

<학술논문>

DOI:10.3795/KSME-A.2009.33.12.1427

중력구배 인공위성의 Pitch운동의 Melnikov해석

이 목 인*

(2009년 7월 1일 접수, 2009년 11월 2일 수정, 2009년 11월 12일 심사완료)

The Melnikov Analysis of the Pitch Dynamics of a Gravity Gradient Satellite

Mokin Lee

Key Words: Gravity Gradient Satellite(중력구배 인공위성), Chaos(혼돈계), Homoclinic/Heteroclinic Orbits(호모클리닉/헤테로클리닉 궤도), Melnikov Analysis(멜니코프 해석)

Abstract

The pitch motion of a generic gravity gradient satellite is investigated in terms of chaos. The Melnikov method is used for detecting the onset of chaotic behavior of the pitch motion of a gravity gradient satellite. The Melnikov method determines the distance between stable and unstable manifolds of a perturbed system. When stable and unstable manifolds transverse on the Poincare section, the resulting motion can be chaotic. The Melnikov analysis indicates that the pitch dynamics of a generic gravity gradient satellite can be chaotic when the orbit eccentricity is small.

기호설명

- GM_{\oplus} : 지구 중력계수
- H : 해밀턴 함수
- h : 인공위성 운동량
- I_{xx} : 롤축에 대한 질량 모멘트 관성
- I_{yy} : 피치축에 대한 질량 모멘트 관성
- I_{zz} : 요축에 대한 질량 모멘트 관성
- K : 질량 관성 모멘트 계수
- $M(t_0)$: 멜니코프 함수
- R : 지구중심에서 위성까지의 거리
- x : 계의 상태 변수
- x_h : 비섭동계의 homo-/heteroclinic 궤도의 해
- ϵ : 인공위성 궤도의 편심률
- ν : 인공위성 궤도의 진편차
- θ : 인공위성의 pitch각
- ϕ : 인공위성의 pitch각의 진편차에 대한 미분

1. 서론

많은 인공위성들이 과학적 탐구, 원거리 탐사, 통신, 항해, 군사 정찰, 지형탐사, 지도제작 등의 목적으로 지구 주위를 돌고 있다. 대부분의 인공위성들은 타원궤도에서, 고도가 300-1,500 km인 저지구 궤도 (LEO: low earth orbit)로 공전하고 있다. 이러한 저지구 궤도에서, 인공위성의 경제적인 자세제어는 중력을 이용한 중력구배 안정법 (gravity gradient stabilization)이다.

중력구배 인공위성(gravity gradient satellite)의 자세는 중력 방향과 일치하려 하는데, yaw와 roll 운동의 초기조건이 0이면 pitch운동은 위 두운동과는 독립적인, 회전운동 또는 중력방향을 중심으로 진동운동을 한다.

중력구배 인공위성의 pitch운동은 혼돈계(chaotic system)가 될 수 있다는 사실이 수치적 방법으로 알려져 있다.⁽¹⁾

혼돈계는, 결정계(deterministic system)임에도 불구하고, 운동의 초기 조건값에 대단히 예민한 비선형 운동계(nonlinear dynamic system)이다. 두 초기 조건값의 차가 작은 혼돈계의 경우, 두 초기 조건으로 부터의 운동 결과는 확연히 달라져서

[이 논문은 대한기계학회 2009년도 울산지부 춘계학술대회 (2009. 5. 8., 울산대) 발표논문임]

* 회원, 울산대학교 기계자동차공학부

E-mail : milee@ulsan.ac.kr

TEL : (052)259-2143 FAX : (052)259-1680

한 운동의 결과를 가지고 다른 운동의 결과를 예측할 수 없다. 만약, 혼돈계가 초기조건 오차를 수반하면 그 운동 결과는 신뢰할 수 없을 뿐 아니라 미래 예측이 불가능하다.

혼돈계를 찾아내는 방법은, 수치적 방법으로는 Lyapunov 특성지수방법(Lyapunov characteristic exponents), bifurcation maps, 포앙카레 맵(Poincare map) 등이 있고, 해석적 방법으로는 Melnikov 방법이 있다.^(2,4)

중력구배 인공위성의 pitch운동은 다음의 논문들에 연구되어 있다. Karasopoulos와 Richardson은 중력구배 인공위성의 pitch운동이, 궤도의 편심률, 인공위성의 질량관성 등에 따라, 혼돈계(chaotic system)가 될 수 있다는 것을 수치적 해석을 통해 보였다.⁽¹⁾ Toniolo 등의 저자들은 PID 형태로 제어되는 중력구배 인공위성의 Lyapunov 특성지수를 수치적으로 계산하여, Melnikov함수와 비교하여, Melnikov 방법의 타당성을 연구하였다.⁽⁵⁾ 또, Liu와 Chen은, Melnikov의 해석적 방법과 Lyapunov 특성지수방법, 포앙카레 맵, power spectrum 등의 수치적인 방법을 이용하여, 지구 자력장(Earth Magnetic Field) 영향하의 인공위성 자세운동이 혼돈계임을 보였고, feedback linearization 제어를 이용하여 비혼돈계로 만들었다. 이 때 제어된 운동은 비혼돈계의 진동운동인데, 일반적인 인공위성의 pin-pointing 조건에는 부적합하다.⁽⁶⁾

본 논문에서는, Melnikov 방법을 이용하여 중력구배 인공위성의 pitch운동의 Melnikov 함수를 유도하고, 유도된 Melnikov 함수로부터, 중력구배 인공위성의 pitch운동이 혼돈계가 될 수 있음을 해석적으로 보이고자 한다.

2. Melnikov 방법

2.1 이차원 Melnikov 해석

Melnikov 방법은 주기적 섭동(periodic perturbation)을 가지고 있고, saddle point 평형점을 가지는 비선형 운동계에 적용된다.^(3,4,7) 이차원 Melnikov 방법에서는, 다음과 같은 미분 가능한 이차원 Hamilton 운동계를 생각한다.

$$\dot{\mathbf{x}} = JD_x H(x_1, x_2) + \epsilon \mathbf{g}(x_1, x_2, t) \quad (1)$$

여기서

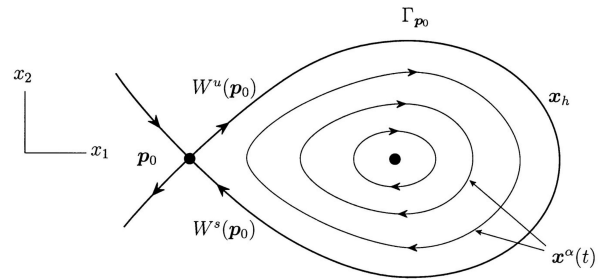


Fig. 1 Unperturbed system on the Poincare section. $W^u(p_0)$ denotes the unstable manifold and $W^s(p_0)$ denotes the stable manifold.(그림출처 참고문헌 [8,10]).

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_x H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \partial H / \partial x_1 \\ \partial H / \partial x_2 \end{pmatrix}$$

그리고, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ 는 이 시스템의 상태 벡터이고, $\mathbf{g}(x_1, x_2, t)$ 는 주기가 T 인 주기섭동 (periodic perturbation) 벡터, J 는 symplectic 행렬을 나타내고, $H(x_1, x_2)$ 는 스칼라 해밀토니안 함수, 그리고 ϵ 은 아주 작은 수이다 ($\epsilon \ll 1$).

$\epsilon = 0$ 인 경우, 식 (1)의 계는 비섭동계 (unperturbed system)가 된다. Fig. 1과 같이 비섭동계가 homoclinic orbit으로 연결되는 hyperbolic saddle point를 가졌다고 가정한다.

이 시스템에 크기가 작은 주기적 섭동(periodic perturbation)이 주어지는 경우, Fig. 2에서는 stable manifold와 unstable manifold가 어떻게 변하는가를 보여 주고 있다. Fig. 2에서 보는 바와 같이, 크기가 작은 주기적 섭동이 주어지는 경우($\epsilon \ll 1$), Poincare section에서, stable manifold와 unstable manifold는 섭동되고, 두 manifold들은 무한히 교차하여 tangle을 형성할 수 있다. 이 경우, 교차점 부근에서의 운동은, Smale horseshoe map 운동과 일치하여, Smale-Birkhoff homoclinic theorem에 의해, 혼돈계 (chaotic system)가 된다.^(8,9)

Melnikov는 섭동된 manifold 사이의 거리를 비섭동계의 운동해를 사용하여 식 (2)와 같이 나타내었다. Melnikov는 비섭동계의 해를 ϵ 의 차수로 Taylor series 전개한 후, ϵ 의 1차 항만을 고려하였다.

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle D_x H, \mathbf{g} \rangle (\mathbf{x}_h, t + t_0) dt \quad (2)$$

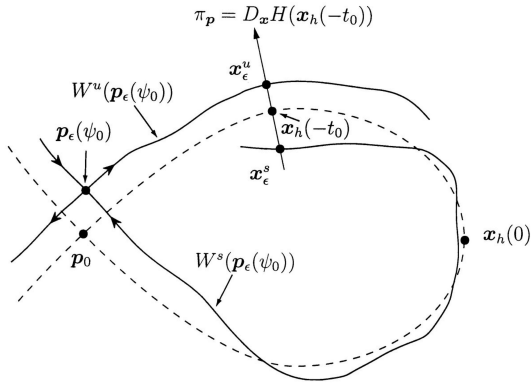


Fig. 2 Distance between the stable and unstable manifold of the perturbed system on the Poincaré section. (그림출처 참고문헌 [8,10])

여기서, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 은 두 벡터함수의 내적을 나타내고, x_h 은 비섭동계 (unperturbed system)의 운동해를 나타낸다. $M(t_0)$ 를 Melnikov함수라 부르는데, 두 manifold가 만나서 교차하면, Melnikov 함수값은 0이 된다. Melnikov함수는 두 manifold가 단순히 만나는 것을 표현하였지 두 manifold가 tangle이 된다는 것은 보이지 않는다. 그러므로 Melnikov 함수값이 0이 됨은 혼돈계가 되기 위한 필요조건이다.

3. 중력구배 인공위성의 Pitch 운동 방정식

Lagrange 운동방정식을 이용하여, roll, pitch, 그리고 yaw에 대한 운동방정식을 구할 수 있다. 만약, roll과 yaw운동의 초기조건이 0이라 가정하면, pitch운동의 운동 방정식은 다음과 같이 유도된다.^(10,11)

$$\left(\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d^2\nu}{dt^2} \right) I_{yy} + \frac{3GM_{\oplus}}{R^3} (I_{xx} - I_{zz}) \cos\theta \sin\theta = 0 \quad (3)$$

여기서, Fig. 3을 참조하면, $\theta(t)$ 는 pitch각, $\nu(t)$ 는 타원궤도의 진편차(true anomaly)이고, $R(t)$ 는 지구중심으로부터 인공위성까지의 거리이다. 그리고, GM_{\oplus} 은 지구의 중력상수, I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} 는 roll 축, pitch 축, yaw 축에 대한 각각의 관성 질량 모멘트이다.

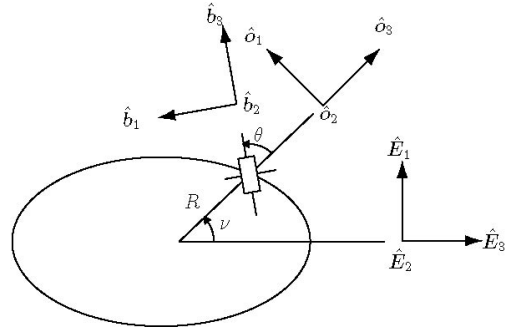


Fig. 3 Coordinate Systems. The vector triad $(\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3)$ is the set of the unit vectors of the inertial coordinate system, the vector triad $(\hat{o}_1, \hat{o}_2, \hat{o}_3)$ is the set of the unit vectors of the orbital coordinate system, the vector triad $(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3)$ is the set of the unit vectors of the body-fixed reference system

시간의 함수에서 진편차 (true anomaly)의 함수로 바꾸기 위하여, Kepler의 법칙을 이용하면

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{h}{R^2}$$

$$R = \frac{h^2}{GM_{\oplus} (1 + \cos\nu)}$$

식 (3)의 pitch 방정식은 진편차 (true anomaly)의 함수로 다음과 같이 유도된다.

$$(1 + \epsilon \cos\nu)\theta'' - 2\epsilon \sin\nu(1 + \theta') + 3K \cos\theta \sin\theta = 0 \quad (4)$$

여기서, $K = (I_{xx} - I_{zz})/I_{yy}$ = 질량 관성 모멘트 계수, $\theta'' = d^2\theta/d\nu^2$ 그리고 $\theta' = d\theta/d\nu$ 이다.

만약 $\phi = d\theta/d\nu$ 라 하고, ϵ 이 작다고 가정하면, (4)의 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\theta' = \phi$$

$$\phi' = -3K \cos\theta \sin\theta + \epsilon [2(1 + \phi) \sin\nu + 3K \cos\theta \sin\theta \cos\nu]$$

위의 두 식은 Melnikov해석에 사용된다.

4. 중력구배 인공위성 pitch운동의 Melnikov해석

4.1 비섭동 위상공간 (unperturbed phase space) Melnikov해석은 비섭동계의 운동해를 구하는

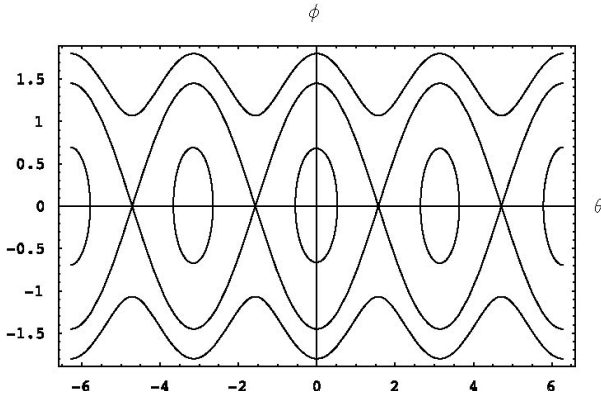


Fig. 4 The plot of the unperturbed phase space of the pitch motion of a gravity gradient satellite

것으로부터 시작한다. 중력구배 인공위성 pitch 운동의 비섭동계 방정식은, ϵ 을 0으로 하여 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \theta' &= \phi \\ \phi' &= -3K \cos\theta \sin\theta \end{aligned}$$

이 경우, 비섭동계의 해밀톤 함수는 다음과 같이 구해진다.

$$H = \frac{\phi^2}{2} + \frac{3}{2}K \sin\theta \tag{5}$$

식 (5)의 Hamilton함수가 존재하므로, 전역 위상 공간 (global phase space)은 Fig. 4와 같이 구해진다. 중력구배 인공위성의 pitch 운동의 비섭동계는 heteroclinic 궤도를 가진다. Melnikov 방법에서, heteroclinic 궤도의 해를 사용하여도, Melnikov 함수를 구할 수 있다.⁽³⁾

4.2 비섭동계의 Heteroclinic 궤도계산

Heteroclinic 궤도의 해밀톤 함수의 값이 $3K/2$ 이므로, heteroclinic 궤도의 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{3K}{2} = \frac{\phi^2}{2} + \frac{3K}{2} \sin^2\theta$$

여기서 $\phi = d\theta/d\nu$ 이므로, 다음과 같은 미분방정식이 유도된다.

$$d\theta/d\nu = \pm \sqrt{3K(1 - \sin^2\theta)}$$

위 미분방정식을 풀면, 다음과 같은 일반해가 얻어진다.

$$\sin\theta = \tanh[\sqrt{3K}(\nu + C)]$$

여기서, 적분상수 C 는 $\nu=0$ 일 때, $\theta=0$ 가 되는 조건으로 구한다. 그러면, 비섭동계 운동해들이 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \tanh(\sqrt{3K}\nu) \\ \cos\theta &= \operatorname{sech}(\sqrt{3K}\nu) \\ \phi(\nu) &= \sqrt{3K} \operatorname{sech}(\sqrt{3K}\nu) \end{aligned} \tag{6}$$

식 (6)의 비섭동계 운동해들은 Melnikov함수를 구성하는데 사용된다.

4.3 Pitch 운동의 Melnikov 함수 계산

Pitch운동의 이차원 Melnikov함수는 다음과 같이 정의된다.

$$M(\nu_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle D_x H, \mathbf{g} \rangle (\mathbf{x}_h, \nu + \nu_0) d\nu$$

여기서, \mathbf{x}_h 는 Fig. 4에 보이는 비섭동 pitch 운동의 heteroclinic 궤도의 해이다.

중력구배 인공위성의 경우, \mathbf{g} 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2(1 + \phi)\sin\nu + 3K\sin\theta\cos\theta\cos\nu \end{pmatrix}$$

그리고, $D_x H$ 는 Hamilton 함수로부터, 다음과 같이 정의된다.

$$D_x H = \begin{pmatrix} 3K\sin\theta\cos\theta \\ \phi \end{pmatrix}$$

그러면, $\langle D_x H, \mathbf{g} \rangle$ 는 $D_x H$ 와 \mathbf{g} 의 내적(inner product)으로 다음과 같이 계산된다.

$$\langle D_x H, \mathbf{g} \rangle = \phi [2(1 + \phi)\sin\nu + 3K\sin\theta\cos\theta\cos\nu]$$

그러면, Melnikov 함수는, 식 (6)에 구해진 비섭동계의 해들을 대입하여 다음과 같이 된다.

$$M(\nu_0) = 2\sin\nu_0 \int_{-\infty}^{\infty} \phi \cos\nu d\nu + 2\sin\nu_0 \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2 \cos\nu d\nu - 3K\sin\nu_0 \int_{-\infty}^{\infty} \phi \cos\theta \sin\theta d\nu$$

여기서, 각각의 이상 적분(improper integral)은 contour integral을 정의한 다음, 복소수의 유수정리(residue theorem)를 이용하여, 다음과 같이 계산된다.⁽¹⁰⁾

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi \cos\nu d\nu &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{3K} \operatorname{sech}(\sqrt{3K}\nu) \cos\nu d\nu \\ &= \pi \operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3K}}\right) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2 \cos\nu d\nu &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{3K} \operatorname{sech}^2(\sqrt{3K}\nu) \cos\nu d\nu \\ &= \pi \operatorname{csch}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3K}}\right) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi \cos\theta \sin\theta \sin\nu d\nu & \quad \pi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{3K} \operatorname{sech}^2(\sqrt{3K}\nu) \tanh(\sqrt{3K}\nu) \cos\nu d\nu \\ &= \frac{\pi}{2 \cdot 3K} \operatorname{csch}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3K}}\right) \end{aligned}$$

그러므로, 중력구배 인공위성의 pitch 운동의 Melnikov 함수는 다음과 같이 구해진다.

$$M(\nu_0) = \pi \left[2\operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3K}}\right) + \frac{3}{2} \operatorname{csch}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3K}}\right) \right] \sin\nu_0 \quad (7)$$

위의 Melnikov 함수로부터, 혼돈계 판별을 할 수 있는 Melnikov 기준(criteria)을 유도할 수 있다.

4.4 Melnikov 기준 (criteria)

중력구배 인공위성의 pitch 운동의 경우, $\nu_0 = n\pi$ 이면, 식 (7)의 Melnikov함수는 0이 된다. 즉, Melnikov함수가 $n\pi$ 의 영점들(zeros)을 가지고 있다. 여기서, n 은 정수를 뜻한다.

이 Melnikov 함수가 영점을 가지고 있으면, 섭동계의 stable manifold와 unstable manifold가 서로 교차함을 암시한다. 또, 식 (7)의 Melnikov함수의 영점은 무한개 존재하므로, 섭동된 stable manifold와 unstable manifold가 무한하게 서로 교차함을 암시한다. Melnikov함수가 0이 됨은 중력구배 인공위성의 pitch 운동이 혼돈계가 될 수 있는 가능성을 보여준다.

5. 결 론

편심률이 작은 타원궤도에서, 중력구배 인공위성의 pitch 운동은 특정한 모델에 상관없이 혼돈계가 될 수 있다. 임의의 중력구배 인공위성의 pitch 운동은 혼돈계일 수 있어, 장기간 예측은 신뢰할 수 없다. 편심률이 큰 타원궤도에서의 pitch 운동은, Melnikov 해석의 가정 ($\epsilon \ll 1$)에 위배되므로, Melnikov 방법을 적용할 수 없다.

참고문헌

- (1) Karasopoulos, H. and Richardson, D., 1993, "Numerical Investigation of Chaos in the Attitude Motion of a Gravity-Gradient Satellite," *AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, AAS-93-581, Victoria, British Columbia, Canada.
- (2) Guckenheimer, J. and Holmes, P., 1983, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences Series, Vol. 42, Springer-Verlag.
- (3) Nayfeh, A. and Balachandran, B., 1995, *Applied Nonlinear Dynamics Analytical, Computational, and Experimental Method*, Wiley Inter Science.
- (4) Wiggins, S., 1990, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Applied Mathematics, Vol. 2, Springer-Verlag.
- (5) Toniolo, M.D., Lee, M., and Gray, G.L., August 1999, "Comparison of Melnikov's Method and Numerical Simulation for Predicting Nonlinear Dynamics in the Pitch Motion of Actively Controlled Satellites in a Gravity Gradient Field," *AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, AAS 99-377, Girdwood, Alaska, USA.
- (6) Liu, Y. and Chen, L., 2003, "Chaotic Attitude Motion of a Magnetic Rigid Spacecraft in an Elliptic Orbit and its Control," *ACTA MECHANICA SINICA*, Vol.19, No.1, pp 71~78.
- (7) Melnikov, V., 1963, "On the Stability of the Center for Time Periodic Perturbations," *Trans. Moscow Math. Soc.* Vol. 12, pp. 1~57.
- (8) Wiggins, S., 1990, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Applied Mathematics, Vol. 2, Springer-Verlag.

- (9) Holmes, P., 1989, "Nonlinear Oscillations and the Smale Horseshoe Map," *Chaos and Fractals: The Mathematics Behind the Computer Graphics*, pp.25~39, Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.
- (10) Lee, M., 2002, "Control of Chaos in Gravity Gradient Satellite Pitch Dynamics," *Comprehensive Document in the Department of Engineering Science and Mechanics*, The Pennsylvania State University.
- (11) Hughes, P., 1986, *Space Attitude Dynamics*, John Wiley & Sons.