

## 등가정하중을 사용한 선형 동적반응 위상최적설계 기초연구

장환학\* · 이현아\*\* · 박경진†

(2009년 6월 29일 접수, 2009년 10월 12일 수정, 2009년 10월 19일 심사완료)

### Preliminary Study on Linear Dynamic Response Topology Optimization Using Equivalent Static Loads

Hwan-Hak Jang, Hyun-Ah Lee and Gyung-Jin Park

**Key Words :** Topology Opimtization(위상최적설계), Equivalent Static Loads(등가정하중), Artificial Material Method(가상 재료법), Element Elimination Method(요소 제거법)

#### Abstract

All the forces in the real world act dynamically on structures. Design and analysis should be performed based on the dynamic loads for the safety of structures. Dynamic (transient or vibrational) responses have many peaks in the time domain. Topology optimization, which gives an excellent conceptual design, mainly has been performed with static loads. In topology optimization, the number of design variables is quite large and considering the peaks is fairly costly. Topology optimization in the frequency domain has been performed to consider the dynamic effects; however, it is not sufficient to fully include the dynamic characteristics. In this research, linear dynamic response topology optimization is performed in the time domain. First, the necessity of topology optimization to directly consider the dynamic loads is verified by identifying the relationship between the natural frequency of a structure and the excitation frequency. When the natural frequency of a structure is low, the dynamic characteristics (inertia effect) should be considered. The equivalent static loads (ESLs) method is proposed for linear dynamic response topology optimization. ESLs are made to generate the same response field as that from dynamic loads at each time step of dynamic response analysis. The method was originally developed for size and shape optimizations. The original method is expanded to topology optimization under dynamic loads. At each time step of dynamic analysis, ESLs are calculated and ESLs are used as the external loads in static response topology optimization. The results of topology optimization are used to update the design variables (density of finite elements) and the updated design variables are used in dynamic analysis in a cyclic manner until the convergence criteria are satisfied. The updating rules and convergence criteria in the ESLs method are newly proposed for linear dynamic response topology optimization. The proposed updating rules are the artificial material method and the element elimination method. The artificial material method updates the material property for dynamic analysis at the next cycle using the results of topology optimization. The element elimination method is proposed to remove the element which has low density when static topology optimization is finished. These proposed methods are applied to some examples. The results are discussed in comparison with conventional linear static response topology optimization.

#### 1. 서론

위상최적설계는 구조최적설계의 하나로 주어진 구조물의 설계영역 안에서 재료의 분포상태를 결정한다.<sup>(1)</sup> Benseoe와 Kikuchi에 의해 균질화법

† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계정보경영공학부  
E-mail : gjpark@hanyang.ac.kr  
TEL : (031)400-5246 FAX : (031)407-0755  
\* 한양대학교 대학원 기계공학과  
\*\* 한양대학교 대학원 기계공학과

(homogenization method)이 제안되고,<sup>(2)</sup> 이후 밀도법(density method)이 Bense에 의해 제안되었다.<sup>(3)</sup> 밀도법은 매개변수화된 각 유한요소의 밀도를 설계변수로 한다. 설계변수 값이 0에 가까우면 재료가 없고, 1에 가까우면 재료가 존재하는 것으로 간주한다. 밀도법은 등방성 재료 모델을 기반으로 한다. 수치적 구현이 뛰어나 최근 많이 사용되며,<sup>(4)</sup> GENESIS<sup>(5)</sup>와 NASTRAN<sup>(6)</sup> 같은 상용소프트웨어는 밀도법 기반으로 되어있다. 위상최적설계 결과는 상세설계를 하기 전 기초가 되는 개념설계로 사용된다.

일반적으로 구조물에 가해지는 하중은 동하중이다. 그러므로 동하중을 적용한 설계를 수행해야 한다. 구조물에 대한 위상최적설계 시 동하중을 고려하기 위한 연구가 진행되어 왔다.<sup>(4,7-10)</sup> 동적반응 최적설계는 시간영역과 주파수영역으로 나눌 수 있다.<sup>(4)</sup> 이 기준은 위상최적설계에 동일하게 적용된다. 시간영역에서의 선형 동적반응 위상최적설계는 시간에 따라 민감도를 직접 계산하는 방법<sup>(7)</sup>이다. 주파수영역 문제는 진동을 기반으로 사용된다.<sup>(8-10)</sup> 시간영역에서의 선형 동적반응 위상최적설계는 민감도 해석 등에 시간과 비용이 많이 든다.<sup>(4)</sup> 주파수영역에서 선형 동적반응 위상최적설계는 모든 시간의 민감도를 구할 필요가 없으므로 시간과 비용이 절약되지만<sup>(4)</sup> 이로 인해 모든 동적 특성을 고려할 수 없다.

구조물의 동적반응을 최적설계에 적용하는 방법은 여러 가지가 있다. 그 중 등가정하중법(equivalent static loads method)은 2000년 최우석, 박경진에 의해 도입되었다. 매 시간단계에 대한 등가정하중(equivalent static loads, ESLs)이 정의되고, 이를 선형 최적설계 시 다중하중조건으로 처리하여 설계를 수행하는 방법이 제안되었다.<sup>(11)</sup> 등가정하중은 다양한 연구에 적용되었고 등가정하중을 이용하여 도출된 설계해가 KKT 필요조건을 만족한다는 것을 수학적으로 증명하였다.<sup>(12)</sup> 2006년 어떠한 경우에 구조물의 동적특성을 설계에 반영해야 하는지 검증되었다.<sup>(13)</sup> 등가정하중을 사용한 치수 및 형상 최적설계는 연구되었으나, 등가정하중을 사용한 선형 동적반응 위상최적설계는 수행된 적이 없다.<sup>(14,15)</sup>

동적반응을 고려한 위상최적설계의 필요성을 이야기하고, 등가정하중을 사용하여 선형 동적반응 위상최적설계를 수행하는 것이 논문의 목적이다. 고유진동수(natural frequency)와 가진주파수(excitation frequency)의 상관관계를 통하여 선형 동적반응 위상최적설계의 필요성에 대해 설명한다. 선형 동적반응 위상최적설계

가 필요한 경우에는 등가정하중법을 사용하고 필요하지 않은 경우에는 선형 정적반응 위상최적설계를 수행한다. 예제를 통해 선형 정적반응 위상최적설계와 선형 동적반응 위상최적설계를 수행하고 그 결과에 대해 논한다.

## 2. 선형 동적반응 위상최적설계 수행의 필요성

일반적으로 설계는 개념설계와 상세설계로 나누어진다. 구조최적설계에서 위상최적설계가 개념설계에 속한다면, 치수와 형상최적설계는 상세설계에 속한다. 개념설계인 위상최적설계 결과는 상세설계인 치수 및 형상최적설계 유한요소모델의 기초가 된다. 그러므로 위상최적설계 시 동적반응의 고려 여부에 따라 상세설계의 결과가 차이가 날 수 있다. 따라서 동적반응을 위상최적설계에 적용해야 한다. 그러나 선형 동적반응 위상최적설계 결과가 선형 정적반응 위상최적설계 결과와 비슷하다면 시간과 비용상의 문제로 선형 동적반응 위상최적설계를 수행하지 않아도 된다. 따라서 선형 동적반응 위상최적설계가 필요한 경우와 필요하지 않은 경우를 구분하고, 필요한 경우 시간영역에서 선형 동적반응 위상최적설계를 수행한다.

### 2.1 위상최적설계

밀도법 기반인 위상최적설계 시 매개변수화된 각 유한요소의 밀도가 설계변수이다. 설계변수 값이 0에 가까우면 재료가 없는 것으로 간주하고 설계변수 값이 1에 가까우면 재료가 존재하는 것으로 간주한다. 일반적으로 위상최적설계는 강성을 최대화하는 것을 목적으로 하며, 이것은 평균굴성(compliance)을 최소화하는 것과 같다.<sup>(1)</sup> 이를 정식화하면 식 (1)과 같다.<sup>(4)</sup>

$$\text{Find } \mathbf{b} \quad (1a)$$

$$\text{to minimize } \text{compliance} \quad (1b)$$

$$\text{subject to } \sum \mathbf{v}_e \mathbf{b} \leq V \quad (1c)$$

$$0 < \mathbf{b}_{\min} \leq \mathbf{b} \leq 1 \quad (1d)$$

여기서  $\mathbf{b}$ 는 설계변수,  $\mathbf{v}_e$ 는 각 요소의 부피,  $V$ 는 전체 구조물의 부피이다. 각 요소의 물성치와 설계변수의 관계는 식 (2)와 같다.

$$\mathbf{E} = \mathbf{b}^{(k)p} \mathbf{E}_0 \quad (2a)$$

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{b}^{(k)q} \boldsymbol{\rho}_0 \quad (2b)$$

여기서  $\mathbf{E}$ 는 등방성 탄성 재료(isotropic elastic material)에서의 영률(Young's modulus)이고,  $\boldsymbol{\rho}$ 는 재

료의 밀도이다.  $\mathbf{E}_0$  는 초기 영률,  $\rho_0$  는 초기 재료 밀도이다. 일반적으로  $p$ 는 2에서 3의 값을 가지고,  $q$ 는 1의 값을 가진다.<sup>(1)</sup>

2.2 일반적인 설계 관점에서 본 선형 동적반응 위상최적설계 수행기준

구조물에 가해지는 외부하중의 가진주파수가 매우 작은 값인 경우에 구조물의 거동은 외부하중보다 구조물의 고유한 특성의 영향을 많이 받는다. 구조물에 가해지는 외부하중의 가진주파수가 매우 큰 값인 경우, 구조물에 미치는 그 영향을 무시할 수 없으므로 동하중의 특성을 감안해야 한다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (3)$$

식 (3)은 동하중이 작용하는 비감쇠계의 평형 방정식이다.  $\mathbf{M}$  은 질량행렬,  $\mathbf{K}$  는 강성행렬,  $\mathbf{x}$  변위 벡터,  $\mathbf{f}$  는 동하중벡터이다. 식 (3)을 모드중첩법을 사용하여 전개하면 식 (4)와 같다.

$$\ddot{z}_i + w_i^2 z_i = q_{ji} p_j \sin(w_j^f t); \quad j=1, \dots, n \quad (4)$$

여기서  $w_i$  는  $i$  번째 고유진동수,  $q_{ji}$  는 모달행렬(modal matrix),  $p_j \sin(w_j^f t)$  는 가진주파수가  $w_j$  인 하중이다.<sup>(13)</sup> 식 (4)의 초기조건이 모두 0이라 가정하면 해는 식 (5)와 같다.

$$x_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{q_{ki} q_{ji} p_j}{w_i^2 - (w_j^f)^2} \left( \sin(w_j^f t) - \frac{w_j^f}{w_i} \sin(w_i t) \right) \quad (5)$$

여기서  $\sin(w_j^f t)$  는 특수해(particular solution),

$\frac{w_j^f}{w_i} \sin(w_i t)$  는 일반해(general solution)이고,  $\frac{w_j^f}{w_i}$

값은 고유진동수와 가진주파수의 관계를 나타낸다. 가진주파수보다 고유진동수가 큰 구조물의 경우 특수해가 구조물의 변형에 큰 영향을 미치기 때문에 선형 정적반응 위상최적설계와 선형 동적반응 위상최적설계의 결과가 같을 것이라 예상된다. 이러한 관계에 따라 구조물의 가진주파수가 고유진동수에 비해 매우 낮으면 그 구조물은 마치 정적계처럼 거동한다는 내용이 해석적으로 밝혀져 있다.<sup>(13)</sup>

위의 동적반응 최적설계 기준을 위상최적설계에 적용하여 선형 동적반응 위상최적설계가 필요한 경우와 필요하지 않은 경우로 구분한다. 고유진동

수가 가진주파수보다 큰 구조물의 경우( $\frac{w_j^f}{w_i} \ll 1$ )

이를 강성 구조물(stiff structure)이라고 명명한다. 이 경우에는 구조물이 정적계처럼 거동하므로 선

형 정적반응 최적설계를 사용한다. 반대로 고유진동수가 가진주파수보다 작은 구조물의 경우

( $\frac{w_j^f}{w_i} \gg 1$ ) 이를 연성 구조물(mild structure)이라고

명명한다. 이 경우 일반해가 구조물의 변형에 큰 영향을 미치므로 동적효과를 고려해야 한다. 따라서 선형 정적반응 위상최적설계와 선형 동적반응 위상최적설계의 결과가 다를 것이라 예상된다. 그러므로 고유진동수가 가진주파수보다 작은 경우는 등가정하중을 사용한 선형 동적반응 최적설계를 사용한다.

정립된 이론을 확인하기 위해 강성 구조물과 연성 구조물 두 가지 경우로 예제를 구분한다. 각 경우에 대해 선형 정적반응 위상최적설계와 선형 동적반응 위상최적설계를 수행하고 결과를 비교한다.

3. 등가정하중법

시간영역에서 선형 동적반응 위상최적설계를 수행하는 것은 어렵기 때문에 대부분 주파수영역에서 선형 동적반응 위상최적설계를 수행한다. 주파수영역은 시간에 따른 동적 특성을 모두 고려하지 못한다. 그러나 등가정하중법은 해석적 방법에 비해 복잡한 미분 방정식을 거치지 않고, 시간영역에서 동적특성을 표현한 위상최적설계를 수행한다.<sup>(4)</sup>

3.1 등가정하중의 정의

구조물에 동하중이 가해질 때 동하중에 의해 생기는 변위장과 동일한 변위장을 만들 수 있는 정하중이 등가정하중이다.<sup>(4)</sup> 외력과 관성력으로 이루어진 등가정하중은 모든 시점점에서 계산되기 때문에 시간에 따른 구조물의 거동을 빠짐없이 고려할 수 있다. 또한 시간영역에서 시간중속 제한조건의 시간중속성을 제거하기 때문에 정적반응 최적설계 방법을 그대로 사용할 수 있다.

등가정하중의 산출방법은 아래와 같다.

$$\mathbf{M}(\mathbf{b})\ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{z}(t) = \mathbf{f}(t); \quad t = 0, \dots, m \quad (6)$$

$$\mathbf{f}_{eq}(s) = \mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{z}(s); \quad s = 0, \dots, q \quad (7)$$

$\mathbf{M}(\mathbf{b})$  는 질량행렬,  $\mathbf{K}(\mathbf{b})$  는 강성행렬,  $\mathbf{z}(t)$  는 동적 변위벡터,  $\mathbf{f}_{eq}(s)$  는 등가정하중벡터,  $\mathbf{z}(s)$  는 정적 변위벡터,  $t$ 와  $s$ 는 시점점 개수이다. 등가정하중의 개수는 시점점 개수와 동일하므로 표기법(notation)  $t$  와  $s$ 는 같은 값을 가진다. 식 (6)은 유한요소법을 사용한 동적반응 해석의 평형방정식이다. 식 (7)과 같이 주어진 강성행렬과 임의의 시간의 동

적변위벡터를 곱하여 등가정하중이 계산된다. 동적반응 최적설계에 관한 치수 및 형상 최적설계에 대한 알고리즘은 잘 구성되어 있다. 그러나 위상 최적설계에 적용된 적은 없기 때문에 동적반응 위상최적설계를 위한 등가정하중법이 필요하다.

3.2 위상최적설계를 위한 등가정하중

등가정하중을 사용한 선형 동적반응 위상최적설계 과정은 Fig. 1과 같다. 설계과정은 해석영역과 설계영역으로 나눈다. 해석영역에서 식 (6)을 사용하여 동적반응 해석을 수행하고, 그 결과를 바탕으로 식 (7)에서 등가정하중을 산출한다. 설계영역에서는 산출된 등가정하중을 사용하여 위상최적설계를 수행하고, 제한조건 만족여부를 확인한다. 이 과정이 설계주기 (design cycle)라 하며 수렴조건을 만족할 때까지 반복적으로 수행된다. 설계과정 내용은 아래와 같다.

과정 1. 설계주기 번호  $k$ 와 설계변수  $\mathbf{b}^{(k)}$ 의 초기값을 선정한다. ( $k=0, \mathbf{b}^{(k)} = \mathbf{b}^{(0)}$ )

과정 2. 식 (6)을 사용하여 동적반응 해석 수행한다.

과정 3. 식 (7)을 사용하여 등가정하중을 계산한다.

과정 4. 식 (8)의 정식화로 선형 정적반응 위상 최적설계를 수행한다.

Find  $\mathbf{b}; \quad i=1, \dots, n \quad (8a)$

to minimize  $f(\mathbf{b}, \mathbf{z}) \quad (8b)$

subject to  $\mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{z}(s) = \mathbf{f}_{eq}(s); \quad s=1, \dots, q \quad (8c)$

$g_j(\mathbf{b}, \mathbf{z}) \leq 0; \quad j=1, \dots, m \quad (8d)$

$0 < \mathbf{b}_{min} \leq \mathbf{b} \leq 1 \quad (8e)$

여기서  $n$ 은 설계변수의 수,  $s$ 는 등가정하중 세트 수,  $j$ 는 제한조건의 수이다.

과정 5.  $k=0$ 일 때, 과정 6으로 간다.

$k > 0$ 일 때, 수렴조건을 확인한다. 확인 결과 수렴조건을 만족하면 과정을 종료한다. 수렴조건을 만족하지 못하였을 경우 과정 6으로 간다.

과정 6. 설계 변수를 갱신하고,  $k=k+1$ 으로 갱신한다. 갱신이 끝난 후, 과정 2로 간다.

위의 과정은 정적반응과 동적반응 민감도의 차이를 줄이기 위해 반복되며, 수렴 조건을 만족할 때까지 반복된다.

3.3 수렴조건

등가정하중을 이용한 구조최적설계 시 식 (9a)와 같은 수렴조건을 사용한다. 그러나 위상최적설계는 많은 설계변수를 가지고 있기 때문에 모든 설계변수가 수렴조건을 만족하기 어려우므로 선형

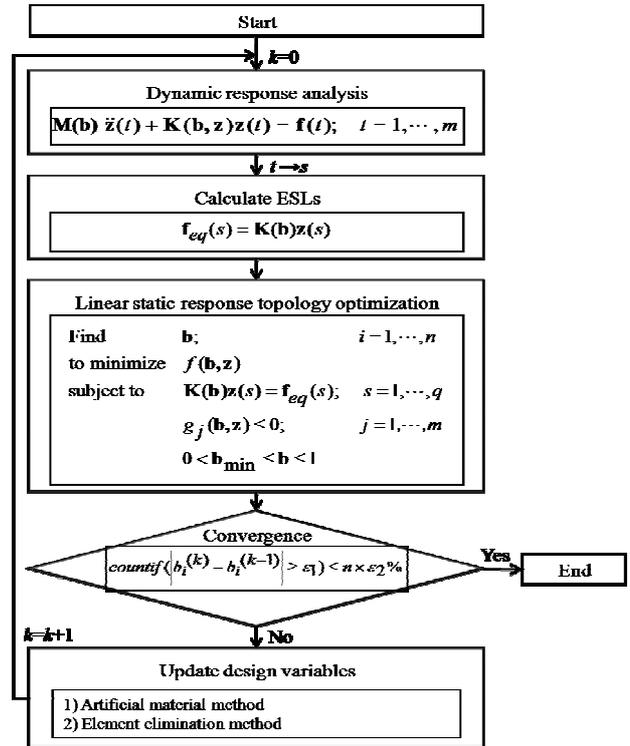


Fig. 1 Process of topology optimization with ESLs

동적반응 위상최적설계 시 수렴 조건은 식 (9b)와 같이 제안한다.

$$|b_i^{(k)} - b_i^{(k-1)}| \leq \epsilon \quad (9a)$$

$$\text{countif}(|b_i^{(k)} - b_i^{(k-1)}| \geq \epsilon_1) \leq n \times \epsilon_2 \% \quad (9b)$$

현재 설계주기 ( $k$ )와 이전 설계주기 ( $k-1$ )의 설계변수 값의 차가  $\epsilon_1$ 보다 큰 설계변수의 개수를 확인한다. 확인된 개수가 전체 요소 개수의  $\epsilon_2$  퍼센트 보다 작다면 수렴한 것으로 간주한다.  $\epsilon_1$ 과  $\epsilon_2$ 는 임의의 작은 값을 가진다.

3.4 설계변수 갱신 방법

밀도법 기반의 선형 동적반응 위상최적설계를 위한 등가정하중법은 설계주기가 갱신되면, 이전 설계의 결과를 다음 설계에 반영을 하여야 한다. 그러나 설계과정 중 설계변수를 갱신하는 방법은 제안된 적이 없다. 따라서 가상 재료법(artificial material method)과 요소 제거법(element elimination method)을 제안한다. 갱신된 설계변수는 다음 설계주기의 동적반응 해석에서만 사용된다.

가상 재료법은  $\mathbf{E} = \mathbf{b}^{(k)\rho} \mathbf{E}_0$ 와  $\rho = \mathbf{b}^{(k)q} \rho_0$ 로 식 (2)와 같은 방법으로 갱신한다. 식 (2)는 선형 정적반응 위상최적설계 시 반복수행(iteration update)에 사용되

는 재료의 물성치 갱신방법이다.<sup>(4)</sup> 이 방법을 등가정하중을 이용한 위상최적설계의 설계변수 갱신 방법으로 사용한다. 초기의 영률( $E_0$ )과 밀도값( $\rho_0$ )을 설계변수( $\mathbf{b}$ )와 벌칙함수( $p$  and  $q$ , penalty function)를 사용하여 임의의 재료 물성치를 가지는 값으로 바꾼 뒤 다음 설계를 진행한다. 각 요소는 서로 다른 값의 임의의 물성치를 사용하여 동적반응 해석을 수행하고, 등가정하중을 구한다. 따라서 설계가 진행됨에 따라 모든 요소가 다른 재료 물성치를 가진다. 그러므로 철과 알루미늄 같은 실제 재료 물성치를 가지고 동적반응 해석을 수행하지 않는다. 이 갱신 방법은 한 요소가 매우 작은 재료 물성치 값을 가진 경우라도 다음 설계주기에서 재료 물성치 값이 커질 기회가 있다. 따라서 선형 동적반응 위상최적설계 과정 중 지워진 요소가 다시 채워질 가능성이 있다.

요소 제거법은 등가정하중을 이용하여 수행된 위상최적설계 결과에서 임의의 값(0과 1사이의 값)보다 작은 설계변수 값을 가지는 요소는 제거하고 다음 설계를 진행하는 것이다. 이 방법은 철과 알루미늄 같은 실제 재료 물성치를 가지고 동적반응 해석을 수행할 수 있다. 또한 요소제거법은 설계주기가 진행되하면서 요소를 제거하므로 결과를 극대화하는 성격을 띤다. 따라서 가상 재료법과 비교하여 더 깔끔한 위상최적설계 결과를 준다. 그러나 한 번 지워진 요소의 절점에는 변위가 발생하지 않으므로 등가정하중이 생성되지 않는다. 따라서 지워진 요소에는 하중이 가해지지 않기 때문에 다시 살아날 기회가 적다. 가상 재료법과 요소 제거법 모두 과정 4의 선형정적반응 위상최적설계에서는 설계자가 결정한 초기 재료의 물성치를 사용하여 최적설계를 수행한다.

#### 4. 예제

동적반응 해석은 NASTRAN 2008<sup>(6)</sup>을 사용하고 선형 정적반응 위상최적설계는 GENESIS 9.0<sup>(6)</sup>을 사용한다. 최적설계 시 재료 물성치 갱신 방법은 파워방법(Power method)를 사용한다.<sup>(5)</sup> 구조물은 미셸 구조물(Michell structure)<sup>(1)</sup>이고, 셸(shell) 요소의 총 개수는 3200개이다. 구조물의 길이는 4 m, 높이는 2 m이다. 구조물에 대한 물성치는 Table 1과 같고, 정식화는 식 (10)과 같다. 물성치와 정식화 조건은 모든 예제에 동일하게 적용된다.

$$\text{Find } \mathbf{b}; \quad i = 1, \dots, n \quad (10a)$$

$$\text{to minimize } \text{stranin energy} \quad (10b)$$

$$\text{subject to } \text{mass} \leq \text{mass initial} \times 50\% \quad (10c)$$

$$0 < \mathbf{b}_{\min} \leq \mathbf{b} \leq 1 \quad (10d)$$

#### 4.1 반 정현 함수(half sine function)가 가해지는 경우

선형 동적반응 위상최적설계를 수행해야 하는 기준은 다음과 같다. 강성 구조물에 하중이 가해지는 경우에는 선형 정적반응 위상최적설계를 사용해도 무방하다. 연성 구조물에 하중이 가해질 때는 동적특성을 고려한 동적반응 위상최적설계를 수행해야 한다. Table 2는 Fig. 2의 구조물에 Fig. 3과 같은 반 정현 함수(가진주파수: 2.5 Hz)의 하중이 가해질 때, 선형 정적반응 위상최적설계와 선형 동적반응 위상최적설계의 수렴속도를 비교한 내용이다. Fig. 4(a)와 Fig. 4(c), 4(e)를 보면 강성 구조물의 경우 선형 동적반응 위상최적설계 결과는

Table 1 Material properties of the Michell structure

Material	Stiff structure	Mild structure
E [Pa]	7.24E+11	2.09E+07
Poisson's ratio	0.33	0.20
Density [kg/m <sup>3</sup> ]	7800.0	2700.0
1 <sup>st</sup> natural frequency [Hz]	1.66E+02	1.51E+00

Table 2 Results of topology optimization a half sine function loading condition (convergence rate)

	Updated method	Stiff structure		Mild structure	
		Iteration	Cycle	Iteration	Cycle
Static		16	-	19	-
Dynamic	Artificial	-	2	-	7
	Elimination	-	2	-	5

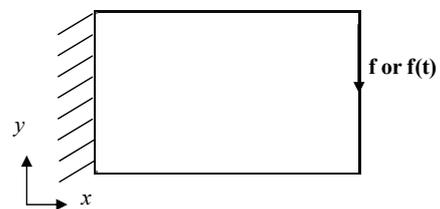


Fig. 2 Design domain using a single loading condition

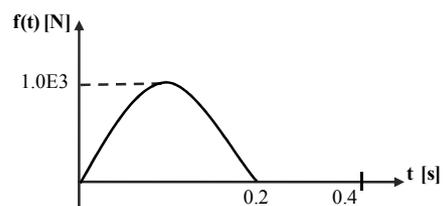
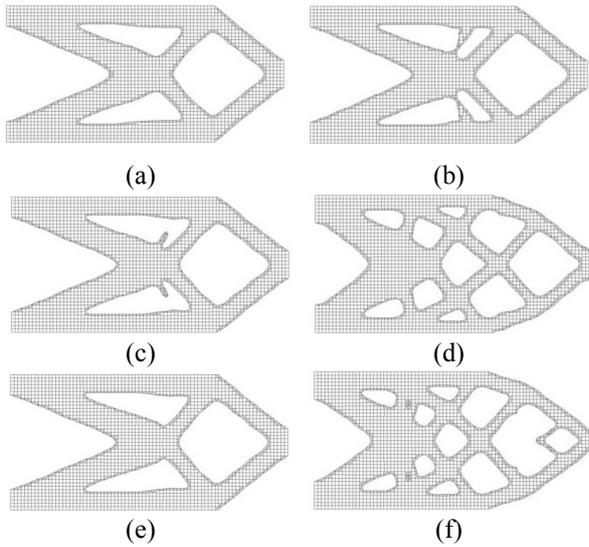


Fig. 3 Loading condition with half sine function



**Fig. 4** Results of topology optimization with a half sine function loading condition: (a) static response topology optimization of the stiff structure; (b) static response topology optimization of the mild structure; (c) dynamic response topology optimization using ESLs of the stiff structure(artificial material method); (d) dynamic response topology optimization using ESLs of the mild structure(artificial material method); (e) dynamic response topology optimization using ESLs of the stiff structure(element elimination method); (f) dynamic response topology optimization using ESLs of the mild structure(element elimination method)

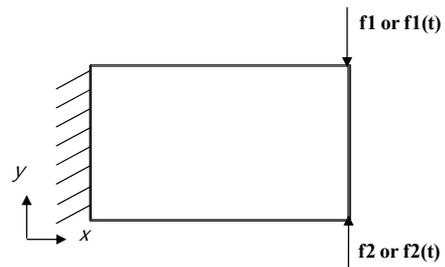
선형 정적반응 위상최적설계의 결과와 유사하다. Fig. 4(b)와 Fig. 4(d), 4(f)를 보면 연성 구조물일 때는 선형 정적반응 위상최적설계 결과와 선형 동적반응 위상최적설계 결과가 다르다. 따라서 미셀 구조물에 반 정현 함수의 하중이 가해지는 경우 정립된 이론과 같이 강성 구조물은 선형 정적반응 위상최적설계를 수행해도 되고, 연성 구조물은 선형 동적반응 위상최적설계를 수행해야 한다.

4.2 다중하중이 가해지는 경우

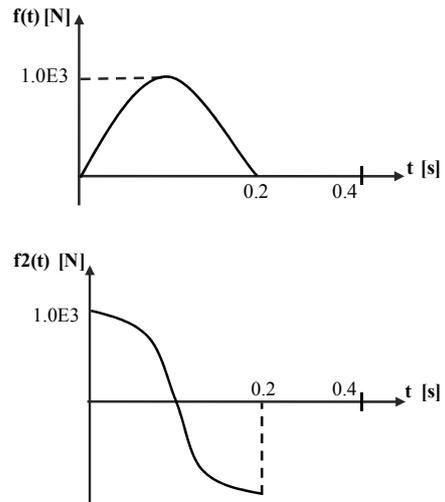
다중하중이 가해지는 경우 구조물에 가해지는 가진 주파수를 명확히 알 수 없다. 즉, Fig. 5와 Fig. 6의 조건일 경우 강성과 연성 구조물을 구분 지을 수 없으나 Table 1과 같이 일반적으로 강성이 큰 재료 물성치와 작은 재료 물성치를 사용하여 강성 구조물과 연성 구조물을 나눈다. 이 경우 Fig. 7(a)와 Fig. 7(c), 7(e)를 비교해 보면 정적반응 위상최적설계와 동적반응 위상최적설계 결과가 다르다. 또한 Fig. 7(b)와 Fig. 7(d), 7(f)를 비교한 결과도 서로 다르다. 따라서 강성과 연성 구조물을 구분 지을 수 없는 경우는 선형 동적반응 위상최적설계를 수행하는 것이 좋다. 강성 구조물에 Fig. 5와 같

**Table 3** Results of topology optimization with multiple loading conditions (convergence rate)

	Updated method	Stiff structure		Mild structure	
		Iteration	Cycle	Iteration	Cycle
Static		18	-	19	-
Dynamic	Artificial	-	2	-	4
	Elimination	-	2	-	11



**Fig. 5** Design domain using multiple loading conditions



**Fig. 6** Loading conditions with half sine and cosine function

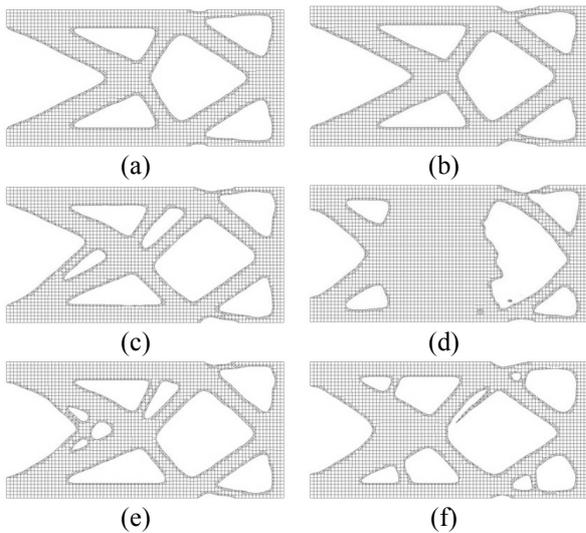
이 대칭으로 다중하중이 가해지는 경우, 선형 정적반응 위상최적설계는 각 하중은 동일한 변형 경향을 가진다. 따라서 선형 정적반응 위상최적설계 결과는 대칭이다. 그러나 시간에 따른 서로 다른 하중 프로파일이 고려되는 선형 동적반응 위상최적설계 결과는 각 하중이 서로 다른 변형 경향을 가진다. 따라서 위상최적설계 결과가 비대칭일 가능성이 높다. Table 3은 다중하중이 가해질 때, 정적반응 위상최적설계와 동적반응 위상최적설계의 수렴속도를 비교한 내용이다.

4.3 주기가 없는 함수가 가해지는 경우

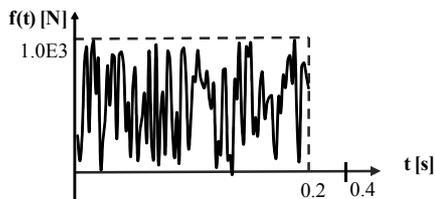
Fig. 8과 같이 비주기 함수가 구조물에 외부하중으로 가해질 때, 가진주파수를 명확히 알 수 없다.

**Table 4** Results of topology optimization with non-periodic function loading condition (convergence rate)

	Updated method	Stiff structure		Mild structure	
		Iteration	Cycle	Iteration	Cycle
Static		16	-	19	-
Dynamic	Artificial	-	6	-	3
	Elimination	-	10	-	4

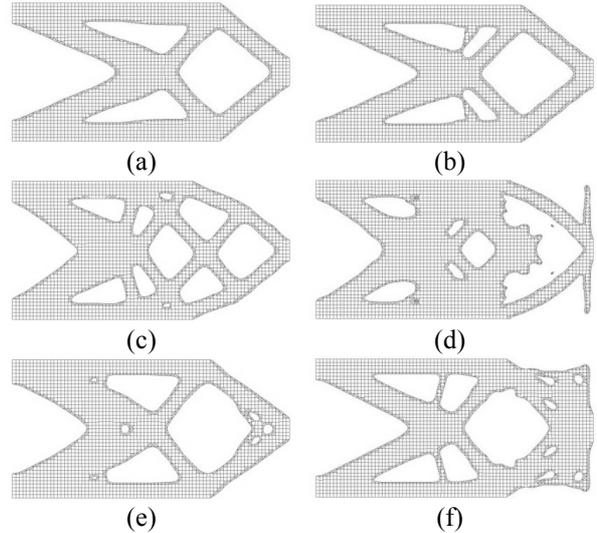


**Fig. 7** Results of topology optimization with multiple loading conditions: (a) static response topology optimization of the stiff structure; (b) static response topology optimization of the mild structure; (c) dynamic response topology optimization using ESLs of the stiff structure (artificial material method); (d) dynamic response topology optimization using ESLs of the mild structure (artificial material method); (e) dynamic response topology optimization using ESLs of the stiff structure (element elimination method); (f) dynamic response topology optimization using ESLs of the mild structure (element elimination method)



**Fig. 8** Loading condition with non-periodic function

따라서 강성 구조물과 연성 구조물로 구분은 의미가 없으므로 다중하중이 가해지는 예제 4.2와 같은 방법으로 Fig. 2에서 보인 구조물을 강성과



**Fig. 9** Results of topology optimization with non-periodic single loading condition: (a) static response topology optimization of the stiff structure; (b) static response topology optimization of the mild structure; (c) dynamic response topology optimization using ESLs of the stiff structure (artificial material method); (d) dynamic response topology optimization using ESLs of the mild structure (artificial material method); (e) dynamic response topology optimization using ESLs of the stiff structure (element elimination method); (f) dynamic response topology optimization using ESLs of the mild structure (element elimination method)

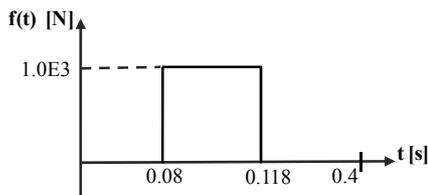
연성 구조물로 나누고 예제를 푼다. 강성 구조물인 Fig. 9(a)와 Fig. 9(c), 9(e) 비교한 결과와 연성 구조물인 Fig. 9(b)와 Fig. 9(d), 9(f) 비교한 결과로 선형 정적반응 위상최적설계와 선형 동적반응 위상최적설계 결과가 다름을 확인하였다. 이러한 비주기 함수가 구조물에 가해지는 경우 강성 구조물과 연성 구조물로 구분할 수 없으므로 선형 동적반응 위상최적설계를 수행해야 한다. 비주기 함수가 가해지는 경우 선형 정적반응 위상최적설계와 선형 동적반응 위상최적설계의 수렴속도는 Table 4와 같다.

#### 4.4 계단 함수가 가해지는 경우

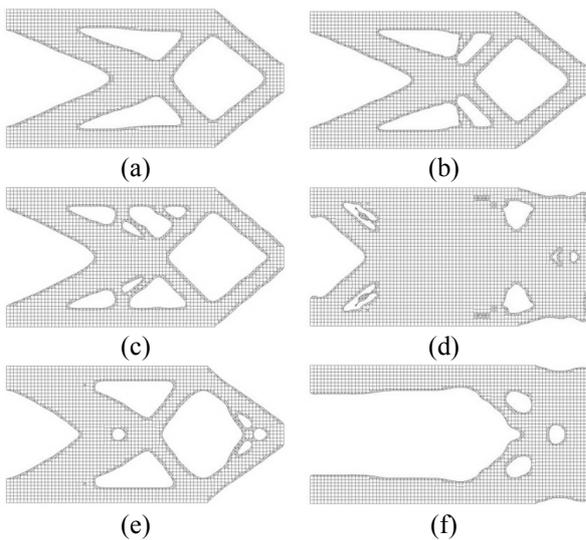
Fig. 10과 같은 계단 함수(가진주파수: 2.5 Hz) 하중이 Fig. 2 구조물에 가해진다. 이 경우 가진주파수를 알 수 있으므로 강성 구조물인 경우는 선형 정적반응 위상최적설계, 연성 구조물인 경우 선형 동적반응 위상최적설계를 수행해야 한다. 그러나 외부하중이 Fig. 10같이 매우 짧은 시간에 가해지는 경우 짧은 시간에 하중이 가해지기 때문에 그 순간 구조물의 동적효과가 커지게 되어 동적반응 위상최적설계는 정적반응 위상최적설계와 결과가 다를 것이라 예상한다. Fig. 11(a)와 Fig. 11(c), 11(e)

**Table 5** Results of topology optimization with step function loading condition (convergence rate)

		Stiff structure		Mild structure	
	Updated method	Iteration	Cycle	Iteration	Cycle
Static		16	-	19	-
Dynamic	Artificial	-	6	-	4
	Elimination	-	4	-	5



**Fig. 10** Loading condition with step function



**Fig. 11** Results of topology optimization with a step function single loading condition: (a) static response topology optimization of the stiff structure; (b) static response topology optimization of the mild structure; (c) dynamic response topology optimization using ESLs of the stiff structure (artificial material method); (d) dynamic response topology optimization using ESLs of the mild structure (artificial material method); (e) dynamic response topology optimization using ESLs of the stiff structure (element elimination method); (f) dynamic response topology optimization using ESLs of the mild structure (element elimination method)

의 결과를 보면 강성 구조물임에도 선형 정적반응 위상최적설계와 선형 동적반응 위상최적설계 결과가 다르다. 따라서 하중이 짧은 시간 동안 가해지는 경우에는 강성 구조물이라도 예외적으로 선형

동적반응 위상최적설계를 수행해야 한다.

설계변수가 0 또는 1의 값으로 수렴하지 않고 0.5와 같은 중간값을 가지고 수렴하면 Fig. 10(d)의 결과와 같이 재료가 50%이상 남는 것처럼 보인다.

이러한 현상은 일정한 크기의 증가정하중이 절점에 균등하게 가해지는 경우 발생한다. 또한 동적반응 해석 시간 중 하중이 가해지는 시간 이후의 해석시간이 길어지면, 절점에 균등하게 가해지는 증가정하중의 영향이 커진다. 계단 함수가 가해지는 경우 정적반응 위상최적설계와 동적반응 위상최적설계의 수렴속도는 Table 5와 같다.

이와 같이 증가정하중을 이용한 선형 동적반응 위상최적설계를 수행하였고, 그 결과를 비교하였다.

### 5. 결론

동적반응을 고려한 위상최적설계의 기초연구로 증가정하중을 이용한 선형 동적반응 위상최적설계의 필요성을 제시하였다. 임의의 구조물에 동하중이 가해질 때, 고유진동수와 가진주파수의 관계를 통하여 선형 동적반응 위상최적설계가 필요한 경우에 대해 제시하였다. 선형 동적반응 위상최적설계가 필요한 경우 증가정하중법을 사용하여 수행할 수 있음을 확인하였다.

선형 동적반응 위상최적설계를 위하여 증가정하중법의 설계변수 갱신과 수렴조건을 제시하였다. 제시된 설계변수 갱신 방법은 가상 재료법과 요소 제거법이다. 가상 재료법은 벌칙함수를 사용하여 재료를 갱신하기 때문에 동적반응 해석 시 실제 재료를 사용하지 못한다는 단점이 있다. 이 경우 재료의 물성치 정보가 없어지는 것은 아니기 때문에 재료 물성치가 매우 작은 요소에도 재료가 다시 채워질 기회가 있다. 요소 제거법은 낮은 설계변수 값을 가지는 요소를 제거하는 방법으로 한번 지워진 요소가 다시 살아날 기회가 적은 반면 가상 재료법에 비해 더 깔끔한 위상최적설계 결과를 주는 장점을 가진다. 위상최적설계 결과의 수렴속도를 비교해보면 특정한 규칙을 찾을 수 없다. 따라서, 선형 동적반응 위상최적설계 수렴속도는 설계모델과 설계변수 갱신 방법에 따라 좌우됨을 확인 하였다. 그러나 설계변수 갱신 방법에 따른 결과의 타당성에 대해서는 제시하지 못하였다. 앞으로 설계변수 갱신 방법의 선택에 대한 연구가 필요하다.

고유진동수와 가진주파수의 관계를 알 수 있는 경우 강성 구조물은 선형 정적반응 위상최적설계

를 수행하고, 연성 구조물은 선형 동적반응 위상 최적설계를 수행해야 함을 확인하였다. 그러나 예외적으로 가진주파수를 명확히 구할 수 없는 경우와 매우 짧은 시간에 하중이 작용하는 경우에는 강성 구조물이라도 선형 동적반응 위상최적설계를 수행해야 함을 확인 하였다.

향후 선형 동적반응 위상최적설계 결과의 타당성에 대한 연구와 설계모델과 하중이 선형 동적반응 위상최적설계에 미치는 영향에 대한 연구와 실용 예제에 대한 적용이 필요하다.

### 후 기

이 논문은 2007년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음(KRF-2007-521-D00039).

### 참고문헌

- (1) Bendsoe, M.P. and Sigmund, O., 2003, *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*, Springer, Berlin.
- (2) Bendsoe, M.P. and Kikuchi, N., 1988, "Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method," *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, No. 2, pp. 197~224.
- (3) Bendsoe, M.P., 1989, "Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 1, No. 4, pp. 193~202.
- (4) Park, G.J., 2007, *Analytic Methods for Design Practice*, Springer, Berlin.
- (5) *GENESIS User's Manual: Version 9.0*, 2005, Vanderplaats Research and Development, Inc.
- (6) *MSC.NASTRAN 2008 Reference Manual*, 2008, MSC Software Corporation.
- (7) Min, S.J. and Kikuchi, N., 1999, "Optimal Topology Design of Structures under Dynamic Loads," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 17, No. 2~3, pp. 208~218.
- (8) Xie, Y.M. and Steven, G.P., 1996, "Evolutionary Structural Optimization for Dynamic Problems," *Computers & Structures*, Vol. 58, No. 6, pp. 1067~1073.
- (9) Jog, C.S., 2002, "Topology Design of Structures Subjected to Periodic Loading," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 253, No. 3, pp. 687~709.
- (10) Rong, J.H., Xie, Y.M., Yang, X.Y. and Liang, Q.Q., 2000, "Topology Optimization of Structures under Dynamic Response Constraints," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 234, No. 2, pp. 177~189.
- (11) Choi, W.S. and Park, G.J., 2002, "Structural Optimization Using Equivalent Static Loads at All the Time Intervals," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 191, No. 19-20, pp. 2105~2122.
- (12) Park, G.J. and Kang, B.S., 2003, "Validation of a Structural Optimization Algorithm Transforming Dynamic Loads into Equivalent Static Loads," *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 188, No. 1, pp. 191~200.
- (13) Lee, H.A., Kim, Y.I., Kang, J. B.S., Kim, S. and Park, G.J., 2006, "An Investigation of Dynamic Characteristics of Structures Subjected to Dynamic Load from the Viewpoint of Design," *Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers (A)*, Vol. 30, No. 10, pp. 1994~1201.
- (14) Kang, B.S., Lee, H.A., Kim, Y.I. and Park, G.J., 2006, "Structural Optimization of a Joined-Wing Using Equivalent Static Loads," *Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers (A)*, Vol. 30, No. 5, pp. 585~594.
- (15) Park, K.J., Lee, J.N. and Park, G.J., 2005, "Structural Shape Optimization Using Equivalent Static Loads Transformed from Dynamic Loads," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 63, No. 4, pp. 589~602.