 쉽게 알 수 있다. 그러므로 $1\overline{B}_11\overline{B}_20=1\overline{B}_11\overline{B}_20$이거나 $0B_11B_21=0\overline{B}_11\overline{B}_21$이라고 가정해도, $1\overline{B}_11\overline{B}_20$(또는 $0B_11B_21$)$\neq 1B_10B_21$임을 경우3과 경우4에서 보였으므로 밀집율이 1임을 알 수 있다.

그러므로 FHS$(2n,n)$이 오드 연결망 O_{n+1}에 연장율 2, 밀집율 1에 임베딩 가능하다.

[정리 4] 오드 연결망 O_d이 FHS$(2d,d)$에 연장율 2, 밀집율 1에 임베딩 가능하다.

[증명] 오드연결망 O_d의 임의의 한 노드를 $U=u_1u_2...u_i...u_{2d-1}$라고 하고, 노드 U의 보수 노드를 $\overline{U}=\overline{u_1u_2\ldots u_i\ldots u_{2d-1}}$라고 하며, 비트스트링의 첫 번째 비트를 제거한 노드 U를 $t=u_2...u_i...u_{2d-1}$라고 하겠다. 이 경우 노드 $U\in V^0$이면 $\Phi(U)=0U$이고, 노드 $U\in V^1$이면, $\Phi(U)=1\overline{U}$이다. 노드 사상함수 $\Phi(U)$의 비트스트링의 길이는 $2d$이고, 이진수의 개수는 $|1|=|0|=d$이다. 임의의 한 에지를 e라고 하면, $e\in E(O_d)$이다. 에지 e의 발생 조건에 따라 다음의 2가지 경우로 나누어 연장율이 2임을 증명하겠다.

(경우1) 에지 e가 i-에지$(2\le i\le 2d-1)$인 경우

에지 e에 의해 연결되어 있는 두 노드 U와 V에서 노드 $U=0B_11B_2$와 $V=1\overline{B}_11\overline{B}_2$라고 하자$(0\le|B_1,B_2|<2d-2)$. 이 경우 노드 $U\in V^0$이므로 $\Phi(U)=00B_11B_2$이고, 노드 $V\in V^1$이므로 $\Phi(V)=10B_10B_2$이다. 그러므로 두 노드 $\Phi(U)$와 $\Phi(V)$은

FHS($2d,d$)의 노드들임을 알 수 있고, $\rho(e)$=($00B_11B_2$ – $10B_10B_2$)임을 알 수 있으므로 에지 e가 i-에지인 경우에는 연장율 1로 임베딩 가능함을 쉽게 알 수 있다.

(예제1) U=00111, V=11100일 때, $\Phi(U)$=000111, $\Phi(V)$=100011, $\rho(e)$=(000111, 100011).

(경우2) 에지 e가 1-에지인 경우

에지 e에 의해 연결되어 있는 두 노드를 $U=1t$와 $V=1\bar{t}$라고 하자. 그러면 $\{U, V\} \in V^1$이므로, $\Phi(U)=10\bar{t}$이고, $\Phi(V)$=$10t$이다. 그러므로 두 노드 $\Phi(U)$와 $\Phi(V)$은 FHS($2d,d$)의 노드들임을 알 수 있고, $\rho(e)$=($10\bar{t}$ – $01t$ – $10t$)임을 알 수 있으므로 에지 e가 1-에지인 경우에는 연장율 2로 임베딩 가능함을 알 수 있다.

(예제2) U=10011, V=11100일 때, $\Phi(U)$=101100, $\Phi(V)$=100011이고, $\rho(e)$=(101100, 010011), (010011, 100011)이다.

임베딩의 밀집율이 1임은 다음과 같이 증명할 수 있다.

(경우1)에서 사용된 두 노드 $00B_11B_2$는 경우 2에서 사용된 노드 $10\bar{t}$, $01t$, $10t$와 다르다는 것은 각 노드의 비트스트링이 다르기 때문에 쉽게 알 수 있다. 그러므로 경우2의 노드 $10t$ 또는 $10\bar{t}$가 경우1의 노드 $10B_10B_2$와 동일한 노드라고 가정해도 $00B_11B_2$이 $01t$와 다르기 때문에 밀집율이 1임을 알 수 있다.

그러므로 오드연결망 O_d는 FHS($2d,d$)에 연장율 2, 밀집율 1에 임베딩 가능함을 알 수 있다.

$n \times n$ 토러스 T_n의 노드 집합은 다음과 같이 표현된다. $\{(j,h) | 1 \le j,h \le n\}$. 두 노드 (j_1,h_1)와 (j_2,h_2)는 다음과 같은 조건을 만족할 때 연결된다. (1) $j_1=j_2$이고, $h_2=(h_1+1)/n$. (2) $h_1=h_2$이고, $j_2=(j_1+1)/n$. /는 나머지 연산자를 나타낸다. 임의의 집합 S를 집합 $\{1,2,...,n\}$의 부분집합이라고 하자. $m \in S$일 때, 함수 $\beta_n(S)$는 비트스트링의 길이가 n이고 m번째 위치의 비트스트링만이 1인 함수를 나타낸다. 본 논문에서는 집합 $S=\{m\}$를 함수 $\beta_n(S)$에 적용하는 경우 $\beta_n(\{m\})$을 $\beta_n(m)$라고 간략히 표현하겠다.

[보조정리 1] $n \times n$ 토러스 T_n은 FHS($2n,n$)에 연장율 2, 밀집율 2에 임베딩 가능하다.

[증명] $n \times n$ 토러스 T_n의 임의의 한 노드를 $U=(j,h)$라고 하자. T_n의 노드가 FHS($2n,n$)의 노드에 사상되는 사상함수 $\Phi(U)$는 $\beta_n(j)\overline{\beta_n(h)}$이다. 사상함수 $\Phi(U)$의 비트스트링의 길이는 $2n$이고, 이진수의 개수는 $|1|=|0|=n$이다. 임의의 한 에지를 e라고 하면, $e \in E(T_n)$이다. 에지 e의 발생 조건에 따라 다음의 2가지 경우로 나누어 연장율이 2임을 증명하겠다.

(경우1) 에지 e가 $U_1=(j,h_1)$와 $U_2=(j,h_2)$를 연결하는 경우 : T_n의 두 노드 U_1과 U_2가 $\Phi(U)$에 의해 사상된 노드는 $\Phi(U_1)=\beta_n(j)\overline{\beta_n(h_1)}$과 $\Phi(U_2)=\beta_n(j)\overline{\beta_n(h_2)}$이다. $j \neq 1$인 경우 $\rho(e)=(\beta_n(j)\overline{\beta_n(h_1)}$ – $\beta_n(1,j)\overline{\beta_n(h_1,h_2)}$ – $\beta_n(j)\overline{\beta_n(h_2)})$이고, $j=1$인 경우 $\rho(e)=(\beta_n(j)\overline{\beta_n(h_1)}$ – $\beta_n(0)\overline{\beta_n(0)}$ – $\beta_n(j)\overline{\beta_n(h_2)})$임을 알 수 있으므로 에지 e가 $U_1=(j,h_1)$와 $U_2=(j,h_2)$를 연결하는 경우에는 연장율 2로 임베딩 가능함을 알 수 있다.

(경우2) 에지 e가 $U_1=(j_1,h)$와 $U_2=(j_2,h)$를 연결하는 경우 : T_n의 두 노드 U_1과 U_2가 $\Phi(U)$에 의해 사상된 노드는 $\Phi(U_1)=\beta_n(j_1)\overline{\beta_n(h)}$과 $\Phi(U_2)=\beta_n(j_2)\overline{\beta_n(h)}$이다. $j_1,j_2 \neq 1$인 경우 $\rho(e)=(\beta_n(j_1)\overline{\beta_n(h)}$ – $\beta_n(1)\overline{\beta_n(h)}$ – $\beta_n(j_2)\overline{\beta_n(h)})$이고, j_1(또는 j_2)=1인 경우 $\rho(e)=(\beta_n(j_1)\overline{\beta_n(h)}$ – $\beta_n(j_2)\overline{\beta_n(h)})$임을 알 수 있으므로 에지 e가 $U_1=(j,h_1)$와 $U_2=(j,h_2)$를 연결하는 경우에는 연장율 2로 임베딩 가능함을 알 수 있다.

임베딩의 밀집율이 2임은 다음과 같이 증명할 수 있다.

(경우 3) $U=(j,h)$의 인접한 두 노드가 $U_1=(j,h_1)$와 $U_2=(j,h_2)$인 경우($j=1$, $h_1=(h+1)/n$, $h_2=(h-1)/n$) : 노드 U와 U_1를 연결하는 에지를 e_1라고 하고, 노드 U와 U_2를 연결하는 에지를 e_2라고 하자. 그러면 에지 e_1와 e_2가 FHS($2n,n$)에 사상된 경로는 $\rho(e_1)=(\beta_n(j)\overline{\beta_n(h)}$ – $\beta_n(0)\overline{\beta_n(0)}$ – $\beta_n(j)\overline{\beta_n(h_1)})$와 $\rho(e_2)=(\beta_n(j)\overline{\beta_n(h)}$ – $\beta_n(0)\overline{\beta_n(0)}$ – $\beta_n(j)\overline{\beta_n(h_2)})$이다. 두 경로 $\rho(e_1)$와 $\rho(e_2)$에 의해 에지 $(\beta_n(j)\overline{\beta_n(h)}$ – $\beta_n(0)\overline{\beta_n(0)})$가 중복 사용 되었음을 알 수 있다. 그러므로 밀집율이 2임을 알 수 있다.

(경우 4) $U=(j,h)$의 인접한 두 노드가 $U_1=(j,h_1)$와 $U_2=(j,h_2)$인 경우($j \neq 1$, $h_1=(h+1)/n$, $h_2=(h-1)/n$) : 노드 U와 U_1를 연결하는 에지를 e_1라고 하고, 노드 U와 U_2를 연결하는 에지를 e_2라고 하자. 그러면 에지 e_1와 e_2가 FHS($2n,n$)에 사상된 경로는 $\rho(e_1)=(\beta_n(j)\overline{\beta_n(h)}$ – $\beta_n(1,j)\overline{\beta_n(h,h_1)}$ – $\beta_n(j)\overline{\beta_n(h_1)})$와 $\rho(e_2)=(\beta_n(j)\overline{\beta_n(h)}$ – $\beta_n(1,j)\overline{\beta_n(h,h_2)}$ – $\beta_n(j)\overline{\beta_n(h_2)})$이다. 두 경로 $\rho(e_1)$와 $\rho(e_2)$ 상에 중복 사용된 에지가 존재하지 않음을 알 수 있다. 그러므로 밀집율이 1임을 알 수 있다.

(경우 5) $U=(j,h)$의 인접한 두 노드가 $U_1=(j_1,h)$와 $U_2=(j_2,h)$인 경우(j_1(또는 j_2)=1, $j_1=(j+1)/n$, $j_2=(j-1)/n$) : 노드 U와 U_1를 연결하는 에지를 e_1라고 하고, 노드 U와 U_2를 연결하는 에지를 e_2라고 하자. 그러면 에지 e_1와 e_2가 FHS($2n,n$)에 사상된 경로는 $\rho(e_1)=(\beta_n(j_1)\overline{\beta_n(h)}$ – $\beta_n(j_2)\overline{\beta_n(h_1)})$와 $\rho(e_2)=(\beta_n(j_1)\overline{\beta_n(h)}$ – $\beta_n(j_2)\overline{\beta_n(h_2)})$이다. 두 경로 $\rho(e_1)$와 $\rho(e_2)$ 상에 중복 사용된 에지가 존재하지 않음을 알 수 있다. 그러므로 밀집율이 1임을 알 수 있다.

(경우 6) $U=(j,h)$의 인접한 두 노드가 $U_1=(j_1,h)$와 $U_2=(j_2,h)$인 경우($j=1$, $j_1=(j+1)/n$, $j_2=(j-1)/n$) : 노드 U와 U_1를 연결하는 에지를 e_1라고 하고, 노드 U와 U_2를 연결하는 에지를 e_2라고 하자. 그러면 에지 e_1와 e_2가 FHS($2n,n$)에 사상된 경로는 $\rho(e_1)=(\beta_n(j)\overline{\beta_n(h)}$ − $\beta_n(1)\overline{\beta_n(h)}$ − $\beta_n(j_1)\overline{\beta_n(h)})$와 $\rho(e_2)=$ $(\beta_n(j)\overline{\beta_n(h)}$ − $\beta_n(1)\overline{\beta_n(h)}$ − $\beta_n(j_2)\overline{\beta_n(h)})$이다. 두 경로 $\rho(e_1)$와 $\rho(e_2)$에 의해 에지 $(\beta_n(j)\overline{\beta_n(h)}$ − $\beta_n(1)\overline{\beta_n(h)})$가 중복 사용되었음을 알 수 있다. 그러므로 밀집율이 2임을 알 수 있다.

그러므로 $n\times n$ 토러스 T_n은 FHS($2n,n$)에 연장율 2, 밀집율 2에 임베딩 가능하다는 것을 알 수 있다.

또 하나의 $n\times n$ 토러스 T_n이 FHS($2n,n$)에 연장율 2, 밀집율 2에 임베딩 가능함을 보조정리 2를 통해 증명하겠다.

[보조정리] 2 $n\times n$ 토러스 T_n은 FHS($2n,n$)에 연장율 2, 밀집율 2에 임베딩 가능하다.

[증명] $n\times n$ 토러스 T_n의 임의의 한 노드를 $U=(j,h)$라고 하자. T_n의 노드가 FHS($2n,n$)의 노드에 사상되는 사상함수 $\Psi(U)$는 $\overline{\beta_n(j)}\beta_n(h)$이다. 사상함수 $\Psi(U)$의 비트스트링의 길이는 $2n$이고, 이진수의 개수는 $|1|=|0|=n$이다. 임의의 한 에지를 e라고 하면, $e\in E(T_n)$이다. 에지 e의 발생 조건에 따라 다음의 2가지 경우로 나누어 연장율이 2임을 증명하겠다.

(경우1) 에지 e가 $U_1=(j,h_1)$와 $U_2=(j,h_2)$를 연결하는 경우 : T_n의 두 노드 U_1과 U_2가 $\Psi(U)$에 의해 사상된 노드는 $\Psi(U_1)=\overline{\beta_n(j)}\beta_n(h_1)$과 $\Psi(U_2)=\overline{\beta_n(j)}\beta_n(h_2)$이다. $j\neq1$인 경우 $\rho(e)=(\overline{\beta_n(j)}\beta_n(h_1)$ − $\overline{\beta_n(1,j)}\beta_n(h_1,h_2)$ − $\overline{\beta_n(j)}\beta_n(h_2))$이고, $j=1$인 경우 $\rho(e)=(\overline{\beta_n(j)}\beta_n(h_1)$ − $\overline{\beta_n(0)}\beta_n(0)$ − $\overline{\beta_n(j)}\beta_n(h_2))$임을 알 수 있으므로 에지 e가 $U_1=(j,h_1)$와 $U_2=(j,h_2)$를 연결하는 경우에는 연장율 2로 임베딩 가능함을 알 수 있다.

(경우2) 에지 e가 $U_1=(j_1,h)$와 $U_2=(j_2,h)$를 연결하는 경우 : T_n의 두 노드 U_1과 U_2가 $\Psi(U)$에 의해 사상된 노드는 $\Psi(U_1)=\overline{\beta_n(j_1)}\beta_n(h)$과 $\Psi(U_2)=\overline{\beta_n(j_2)}\beta_n(h)$이다. $j_1j_2\neq1$인 경우 $\rho(e)=(\overline{\beta_n(j_1)}\beta_n(h)$ − $\overline{\beta_n(1)}\beta_n(h)$ − $\overline{\beta_n(j_2)}\beta_n(h))$이고, j_1(또는 j_2)=1인 경우 $\rho(e)=(\overline{\beta_n(j_1)}\beta_n(h)$ − $\overline{\beta_n(j_2)}\beta_n(h))$임을 알 수 있으므로 에지 e가 $U_1=(j,h_1)$와 $U_2=(j,h_2)$를 연결하는 경우에는 연장율 2로 임베딩 가능함을 알 수 있다.

임베딩의 밀집율이 2임은 다음과 같이 증명할 수 있다.

(경우 3) $U=(j,h)$의 인접한 두 노드가 $U_1=(j,h_1)$와 $U_2=(j,h_2)$인 경우($j=1$, $h_1=(h+1)/n$, $h_2=(h-1)/n$) : 노드 U와 U_1를 연결하는 에지를 e_1라고 하고, 노드 U와 U_2를 연결하는 에지를 e_2라고 하자. 그러면 에지 e_1와 e_2가 FHS($2n,n$)에 사상된 경로는 $\rho(e_1)=(\overline{\beta_n(j)}\beta_n(h)$ − $\overline{\beta_n(0)}\beta_n(0)$ − $\overline{\beta_n(j)}\beta_n(h_1))$와 $\rho(e_2)=(\overline{\beta_n(j)}\beta_n(h)$ − $\overline{\beta_n(0)}\beta_n(0)$ − $\overline{\beta_n(j)}\beta_n(h_2))$이다. 두 경로 $\rho(e_1)$와 $\rho(e_2)$에 의해 에지 $(\overline{\beta_n(j)}\beta_n(h)$ − $\overline{\beta_n(0)}\beta_n(0))$가 중복 사용 되었음을 알 수 있다. 그러므로 밀집율이 2임을 알 수 있다.

(경우 4) $U=(j,h)$의 인접한 두 노드가 $U_1=(j,h_1)$와 $U_2=(j,h_2)$인 경우($j\neq1$, $h_1=(h+1)/n$, $h_2=(h-1)/n$) : 노드 U와 U_1를 연결하는 에지를 e_1라고 하고, 노드 U와 U_2를 연결하는 에지를 e_2라고 하자. 그러면 에지 e_1와 e_2가 FHS($2n,n$)에 사상된 경로는 $\rho(e_1)=(\overline{\beta_n(j)}\beta_n(h)$ − $\overline{\beta_n(1,j)}\beta_n(h,h_1)$ − $\overline{\beta_n(j)}\beta_n(h_1))$와 $\rho(e_2)=(\overline{\beta_n(j)}\beta_n(h)$ − $\overline{\beta_n(1,j)}\beta_n(h,h_2)$ − $\overline{\beta_n(j)}\beta_n(h_2))$이다. 두 경로 $\rho(e_1)$와 $\rho(e_2)$ 상에 중복 사용된 에지가 존재하지 않음을 알 수 있다. 그러므로 밀집율이 1임을 알 수 있다.

(경우 5) $U=(j,h)$의 인접한 두 노드가 $U_1=(j_1,h)$와 $U_2=(j_2,h)$인 경우(j_1(또는 j_2)=1, $j_1=(j+1)/n$, $j_2=(j-1)/n$) : 노드 U와 U_1를 연결하는 에지를 e_1라고 하고, 노드 U와 U_2를 연결하는 에지를 e_2라고 하자. 그러면 에지 e_1와 e_2가 FHS($2n,n$)에 사상된 경로는 $\rho(e_1)=(\overline{\beta_n(j)}\beta_n(h)$ − $\overline{\beta_n(j_1)}\beta_n(h))$와 $\rho(e_2)=$ $(\overline{\beta_n(j)}\beta_n(h)$ − $\overline{\beta_n(j_2)}\beta_n(h))$이다. 두 경로 $\rho(e_1)$와 $\rho(e_2)$ 상에 중복 사용된 에지가 존재하지 않음을 알 수 있다. 그러므로 밀집율이 1임을 알 수 있다.

(경우 6) $U=(j,h)$의 인접한 두 노드가 $U_1=(j_1,h)$와 $U_2=(j_2,h)$인 경우($j=1$, $j_1=(j+1)/n$, $j_2=(j-1)/n$) : 노드 U와 U_1를 연결하는 에지를 e_1라고 하고, 노드 U와 U_2를 연결하는 에지를 e_2라고 하자. 그러면 에지 e_1와 e_2가 FHS($2n,n$)에 사상된 경로는 $\rho(e_1)=(\overline{\beta_n(j)}\beta_n(h)$ − $\overline{\beta_n(1)}\beta_n(h)$ − $\overline{\beta_n(j_1)}\beta_n(h))$와 $\rho(e_2)=(\overline{\beta_n(j)}\beta_n(h)$ − $\overline{\beta_n(1)}\beta_n(h)$ − $\overline{\beta_n(j_2)}\beta_n(h))$이다. 두 경로 $\rho(e_1)$와 $\rho(e_2)$에 의해 에지 $(\overline{\beta_n(j)}\beta_n(h)$ − $\overline{\beta_n(1)}\beta_n(h))$가 중복 사용 되었음을 알 수 있다. 그러므로 밀집율이 2임을 알 수 있다.

그러므로 $n\times n$ 토러스 T_n은 FHS($2n,n$)에 연장율 2, 밀집율 2에 임베딩 가능하다는 것을 알 수 있다.

보조정리 1에서 T_n의 노드가 FHS($2n,n$)에 사상된 노드 $\Phi(U)$와 보조정리 2에서 T_n의 노드가 FHS($2n,n$)에 사상된 노드 $\Psi(U)$는 보수 관계에 있다. 즉, 두 노드 $\Phi(U)$와 $\Psi(U)$는 c-에지에 의해 연결되어 있다. 그러므로 보조정리 1과 보조정리 2에 의해 FHS($2n,n$)에 사상된 두 개의 T_n은 c-에지에 의해 연결된다는 것을 알 수 있다. 그러므로 다음과 같은 정리를 구할 수 있다.

[정리 5] $2n\times n$ 토러스 T_n은 FHS($2n,n$)에 연장율 2, 밀집율 2에 임베딩 가능하다.

4. 결 론

폴디드 하이퍼-스타 연결망은 하이퍼-스타 연결망의 지름을 1/2 정도 개선한 연결망으로 하이퍼큐브군 연결망보다 망비용이 우수한 연결망이다. 본 논문에서는 상호연결망 폴디드 하이퍼-스타 연결망 FHS($2n,n$)이 노드 대칭임과 이분할 연결망임을 증명하였다. 그리고 FHS($2n,n$)이 오드 연결망 O_{n+1}에 연장율 2, 밀집율 1로 임베딩 가능함을 보였고, 오드 연결망 O_d이 FHS($2d,d$)에 연장율 2, 밀집율 1로 임베딩 가능함을 보였다. 또한 $2n\times n$ 토러스가 FHS($2n,n$)에 연장율 2, 밀집율 2로 임베딩 가능함을 보였다. 이러한 연구 결과는 폴디드 하이퍼-스타 연결망이 우수한 성질을 갖는 상호연결망임을 나타내고, 오드 연결망과 메쉬에서 개발된 많은 알고리즘을 폴디드 하이퍼-스타 연결망 FHS($2n,n$)에서 적은 비용을 추가하여 활용할 수 있음을 의미한다.

참 고 문 헌

[1] S. B. Akers, D. Harel, and B. Krishnamurthy, "The star graph: An attractive alternative to the n cube," Proc. of the Int. Conf. Parallel Processing, pp.216-223, 1986.

[2] N. Biggs, "Some Odd Graph Theory," Annals of New York Academy of Sciences, Vol.319, pp.71-81, 1979.

[3] E. Cheng and L. Liptak, "Structural properties of hyper-stars," Ars Combinatoria, Vol.80, pp.65-73, 2006.

[4] E. Cheng and M. Shah, "A strong structural theorem for hyper-stars," Congressus Numerantium, Vol.179, pp.181-191, 2006.

[5] W. Dally and C. Seitz, "The Torus Routing Chip," Distrib. Comput., Vol.1, pp.187-196, 1986.

[6] Q. Dong, X. Yang, J. Zhao and Y.Y. Tang, "Embedding A Family of Disjoint 3D Meshes into A Crossed Cube," Information Sciences, Vol.178, No.11, pp.2396-2405, 2008.

[7] J. Fan and X. Jia, "Embedding Meshes into Crossed Cubes," Information Sciences, Vol.177, No.15, pp.3151-3160, 2007.

[8] A. Ghafoor and T. R. Bashkow, "A Study of Odd Graphs as Fault-Tolerant Interconnection Networks," IEEE Trans. Computers, Vol.40, No.2, pp.225-232, 1991.

[9] J.-S. Kim, E. Cheng, L. Liptak, H.-O. Lee, "Embedding hypercubes, rings and odd graphs into Hyper-stars," International Journal of Computer Mathematics, Vol.86, No.5, pp.771-778, 2009.

[10] H.-O. Lee, J.-S. Kim, E. Oh, H.-S. Lim, "Hyper-Star Graph: A New Interconnection Network Improving the Network Cost of the Hypercube," Lecture Notes in Computer Science : EurAsia-ICT 2002, LNCS 2510, pp.858-865, 2002.

[11] W. Shi and P. K. Srimani, "Hierarchical star: a new two level interconnection network," Journal of Systems Architecture, Vol.51, pp.1-14, 2005.

[12] 김종석, 오은숙, 이형옥, "하이퍼-스타 연결망의 위상적 망성질과 방송 알고리즘," 정보처리학회논문지A, Vol.11-A, No.5, pp.341-346, 2004.

[13] 김종석, 이형옥, "상호연결망 HS(2n,n)의 이분할 에지수와 고장 지름 분석," 정보처리학회논문지A, Vol.12-A, No.6, pp.499-506, 2005.

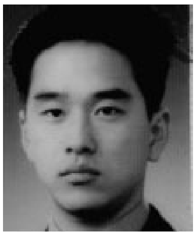
[14] 김종석, 이형옥, "PMC 모델과 비교진단모델을 이용한 하이퍼-스타 연결망의 진단도 분석," 정보처리학회논문지A, Vol.13-A, No.1, pp.19-26, 2006.

[15] 김종석, "Folded 하이퍼-스타 FHS(2n,n)의 위상적 성질 분석," 정보처리학회 논문지 A, Vol.14-A, No.5, pp.263-268, 2007.

[16] 김숙연, "메쉬의 교차큐브에 대한 임베딩," 정보처리학회논문지A, Vol.15-A, No.6, pp.301-308, 2008.

[17] 이형옥, 김병철, 임형석, "하이퍼-스타 그래프 : 다중 컴퓨터를 위한 새로운 상호 연결망," 정보처리논문지, Vol.5, No.12, pp.3099-3108, 1998.

[18] 이형옥, 최정, 박승배, 조정호, 임형석, "Folded 하이퍼-스타 그래프의 병렬 경로," 정보처리논문지, Vol.6, No.7, pp.1756-1769, 1999.



김 종 석

e-mail : rockhee7@gmail.com
1995년 순천대학교 전산학과(학사)
2001년 순천대학교 컴퓨터과학과(이학석사)
2004년 순천대학교 컴퓨터과학과(이학박사)
2005년~2008년 오클라호마 주립대학교 컴퓨터과학과 박사후연구원
2008년~현 재 영남대학교 전자정보공학부 연구교수
관심분야 : 병렬 및 분산처리, 계산이론, 네트워크 설계 및 분석

이 형 옥

e-mail : oklee@sunchon.ac.kr
1994년 순천대학교 전산학과(학사)
1996년 전남대학교 전산통계학과(석사)
1999년 전남대학교 전산통계학과(박사)
1999년~2002년 한국정보사회진흥원(선임연구원)
2006년~2007년 University of Texas at Dallas 교환교수
2002년~현 재 순천대학교 컴퓨터교육과 부교수
관심분야 : 병렬 및 분산처리, 계산이론, 알고리즘, 네트워크 설계 및 보안

김 성 원

e-mail : swon@ynu.ac.kr

1990년 서울대학교 제어계측공학과(학사)
1992년 서울대학교 제어계측공학과(공학석사)
2002년 서울대학교 전기컴퓨터공학부(공학박사)
2005년~현 재 영남대학교 전자정보공학부 부교수

관심분야 : 무선 네트워크, 모바일 네트워크, 임베디드시스템