

경사 종동력과 끝질량을 갖는 크랙 보의 안정성 해석

손인수[†] · 윤한익* · 노태우**

(2009년 6월 30일 접수, 2009년 10월 19일 수정, 2009년 10월 26일 심사완료)

Stability Analysis of Cracked Beams with Subtangential Follower Force and Tip Mass

In-Soo Son, Han-Ik Yoon and Tae-Woo No

Key Words: Cracked Beam(크랙을 가진 보), Stability(안정성), Subtangential Follower Force(경사 종동력), Slenderness Ratio(세장비), Tip Mass(끝질량)

Abstract

In this paper, the purpose is to investigate the stability and variation of natural frequency of a cracked cantilever beams subjected to follower force and tip mass. In addition, an analysis of the flutter instability(flutter critical follower force) of a cracked cantilever beam as slenderness ratio and crack severity is investigated. The governing differential equations of a Timoshenko beam subjected to an end tangential follower force is derived via Hamilton's principle. The two coupled governing differential equations are reduced to one fourth order ordinary differential equation in terms of the flexural displacement. Finally, the influence of the slenderness ratio and crack severity on the critical follower force, stability and the natural frequency of a beam are investigated.

1. 서 론

종동력은 비보존력으로 계의 변위에 따라서 그 작용방향을 바꾸는 일정한 크기의 힘으로 정의된다. 일반적으로 건축 및 기계구조물은 순수 종동력만이 아닌 중심축 방향으로의 압축력과 종동력의 복합적인 힘이 작용하며 이러한 힘을 모델링하기 위하여 경사계수(subtangential coefficient)의 개념을 도입하였다.⁽¹⁾ 구조물에 일정크기 이상의 힘이 작용하면 계는 불안정을 일으키며 경사계수의 크기에 따라 불안정 형태가 좌굴(divergence), 또는 플러터(flutter)로 나타난다. 또한 크랙과 같은 결함이 존재하는 구조물에 힘이 작용하게 되

면 일정 한계의 힘에서 크랙을 기점으로 급격히 균열이 전파되어 파괴된다. 이처럼 크랙과 종동력은 구조물의 진동특성과 안정성을 변화시켜 구조물의 불안정 및 파괴의 주요 원인이 된다. 따라서 크랙을 가지는 구조물에 압축력 혹은 종동력이 작용하는 경우 이 구조물의 안정성을 판단하는 것은 공학적으로 중요한 문제이다.

Saito와 Otomi⁽²⁾는 양단에 탄성 지지되고 부가 질량이 존재하는 티모센코 보가 축압축력과 종동력을 받는 경우 지지된 탄성계수의 영향에 의한 보의 안정성 평가를 수행하였으며, Sato⁽³⁾는 경사 종동력을 받는 티모센코 보의 자유단에 끝질량과 탄성 지지를 갖는 경우 이들 파라미터의 변화에 따른 보의 안정성에 대한 연구를 하였다. Yoon 등⁽⁴⁾은 자유단에 끝단질량과 회전 스프링으로 구속된 Beck 기둥의 동적 안정성에 대한 연구를 수행하기도 하였다. 또 탄성기초와 부분탄성 기초 및 끝단질량을 갖는 티모센코 보의 자유진동 해석 및 동적안정성에 대한 연구도 진행되었다.^(5,6)

[이 논문은 대한기계학회 2009년도 부산지부 춘계학술대회(2009. 5. 8., 동명대) 발표논문임]

† 책임저자, 회원, 동의대학교 기계공학과
E-mail : isson92@deu.ac.kr
TEL : (051)890-2239 FAX : (051)890-2232

* 회원, 동의대학교 기계공학과

** 동의대학교 대학원 기계공학과

최근 경사종동력과 크랙을 가진 티모셴코 보의 안정성에 미치는 세장비 및 크랙의 영향에 대한 연구결과와 순수 종동력을 받는 보의 안정성에 미치는 크랙의 영향에 대한 결과도 발표되어지고 있다.^(7,8) 이 논문의 목적은 기존에 연구되었던 많은 선행 연구의 결과들을 바탕으로 세장비 및 끝질량, 그리고 크랙이 티모셴코 보의 진동특성 및 안정성에 미치는 영향을 연구하는 것이다.

2. 경사 종동력을 받는 티모셴코 보

Fig. 1 (a), (b)는 보준력과 비보준력을 받는 보의 수학적 모델을 나타낸 것이다. 여기서 L 은 보의 전체 길이를 나타내며, x_c 는 크랙의 위치를 나타낸다. M 과 J 는 각각 끝단질량과 그의 관성모멘트를 의미하며 P_a 와 P_t 는 압축력과 종동력을 각각 나타낸다. 또 η 는 힘의 경사계수이며 만약 경사계수 $\eta=0$ 인 경우는 순수 압축력이 되어 보는 오일러 좌굴문제가 되며, $\eta=1$ 일 때는 순수 종동력이 되어 Beck의 플러터 문제가 된다.⁽⁴⁾ Fig. 2는 크랙위치에서의 보의 단면을 나타낸 것으로 b, h 그리고 a 는 각각 보의 가로와 세로, 그리고

크랙의 깊이를 표현하고 있다.

자유진동에 대하여 티모셴코 보 이론을 적용한 외팔보의 운동방정식을 확장된 Hamilton 원리를 이용하여 유도하였으며, 유도되어진 전단변형 $\psi(x,t)$ 와 횡방향 변위 $y(x,t)$ 에 대한 각각의 운동방정식에서 전단변형 $\psi(x,t)$ 를 소거시키면 횡변위 $y(x,t)$ 에 대한 운동방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.⁽⁹⁾

$$EI \left(1 - \frac{P}{\kappa GA} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \rho I \left[1 + \frac{E}{\kappa G} - \frac{P}{\kappa GA} \right] \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\kappa G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0 \quad (1)$$

여기서 κ 는 전단계수, A 와 G 는 각각 보의 단면적과 전단 탄성계수를 나타내고 있다. m, E , 그리고 I 는 각각 보의 단위 길이당 질량, 영계수, 그리고 보의 단면 2차 모멘트를 의미하며, ρ 는 보의 밀도이다. 횡변위와 전단변형은 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y(x,t) = Y(x) e^{i\omega_n t}, \quad (2)$$

$$\psi(x,t) = \phi(x) e^{i\omega_n t} \quad (3)$$

여기서 ω_n 은 보의 고유진동수이며 $i = \sqrt{-1}$ 를 나타낸다. 식 (2)를 식 (1)에 대입하여 무차원화 하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$Y^{iv} + \left[\frac{(1 - \omega^2 \beta r^2)p + \omega^2(\beta + r^2)}{(1 - p\beta)} \right] Y'' + \frac{\omega^2(\omega^2 \beta r^2 - 1)}{(1 - p\beta)} Y = 0 \quad (4)$$

여기서 $()'$ 은 무차원 좌표 $\xi (=x/L)$ 에 대한 미분을 나타내며, 식 (4)에 사용된 무차원 변수는 다음과 같다.

$$\omega^2 = \frac{mL^4 \omega_n^2}{EI}, \quad \beta = \frac{Er^2}{\kappa G}, \quad r^2 = \frac{I}{AL^2}, \quad p = \frac{PL^2}{EI} \quad (5)$$

여기서 세장비 s 는 $1/r$ 이다. 또, 무차원화 된 경계조건과 크랙위치에서의 연속조건은 각각 다음과 같다.

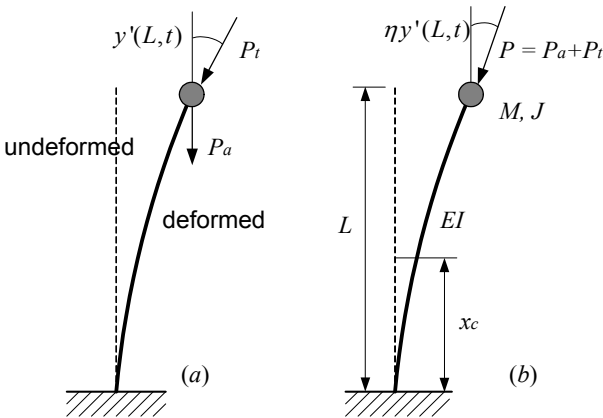


Fig. 1 Cracked beams subjected to forces

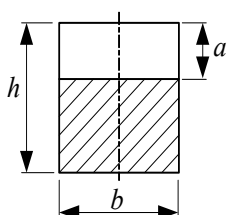


Fig. 2 Cross section of beam

$$Y_1(0) = \phi_1(0) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi_2(1)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial Y_2(1)}{\partial \xi} - \phi_2(1) = \mu \omega^2 \beta Y_2(1)$$

$$Y_1(\xi_c) = Y_2(\xi_c), \quad \frac{\partial^2 Y_1(\xi_c)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 Y_2(\xi_c)}{\partial \xi^2}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^3 Y_1(\xi_c)}{\partial \xi^3} = \frac{\partial^3 Y_2(\xi_c)}{\partial \xi^3}, \quad k [\phi_2(\xi_c) - \phi_1(\xi_c)] = \frac{\partial \phi_2(\xi_c)}{\partial \xi}$$

여기서

$$\xi_c = \frac{x_c}{L}, \quad k = \frac{KL}{EI} \quad (8)$$

이다. 식 (4)의 일반해는 다음과 같다.

$$Y_1(\xi) = A_1 \sinh(\lambda_1 \xi) + A_2 \cosh(\lambda_1 \xi) + A_3 \sin(\lambda_2 \xi) + A_4 \cos(\lambda_2 \xi) \quad ; (0 \leq \xi \leq \xi_c), \quad (9)$$

$$Y_2(\xi) = A_5 \sinh(\lambda_1 \xi) + A_6 \cosh(\lambda_1 \xi) + A_7 \sin(\lambda_2 \xi) + A_8 \cos(\lambda_2 \xi) \quad ; (\xi_c \leq \xi \leq 1)$$

여기서

$$\lambda_{1,2} = \left[\frac{\sqrt{k_2} \mp k_1}{2} \right]^{1/2} \quad (10)$$

이며, k_1 과 k_2 는 각각 다음과 같다.

$$k_1 = \frac{(1 - \omega^2 \beta r^2)p + \omega^2(\beta + r^2)}{(1 - p\beta)}, \quad (11)$$

$$k_2 = k_1^2 - 4\omega^2 \frac{(\omega^2 \beta r^2 - 1)}{(1 - p\beta)}$$

전단변형에 대해서도 위와 동일한 방법으로 전개하면 다음과 같이 해를 구할 수 있다.

$$\phi_1(\xi) = q_1 A_2 \sinh(\lambda_1 \xi) + q_1 A_1 \cosh(\lambda_1 \xi) + q_2 A_4 \sin(\lambda_2 \xi) - q_2 A_3 \cos(\lambda_2 \xi) \quad ; (0 \leq \xi \leq \xi_c),$$

$$\phi_2(\xi) = q_1 A_6 \sinh(\lambda_1 \xi) + q_1 A_5 \cosh(\lambda_1 \xi) + q_2 A_8 \sin(\lambda_2 \xi) - q_2 A_7 \cos(\lambda_2 \xi) \quad ; (\xi_c \leq \xi \leq 1) \quad (12)$$

여기서

$$q_1 = (1 - p\beta)\lambda_1 + \frac{\omega^2 \beta}{\lambda_1}, \quad q_2 = (p\beta - 1)\lambda_2 + \frac{\omega^2 \beta}{\lambda_2} \quad (13)$$

3. 크랙 모델링

크랙에 의한 추가 에너지는 Castigliano의 정리에 의하여 다음과 같이 무차원화 된 유연행렬로 표현할 수 있다.⁽⁴⁾

$$C = 6\pi(1 - \nu^2)H \int_0^\alpha [\alpha F_t^2(\alpha)] d\alpha \quad (14)$$

여기서 ν 는 푸아송 비이며, 사용된 무차원 매개 변수와 $F_t(\alpha)$ 는 각각 다음과 같다.

$$H = \frac{h}{L}, \quad \alpha = \frac{a}{h},$$

$$F_t(\alpha) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \left[0.923 + 0.199 \left(1 - \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right)^4 \right]}{\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \quad (15)$$

여기서 무차원 변수 H 와 세장비 s 와의 관계는

$$H = \frac{\sqrt{12}}{s} \quad (16)$$

이 된다. 식 (7)에 사용된 무차원 회전 스프링 상수는 식 (14)의 역수, 즉 $k = C^{-1}$ 이다. 식 (9), (12)의 미지수들은 식 (6), (7)의 경계조건과 연속 조건을 이용하여 각각 구할 수 있다. 또 계의 고유진동수는 다음과 같은 고유치의 기본 형태로 변환하여 쉽게 구할 수 있다.

$$\Lambda \mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad |\Lambda| = 0 \quad (17)$$

여기서 Λ 는 경계조건을 대입하여 얻은 각각의 식을 행렬형태로 표현한 것이다. 또 $|\Lambda|$ 는 Λ 의 행렬식을 나타내고 있으며, \mathbf{X} 는 다음과 같다.

$$\mathbf{X} = [A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8]^T \quad (18)$$

여기서 위첨자 T는 전치를 의미한다.

4. 이론해석 결과 및 고찰

이 연구에서는 이론해석에서 유도된 운동방정식을 이용하여 크랙을 가진 티모셴코 보의 세장비 및 끝단질량과 크랙의 영향에 따른 보의 좌굴 및 플러터 임계 종동력과 보의 1차 모드 고유진동수

Table 1 Comparison between this study and reference($\mu = 1, j = 0.1, s = 100$)

Subtangential coefficient	Flutter critical follower force, p_f	
	This study	Reference(3)
$\eta = 0.5$	14.13	14.19
$\eta = 0.8$	10.42	10.44
$\eta = 1$	8.856	8.892

Table 2 Divergence critical follower force of cracked beams with tip mass($s = 30$)

α	ξ_c	η	Divergence critical follower force, p_d
0		0	2.46
		0.1	2.82
		0.3	4.03
0.1		0	2.00
		0.1	2.29
		0.3	3.23
		0.5	5.82
		0.5	5.82
0.3	0.5	0	2.15
		0.1	2.43
		0.3	3.37
		0.5	5.89
		0	2.23
		0.1	2.54
0.7		0.3	3.56
		0.5	6.36
		0	1.35
		0.1	1.53
		0.3	2.09
		0.5	3.43
0.1		0.6	5.78
		0	1.61
		0.1	1.82
		0.3	2.45
		0.5	3.75
		0.6	5.34
0.5	0.5	0	1.83
		0.1	2.07
		0.3	2.81
		0.5	4.43
		0.6	6.42
		0.7	2.81

변화에 대하여 수치해석하고 고찰 하였다.

먼저 이 연구의 타당성을 검토하기 위하여 Table 1에 크랙이 없는 경우 참고문헌(3)에서 제시한 보의 임계값과 이 연구에서 구한 결과들을 비교 하였다. 여기서 볼 수 있는 것처럼 참고문헌의 결과와 거의 일치하며, 따라서 이 연구의 수식 전개 및 해석결과는 신뢰할 수 있다고 판단된다.

Table 2는 세장비가 30으로 일정한 경우 크랙과 경사계수의 영향에 따른 보의 좌굴 임계 종동력을 나타낸 것이다. 좌굴 임계 종동력의 경우 끝질량 및 그의 관성모멘트에 관계없이 항상 일정하다. 또 경사계수가 클수록 임계값은 커지며, 크랙의 크기와 임계값은 서로 반비례적인 경향을 갖는다.

Table 3은 세장비와 끝질량이 각각 30과 0.3인

Table 3 Flutter critical follower force of cracked beams with tip mass($s = 30$ and $\mu = 0.3$)

α	ξ_c	η	Flutter critical follower force, p_f		
			$j = 0$	$j = 0.3$	$j = 0.5$
0		0.5	15.2	-	-
		0.6	14.9	8.30	7.91
		0.8	14.4	6.13	5.99
		1	13.2	4.81	4.96
		0.5	14.0	-	-
0.1		0.6	13.7	7.86	7.35
		0.8	12.8	5.56	5.36
		1	11.5	4.39	4.35
		0.5	16.6	-	-
		0.6	16.1	9.84	9.29
0.3	0.5	0.8	14.1	6.53	6.46
		1	11.5	5.09	5.22
		0.5	16.4	-	-
		0.6	15.7	10.1	9.68
		0.8	13.4	6.61	6.71
0.7		1	10.8	5.07	5.34
		0.5	12.9	-	-
		0.5	12.8	8.46	-
		0.7	12.9	5.36	4.87
		1	12.8	4.11	3.82
0.5	0.5	0.5	-	-	-
		0.6	19.5	-	-
		0.8	17.4	7.90	7.64
		1	14.2	5.75	5.83
		0.5	-	-	-
0.7		0.6	-	-	-
		0.8	15.7	8.75	9.04
		1	11.8	5.96	6.54
		0.5	-	-	-

경우 크랙과 끝질량의 관성모멘트 변화에 따른 보의 플러터 임계 종동력을 나타낸 것이다. 좌굴 임계 종동력과 동일하게 끝질량의 변화에 따른 보의 임계값은 동일하나 관성모멘트의 영향에 따라서는 변함을 알 수 있다. 크랙과 끝질량의 관성 모멘트의 영향에 관계없이 경사 계수와 플러터 임계값은 서로 반비례적이다. 또 크랙의 크기 및 위치가 각각 0.5와 0.1일 때 $j = 0$ 에서 경사 계수와 관계없이 거의 일정한 임계값을 갖는 것은 보의 플러터 임계값 곡선의 꼭지점 부분이기 때문이라 판단된다.⁽⁷⁾

Fig. 3은 크랙의 크기와 경사계수가 각각 0.5, 0.8인 경우 끝질량과 그의 관성모멘트의 영향에 따른 보의 플러터 임계 종동력을 도시한 것이다. 전반적으로 끝질량의 관성모멘트의 영향에 관계없이 끝질량이 커질수록 임계값은 커지는 경향을 나타낸다. 크랙의 위치가 0.5일 때 끝질량의 크기가 0.24보다 커지면 관성모멘트가 0.5인 경우에 비하여 0.3일 때 임계값은 더 커지며, 크랙의 위치가 0.3일 때는 0.16을 경계로 같은 경향이 나타난다.

Fig. 4는 끝질량의 크기가 일정한 경우 크랙의 위치 및 끝질량의 관성모멘트가 보의 플러터 임계 종동력에 미치는 영향을 나타낸 것이다. 경사 계수와 관성모멘트의 영향에 관계없이 보의 임계값은 크랙의 크기가 클수록 낮아짐을 알 수 있다. 경사 계수가 1인 경우 $\alpha > 0.27$ 의 범위에서 $j = 0.3$ 일 때가 $j = 0.5$ 보다 더 큰 임계값을 가진다. 또 Fig. 4(b)는 크랙의 위치변화에 따른 보

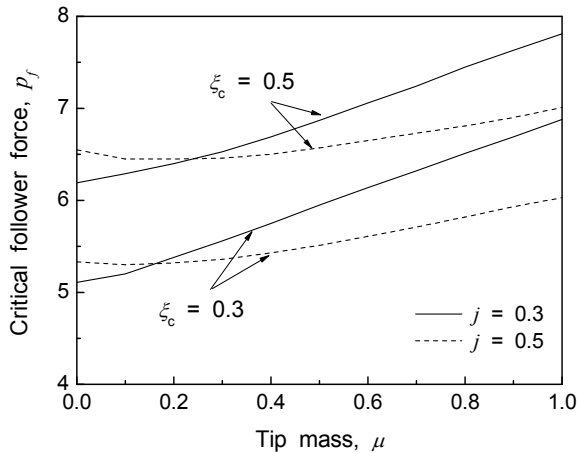
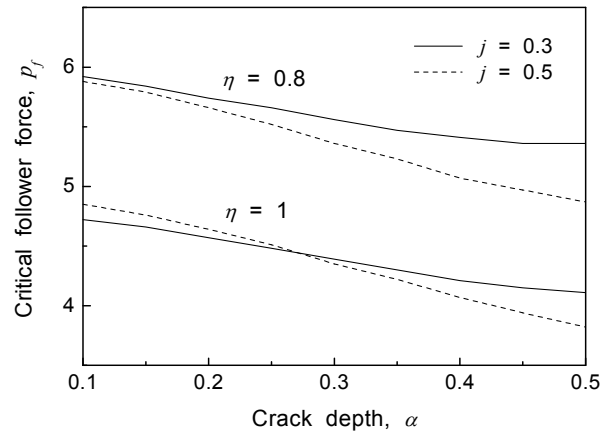
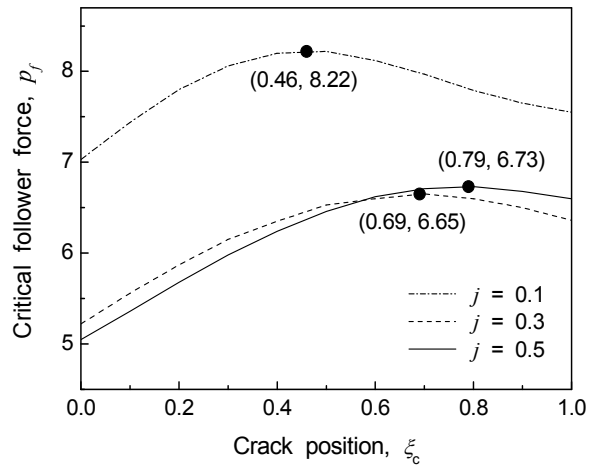


Fig. 3 Flutter critical follower force versus tip mass for $s = 30$, $\alpha = 0.5$ and $\eta = 0.8$



(a) $\xi_c = 0.1$



(b) $\alpha = 0.3$, $\eta = 0.8$

Fig. 4 Effect of crack on flutter critical follower force of cracked beams ($\mu = 0.3$, $s = 30$)

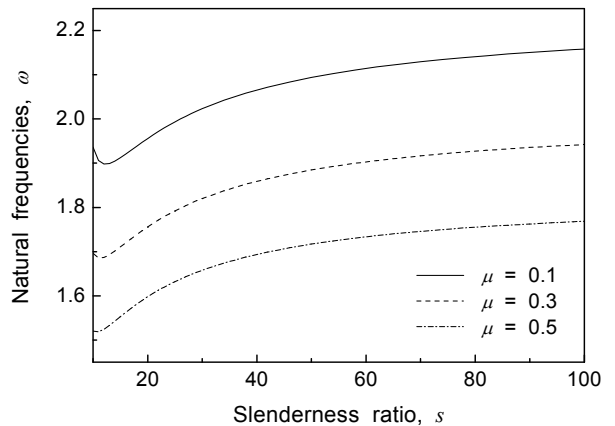


Fig. 5 Effect of slenderness ratio and tip mass on natural frequencies of cracked beam ($j = 0.3$, $\xi_c = 0.5$, $p = 4$, $\eta = 0.8$ and $\alpha = 0.3$)

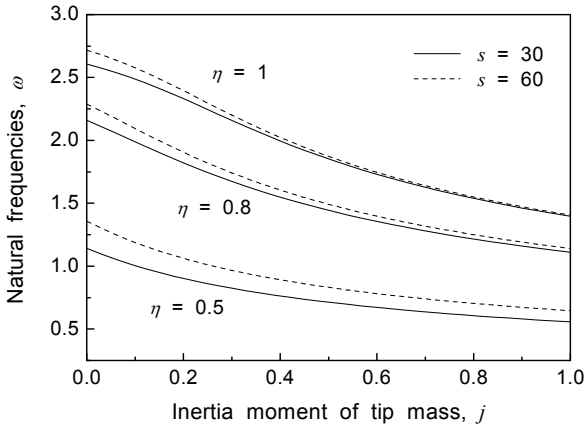


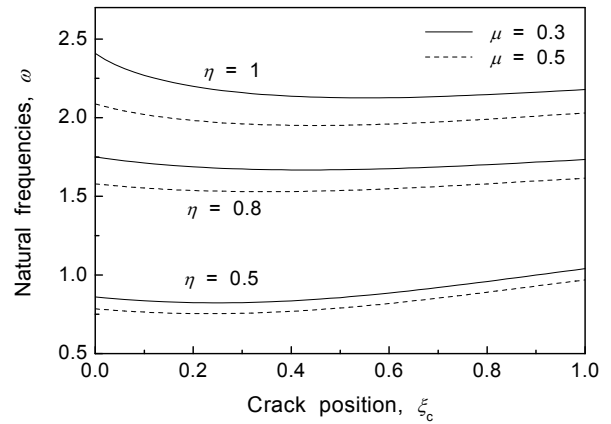
Fig. 6 Effect of inertia moment of tip mass and subtangential coefficient on natural frequencies of cracked beam($\mu = 0.3$, $\xi_c = 0.5$, $p = 4$ and $\alpha = 0.3$)

의 플러터 임계 종동력을 나타낸 것으로 크랙의 위치가 보의 끝단으로 위치되어 질 때 임계값은 점점 증가되었다 임의의 기점에서 다시 감소되는 경향을 보인다. 관성모멘트의 크기가 0.1인 경우는 크랙의 위치가 0.46, 그리고 관성모멘트가 0.3, 0.5일 때는 각각 0.69와 0.79를 기점으로 위와 같은 현상이 일어난다.

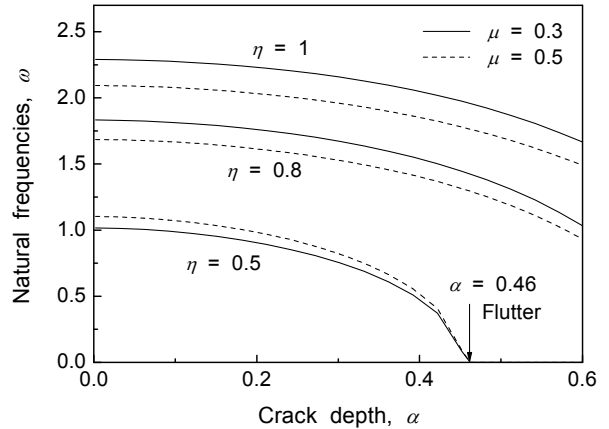
Fig. 5는 크랙의 크기 및 위치가 각각 0.3, 0.5 이고 경사 계수가 0.8, 그리고 관성모멘트가 0.3 으로 일정한 경우 세장비와 끝질량의 변화에 따른 보의 고유진동수 변화를 나타내었다. 종동력의 크기는 보의 안정영역인 $p = 4$ 로 하였다. 일반적인 결과와 마찬가지로 세장비가 클수록 보의 고유진동수는 점점 커지면서 수렴되며, 끝질량과 고유진동수는 서로 반비례적인 경향을 보인다.

Fig. 6은 크랙의 크기와 위치 및 끝질량이 일정한 경우 끝질량의 관성모멘트 변화에 따른 고유진동수 변화를 도시하였다. 경사계수와 보의 고유진동수는 서로 비례적이며, 관성모멘트가 커질수록 보의 고유진동수는 점점 작아진다. 또 경사 계수가 클수록 세장비의 영향이 더 작아짐을 알 수 있다.

Fig. 7은 세장비 30, 관성모멘트가 0.3으로 일정한 경우 크랙, 경사계수, 그리고 끝질량의 영향에 따른 보의 고유진동수 변화를 도시한 것이다. 크랙과 끝질량에 관계없이 보의 고유진동수는 경사 계수와 서로 비례적인 경향을 가지며, 끝질량과는 반비례적인 경향을 보인다. Fig. 7(a)에서 크랙



(a) $\alpha = 0.3$



(b) $\xi_c = 0.5$

Fig. 7 Effect of inertia moment of tip mass and subtangential coefficient on natural frequencies of cracked beam($j = 0.3$, $p = 4$ and $s = 30$)

의 크기가 커질수록 보의 고유진동수는 점점 감소하다 다시 증가하는 경향을 보이고 있으며 Fig. 7(b)에서 크랙의 크기가 증가할수록 보의 고유진동수는 감소한다. 경사 계수가 0.5인 경우 크랙의 크기가 0.46 에서 플러터 불안정이 일어남을 알 수 있다.

5. 결 론

이 연구에서는 티모셴코 보에 경사 종동력이 작용하는 경우 보의 세장비, 종동력의 경사계수, 끝질량 및 그의 관성모멘트, 그리고 크랙이 보의 좌굴 및 플러터 임계 종동력에 미치는 영향에 대하여 살펴 보았다. 크랙이 존재할 때 크랙이 존재하지 않는

경우에 비하여 더 작은 종동력 값에서 좌굴 불안정을 유발하며, 플러터 불안정 영역에서는 크랙이 존재하는 경우 오히려 더 큰 종동력 값에서 계는 불안정하게 된다. 보의 자유단에 끝질량을 고려하는 경우 끝질량은 좌굴 및 플러터 임계 종동력에 영향을 미치지 않지만, 관성모멘트는 보의 플러터 임계 종동력 값을 낮추는 역할을 하기 때문에 보의 안정성 해석에 있어서 끝질량의 관성모멘트는 반드시 고려해야 한다. 또 관성모멘트가 커질수록 최대 임계 종동력을 나타내는 크랙의 위치는 외팔보의 고정단에서부터 멀어진다.

후 기

이 논문은 동의대학교 대학자체 일반연구과제비 지원에 의하여 연구되었음(2008AA152).

참고문헌

- (1) Rao, B. N. and Rao, G. V., 1988, "Stability of a Cantilever Column Resting on an Elastic Foundation Subjected to a Subtangential Follower Force at Its Free End," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 125, No. 3, pp. 570~577.
- (2) Saito, H. and Otomi, K., 1979, "Vibration and Stability of Elastically Supported Beams Carrying an Attached Mass under Axial and Tangential Loads," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 62, No. 2, pp. 257~266.
- (3) Sato, K., 1996, "Instability of a Calmped- Elastically Restrained Timoshenko Column Carrying a Tip Load, Subjected to a Follower Force," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 194, No. 4, pp. 623~630.
- (4) Yoon, H. I., Lim, S. H. and Yu, J. S., 1997, "Stability of Beck's Column with a Rotatory Spring Restraining Its Free End," *Transactions of KSME A*, Vol. 21, No. 9, pp.1385~1391.
- (5) Lee, S. Y., Kuo, Y. H. and Lin, F. Y., 1992, "Stability of a Timoshenko Beam Resting on a Winkler Elastic Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 153, No. 2, pp. 193~202.
- (6) Rosa, M. A., 1995, "Free Vibrations of Timoshenko Beams on Two-parameter Elastic Foundation," *Computers and Structures*, Vol. 57, No. 1, pp. 151~156.
- (7) Son, I. S. and Yoon, H. I., 2008, "Effects of Crack on Stability of Timoshenko Beams Subjected to Subtangential Follower Force," *KSNVE*, Vol. 18, No. 12, pp. 1327~1334.
- (8) Son, I. S., Yoon, H. I. and Ahn, T. S., 2007, "Stability Analysis of Cracked Cantilever Beam with Tip Mass and Follower Force," *KSNVE*, Vol. 17, No. 7, pp. 605~610.
- (9) Meirovitch, L., 1967, *Analytical Methods in Vibration*, The Macmillan Company, New York, Chapter 5.