〈학술논문〉 DOI:10.3795/KSME-A.2009.33.12.1366

슬관절 전방 십자 인대의 반복 변형하에서의 역학적 거동에 관한 수치적 연구

반 용* · 최 덕 기†

(2009년 2월 3일 접수, 2009년 11월 9일 수정, 2009년 11월 12일 심사완료)

A Numerical Study on Mechanical Behavior with Cyclic Deformation of Anterior Cruciate Ligament

Yong Ban and Deok Kee Choi

Key Words: Cyclic Deformation(반복 변형), Large Deformation(대변형), Objective Stress Rate(객관성 응력 속도), Anterior Cruciate Ligament(전방 십자 인대)

Abstract

Anterior cruciate ligament(ACL) of human body experiences a large deformation. May during everyday when large deformation is repeated by various activities such as outdoor activity, ACL easily get damaged. In order to acknowledge the effect of the cyclic large deformation to ACL, the constitutive equations for ACL are derived from experiment data. The concept of the objective stress rate plays a important role wherever large deformation occurs. In order to obtain the objective stress rates the eigenprojection technique is used. A comparison is made for four different cases: Jaumann rate, Green-Naghdi rate, logarithmic rate and twirl tensor of Eulerian triad rate for an isotropic material subject to cyclic deformation, such as simple shear motion. Four different materials are studied to compare the behavior of the materials for ACL using different objective rates. Finally, more complicated model with fibers for soft tissues is used to calculate the behavior subjected to cyclic large deformation.

1. 서 론

최근 들어 인간의 신체를 이루고 있는 근육이나 힘줄, 점막, 혈관등을 포함하는 연부 조직 재료에 대한 연구가 많은 관심 속에서 이루워지고 있다. 일상 생활시나 스포츠 경기 도중 신체가 반복적인 하중이나 변형을 받아 손상이 일어나는 경우가 있는데, 특히 무릎의 인대에 대한 상해가 많기 때문에 무릎의 전, 후방 십자 인대에 대한 모델링과 이에 대한 기계적 거동에 대한 연구가 많이 이루어지고 있다.

* 회원, 단국대학교 대학원 기계공학과
† 책임저자, 회원, 단국대학교 공과대학 기계공학과
E-mail : dkchoi@dankook.ac.kr
TEL : (031)8005-3505

Limbert[1,2]는 슬관절 인대를 유한 요소 모델로 적용하였으며, Pioletti 등[3,4]은 대변형 하에서의 점탄성 구성 법칙을 슬관절 인대와 핏줄에 적용하였고, Hirokawa 등[5]은 전방 십자 인대 모델의 3차원적 변형에 대한 응력 분포에 관한 연구를 하였다. 슬관절 전방 십자 인대와 같은 연부 조직 재료는 대변형, 대회전등의 영향을 받으며 비선형적인 거동을 하는 특성이 있는데,[6,7] 이러한 역학적 특성을 가진 연부 조직 재료에 관한 구성 방정식을 세우기 위해서는 저장 에너지 함수에 의하여 특성이 결정되는 초탄성 구성 모델을 사용하는 것이 일반적이다. 그러나 초탄성 재료는 변형 과정에 무관하고, 초기 상태와 변형이 끝난 마지막 상태에 따라 결정되므로, 변형 중간 과정을 묘사할 수 없다. 또한 시간에 따라 물성치의

변화를 보이게 되므로,[8] 대변형이 일어나며 비선형적인 거동을 하는 연부 조직 재료에 대한 순간 순간의 거동을 살펴 보기 위해서는 시간에 대한 미분꼴의 구성 방정식을 사용하여야 한다.

일반적인 구성 방정식의 문제점은 변형시 회전과 신장 부분을 분리하기가 어렵다는데 있다. 이러한 문제를 해결하기 위해 극분해 이론(polar decomposition theorem)을 이용하여 회전 부분과 신장 부분으로 나누어 다루게 된다.

연부 조직 재료처럼 비선형적이며 대변형의 특성을 가진 재료의 경우 미소 변형과는 다르게 강체 물체 회전과 같은 경우처럼 응력이 가해졌을 때, 변형되지 않으면서 요소나 물체가 회전을 하게 되는 경우가 있다. 이때 응력의 방향이 바뀌면서 변형이 없는데도 불구하고 구성방정식에서는 변형률이 존재하게 된다.[9] 이러한 결과는 강체 회전에 의한 것으로 구성 방정식 계산시 응력의 변화 즉, 응력 속도(stress rate)를 포함하여 계산할 필요가 있다.[10]

응력 속도가 변형 과정에서 대회전과 대변형에 대하여 모든 좌표에 대해 적용되기 위해서는 객관성을 만족해야 하며 대변형시나 강체 물체 회전시 구성방정식에서는 객관성 응력 속도(Objective stress rate)를 고려하여 계산하여야 한다.[11] 이러한 구성 방정식에 사용되는 객관성 응력 속도는 변형하는 물체의 변형과 회전에 관련된 스핀 텐서(spin tensor)의해 정의 되며, 정의에 따라 많은 종류의 객관성 응력 속도가 존재할 수 있다.

여러 가지 객관성 응력 속도에 대한 제안들이 발표되었으나 아직까지 통일된 결론에 도달하지 못하고 있는 실정이다. 이러한 제안들 중에 가장 대표적인 것은 Jaumann 속도(Jaumann rate)이며, 그 외에도 Green-Naghdi 속도(Green-Naghdi rate), 비교적 최근에 발표된 대수적 속도(logarithmic rate) 등이 있다.

Xiao[12]는 스핀텐서를 사용하여 정의한 대수적 속도를 이용하여 아탄성(Hypoelasticity) 모델에 대해 해석하였고, Lin[13]은 인장, 전단, 압축 그리고 초기 상태로 다시 돌아오는 변형 주기에 대해 다룬 연구에서 Zaremba-Jaumann 속도, Green-Naghdi 속도 그리고 대수적 속도 이 세 가지 경우 모두 응력 발전과정이 매우 비슷하지만 오직 대수적 속도만이 많은 반복 변형 후에도 초기 위치에서와 같은 응력 상태를 보여 응력 속도식이 성립된다는 것을 입증하였다.

단순한 경로를 가지는 단순 전단 변형에 대하여 Jaumann 속도는 반복적인 전단 응력에 대한 반응의 결과가 정상적인 결과에서 벗어난다고 알려져 있다. 그러나 변형모드의 첫 번째 주기에 대해서는 응력이 초기 상태인 0값으로 돌아온다. 즉 첫 번째 주기만을 살펴보면 Jaumann 속도나 Green-Naghdi 속도나 대수적 속도나 모두 응력이 초기 상태인 0으로 돌아오므로, 더 많은 주기가 지난 후에 각 객관성 응력 속도들을 비교할 필요가 있다.[14]

본 논문에서는 먼저 등방성 재료의 단순 전단 변형에 객관성 응력 속도를 고려한 관계식에 의해 계산된 Kirchhoff 응력의 그래프와 선행 연구된 자료를 비교하여 본 연구에서 사용된 모듈에 대한 타당성을 입증하고, ACL에 적용하기 전에 ACL과 유사한 거동의 특성을 가지는 재료인 Neo-Hookean 재료에 대해 네 가지 객관성 응력 속도 Jaumann 속도, Green-Naghdi 속도, 대수적 속도와 Twirl tensor of Eulerian triad 응력 속도에 따른 Kirchhoff 응력을 단순 전단 변형에 대해 적용하였다. 이를 토대로 초기 응력이 0인 상태에서 변형 후 다시 초기 상태로 돌아오는 반복적인 전단 변형을 등방성 재료, Neo-Hookean 재료와 전방 십자 인대 모델에 적용하여 재료의 변화와 각각의 객관성 응력 속도를 고려한 결과를 비교하여 서로 어떠한 차이점이 있는지 분석하였다.

2. 배경 이론

2.1 객관성 응력 속도(Objective stress rate)

반복 변형하에서 시간에 대한 응력 변화를 계산하기 위해서는 객관성 응력 속도가 반드시 필요하다. 이러한 객관성 응력 속도 와 Kirchhoff 응력의 관계식은 다음과 같이 정의된다.[9]

$$\boldsymbol{\tau}^{\circ *} = \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Omega}^{*} - \boldsymbol{\Omega}^{*}\boldsymbol{\tau} \tag{1}$$

식 (1)에서 $\boldsymbol{\tau}^{\circ *}$는 Truesdell과 Noll[15]이 제안한 시간에 따른 구성 관계식에 의하여 다음과 같이 정의 된다.

$$\mathbf{D} = \mathbb{K} : \boldsymbol{\tau}^{\circ *}, \quad \boldsymbol{\tau}^{\circ *} = \mathbb{K}^{-1} : \mathbf{D} \tag{2}$$

식 (2)에서 $\mathbb{K}$는 4차 컴플라이언스 텐서(4th order compliance tensor)로 재료에 따라 다른 값을 갖는다. 식 (2)의 $\boldsymbol{\tau}^{\circ *}=\mathbb{K}^{-1}:\mathbf{D}$를 식 (1)에 대입하면 다음과 같이 객관성 응력 속도 관계식을 얻는다.

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}=\mathbb{K}^{-1}:\mathbf{D}-\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Omega}^{*}+\boldsymbol{\Omega}^{*}\boldsymbol{\tau} \tag{3}$$

식 (3)에서 $\boldsymbol{\Omega}^{*}$는 비대칭 텐서(skew-symmetric tensor)로써 각 객관성 응력 속도에 따라 대입되는 식이 달라진다. 본 논문에서는 $\boldsymbol{\Omega}^{*}$에 식 (4)~식 (7)을 대입하여 네 가지 객관성 응력 속도를 고려하였다.

① Jauman 속도[16]

$$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{J}}=\mathbf{W} \tag{4}$$

② Green-Naghdi 속도[17~19]

$$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{R}}=\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}=\mathbf{W}+\sum_{i\neq k}^{m}\frac{\sqrt{b_k}-\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_k}+\sqrt{b_i}}\mathbf{B}_i\mathbf{D}\mathbf{B}_{\mathrm{k}} \tag{5}$$

③ 대수적 속도[20~23]

$$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{Log}}=\mathbf{W}+\sum_{i\neq k}^{m}\left(\frac{b_k+b_i}{b_k-b_i}-\frac{2}{\ln b_k-\ln b_i}\right)\mathbf{B}_{\mathrm{i}}\mathbf{D}\mathbf{B}_{\mathrm{k}} \tag{6}$$

④ Twirl tensor of Eulerian triad 속도[24]

$$\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{E}}=\mathbf{W}+\sum_{i\neq k}^{m}\left(\frac{b_k+b_i}{b_k-b_i}\right)\mathbf{B}_{\mathrm{i}}\mathbf{D}\mathbf{B}_{\mathrm{k}} \tag{7}$$

2.2 재료 모델

객관성 응력 속도 관계식인 식 (3)에서 어떠한 재료를 사용하느냐에 따라 4차 컴플라이언스 텐서의 역값인 $\mathbb{K}^{-1}$ 즉, 접선 계수(tangent modulus) 또는 제2 탄성 텐서(second elasticity tensor)가 바뀌게 된다. 본 연구에서는 등방성 재료에 대해 연구에 사용한 계산 모듈을 적용하여 모듈의 타당성을 입증하고, Neo-Hookean 재료에 대해서 각각의 객관성 응력 속도를 비교해 본 후, 전방 십자 인대 모델에 대해 같은 방법으로 적용하여 응력의 변화를 비교해 보았다.

먼저 계산에 사용된 등방성 재료와 Neo-Hookean 재료 모델의 접선 계수에 대해 간단히 언급 하고자 한다. 가장 기본적이며 간단한 모델인 등방성 재료의 경우 접선 계수는 아래와 같이 정의 된다.[14]

$$\boldsymbol{C}^{SE}=\lambda\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}+2\mu\mathbb{I} \tag{8}$$

식 (8)에서 λ, μ는 Lamè 상수이고, $\mathbf{I}$는 2차 단위텐서, $\mathbb{I}$는 4차 단위 텐서 이다.

등방성 재료 다음으로 Neo-Hookean 재료 모델을 선택한 이유는 등방성 선형 법칙을 대변형으로 확장시킨 모델로 본 논문의 전방 십자 인대 모델의 거동과 유사한 거동을 보이는 재료이기 때문이다. 저장 에너지 함수 $\psi(\mathbf{C})$를 통해 접선 계수 $\boldsymbol{C}^{SE}$를 구할 수 있다. Neo-Hookean 재료는 압축성과 비압축성으로 나누어 생각하기로 한다.

2.2.1 압축성(compressible) Neo-Hookean 재료

압축성 Neo-Hookean 재료의 저장에너지 함수는 다음과 같다.[11]

$$\psi(\mathbf{C})=\frac{1}{2}\lambda_0(\ln J)^2-\mu_0\ln J+\frac{1}{2}\mu_0(\mathrm{trace}\mathbf{C}-3) \tag{9}$$

식 (9)에서 J는 $\det(\mathbf{F})=J$로 정의 되는 자코비언(Jacobian)이며, λ_0, μ_0는 Lamé 상수이다. 식 (9) 통하여 접선 계수인 식 (10)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^{SE}&=4\frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{C}\partial\mathbf{C}}\\&=\lambda_0\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1}+(\lambda_0\ln I_3-2\mu_0)\frac{\partial\mathbf{C}^{-1}}{\partial\mathbf{C}}\end{aligned} \tag{10}$$

2.2.2 비압축성(incompressible) Neo-Hookean 모델

비압축성 Neo-Hookean 모델은 본 논문에서 다루는 전방 십자 인대 모델에서 화이버 다발을 감싸고 있는 물질 부분에 대한 접선 계수를 구하기 위해 사용되므로 압축성 Neo-Hookean 재료와 따로 분리하여 수식적으로 정리하였다.

비압축성 Neo-Hookean 재료의 저장에너지 함수는 $J=\det(\mathbf{F})=1$의 경우로써 식 (9)에 $J=1$을 대입하여 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\psi(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}\mu_0(\mathrm{trace}\mathbf{C} - 3) \tag{11}$$

압축성일 때와 마찬가지로 식 (11)을 통해 식 (12)를 얻을 수 있다.

$$\boldsymbol{C}^{SE} = 4\frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{C}\partial\mathbf{C}} = pJ\left(\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1} + 2\frac{\partial\mathbf{C}^{-1}}{\partial\mathbf{C}}\right) \tag{12}$$

Neo-Hookean 재료의 경우, 등방성 재료와는 다르게 접선 계수의 값이 변형 구배 $\mathbf{F}$에 따라서 변하게 되므로 재료 표기(material description)으로 다루기에는 매우 복잡하다. 그러므로 아래와 같은 방법을 사용하여 공간 표기(spatial description)로 바꾸어 계산하였다.[10]

$$c^{\tau}_{ijkl} = F_{im}F_{jn}F_{kp}F_{lq}C^{SE}_{mnpq} \tag{13}$$

식 (13)에서 c^{τ}_{ijkl}는 공간 접선 계수(the spatial second elasticity tensor)라고 한다. 압축성과 비압축성 Neo-Hookean 재료의 접선 계수인 식 (10)과 식 (12)를 식 (13)을 이용하여 각각 공간 표기법으로 바꾸어 식 (3)의 객관성 응력 속도 관계식에 대입하여, 각각의 객관성 응력 속도에 대한 Kirchhoff 응력을 구할 수 있다.

2.3 전방 십자 인대 모델

연부 조직의 모델링은 인체의 부분에 따라 달라지는데, 본 논문에서는 Fig. 1과 같이 슬관절 전방 십자 인대 모델(ACL)을 사용하였다, 이 모델의 저장에너지 함수는 비등방성 초탄성 구성법칙에 따라 정의 되는데, 몇가지 가정을 하여 수식을 간소화 하였다. 첫번째로 등방성 재료를 가정하여 저장에너지 함수 ψ가 우 Cauchy-Green 텐서 $\mathbf{C}$의 불변량인 I_1, I_3, I_4의 함수이며, 두번째로 저장에너지 함수 $\psi^e(I_1, I_3, I_4)$는 세번째로 비압축성을 가정하면 $J = 1 \Rightarrow I_3 = 1$이므로, 함수 $\psi(I_1, I_3, I_4)$에서 함수 $\psi(I_1, I_4)$으로 식을 단순화 하였다.

본 연구에서는 비압축성 Neo-Hookean 재료에 화이버 부분이 포함된 식을 이용하여 화이버 부분의 영향을 살펴 보았다. Fig. 2와 같이 저장에너지 함수 $\psi(I_1, I_4)$를 화이버 다발을 둘러싸고 있는 부분인

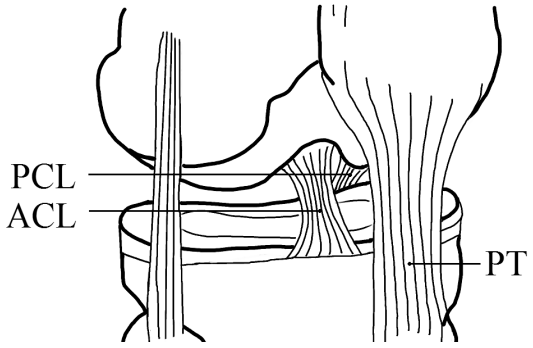

Fig. 1 ACL(Anterior Cruciate Ligament), PCL (Posterior Cruciate Ligament), PT(Patella Tendon)

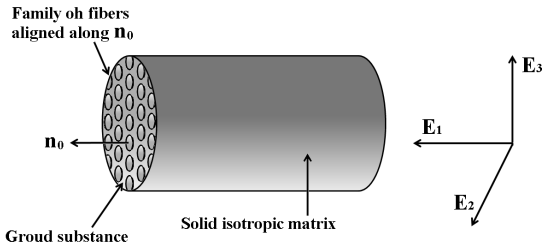

Fig. 2 Simplified representation of a continuum material made of an isotropic matrix reinforced by one familiy of fibers associated with direction $\mathbf{n}_0$ in the reference configration.

$\psi^e_m(I_1)$과 콜라겐 화이버 다발 부분인 $\psi^e_f(I_4)$의 합으로 나타낼 수 있다고 가정하였다.

$$\psi^e(I_1, I_4) = \psi^e_m(I_1) + \psi^e_f(I_4) \tag{14}$$

식 (14)와 같은 가정은 앞서 연부 조직의 기계적 거동 묘사를 연구한 연구자들에 의해 성공적으로 사용되었다.[1~3,24] 식 (14)에서 $\psi^e_m(I_1)$의 저장에너지 함수는 식 (12)의 비압축성 Neo-Hookean 재료를 연부 조직재료의 매개변수의 식으로 변환하여 사용하였다.

$$\psi^e_m(I_1) = c_1(I_1 - 3) \tag{15}$$

식 (14)의 콜라겐 화이버의 저장에너지 함수 $\psi^e_f(I_4)$는 Pioletti의 실험식을 사용하였다.[3,4]

$$\psi_f^e(I_4)=\begin{cases}0 & \text{if } I_4 \le 1\\ \dfrac{c_2}{2c_3}\left[e^{c_3(I_4-1)^2-1}\right] & \text{if } I_4 > 1\end{cases} \tag{16}$$

식 (16)에서 I_4는 $I_4=\mathbf{n}_0\cdot(\mathbf{C}\cdot\mathbf{n}_0)=(\lambda_{\mathbf{n}_0})^2$로 정의되며, $\lambda_{\mathbf{n}_0}$는 화이버 방향으로의 신장률이다. 화이버의 경우 압축일 경우 힘을 받지 못하고 인장인 경우에만 힘을 받는다고 가정하여, I_4를 기준으로 압축인 경우 즉, $I_4 \le 1$일때는 연부 조직 재료의 에너지 함수에 영향을 미치지 못하고, 인장인 경우 즉, $I_4 > 1$의 경우에만 에너지 함수에 영향일 미친다. 식 (15), (16)에서 c_1, c_2, c_3는 재료 매개변수이며, 각 매개변수의 값은 $c_1 = 1 \pm 0.2629$, $c_2 = 1.7939 \pm 0.2859$, $c_3 = 11.2055 \pm 1.1424$이고 이는 Pioletti 모델의 값을 사용하였다.[4] 식 (15), (16)에 주어진 저장에너지 함수를 미분하여 연부 조직 재료의 접선 계수를 구할 수 있다.

$$\boldsymbol{C}^{SE}=pJ\left(\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1}+2\frac{\partial\mathbf{C}^{-1}}{\partial\mathbf{C}}\right) \qquad I_4 \le 1 \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^{SE}=&pJ\left(\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1}+2\frac{\partial\mathbf{C}^{-1}}{\partial\mathbf{C}}\right) \qquad I_4 > 1\\ &+4c_2e^{c_3(I_4-1)^2}\left\{2c_3(I_4-1)^2+1\right\}\mathbf{N}_0\otimes\mathbf{N}_0\end{aligned} \tag{18}$$

식 (17), (18) 또한 비압축성 Neo-Hookean 재료와 같이 접선 계수의 값이 변하게 되므로 식 (13)을 이용하여 공간 표기법으로 바꾸어 사용하였다. 변형에 따라 화이버가 압축하는 경우 식 (17)을, 화이버가 인장하는 경우 식 (18)을 각각 식 (3)의 객관성 응력 속도 관계식에 대입하면 Kirchhoff 응력을 구할 수 있다.

3. 연구 방법 및 결과

본 연구에서 수행할 계산 방식과 과정의 타당성을 검토하기 위해 간단한 변형인 단순 전단 변형에 대하여 등방성 재료를 적용하여 확인 한 후, 다음으로 반복적인 주기를 갖는 단순 전단 변형에 대해 Neo-Hookean 재료와 전방 십자 인대 모델에 적용하여 앞에서 제시한 4가지 유형의 객관성 응력 속도에 대한 응력의 변화를 비교 분석하였다.

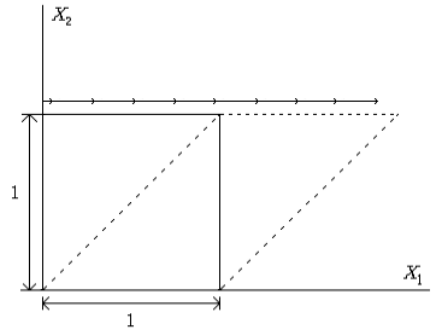

Fig. 3 Simple shear deformation

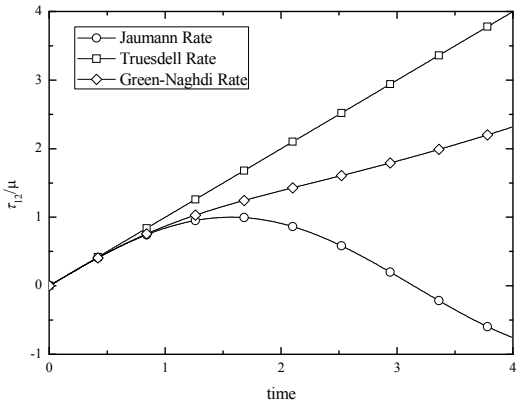

Fig. 4 Comparison of stresses for various objective stress rates for simple shear problem with isotropic material constants

3.1 계산 방식에 대한 타당성 검토

반복적인 주기를 갖는 단순 전단 변형에 대해 계산하기에 앞서 계산에 사용되는 방식에 대한 검증이 필요하기 때문에 먼저 Fig. 3와 같이 단순 전단 변형에 대해 등방성 재료에 대해 계산하여 타당성을 검증하였다. 계산을 실행한 결과로 얻어진 Fig. 4는 등방성 재료의 각 객관성 응력 속도에 대한 무차원 화시킨 전단응력 τ_{12}의 비교 그래프이다. Jaumann rate의 경우 time=3의 근방에서 응력이 음의 값을 가지게 되는 결과를 얻었는데 이는 물리적으로 적합하지 못한 결과이다.

Jaumann rate을 제외한 Truesdell, Green-Naghdi rate은 변형이 진행됨에 따라 응력이 계속 증가하는 결과를 보였다. 이러한 결과는 Belytschko[9] 등에 의해 이전에 확증된 내용과 일치하였으며, 이로써 본 논문에 사용한 계산 방식이 타당함을 알 수 있었다.

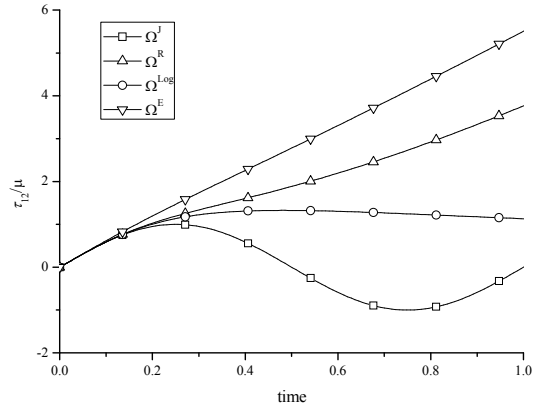

Fig. 5 Comparison of stresses for various objective stress rates for simple shear with isotropic material(Ω^J: Jauamnn rate, Ω^R: Green-Naghdi rate, Ω^{Log}: Logarithmic rate, Ω^E: Twirl tensor of Eulerian triad rate)

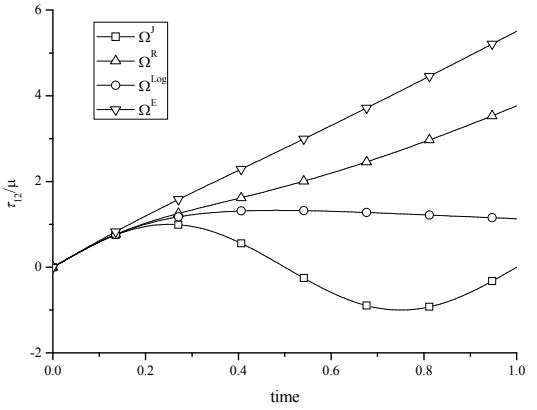

Fig. 6 Comparison of stresses for various objective stress rates for simple shear with Neo-hookean material(Ω^J: Jauamnn rate, Ω^R: Green-Naghdi rate, Ω^{Log}: Logarithmic rate, Ω^E: Twirl tensor of Eulerian triad rate)

3.2 단순 전단 변형

Fig. 5는 4가지 객관성 응력 속도를 고려한 등방성 재료의 단순 전단 변형에 대한 그래프 이다. 역시 Jaumann 속도는 일정한 주기를 가지며 진동하는 경향을 볼 수 있다. 이는 단순 전단 변형시 물리적으로 합당하지 않은 결과라 할 수 있다.[14]

Green-Naghdi 속도나 Twirl tensor of Eulerian triad 속도의 경우 무한히 증가하는 경향이 나타난다. 대수적 속도의 경우 응력이 증가하다가 최대점을 지나 최대응력까지 증가한 후 응력이 점점 감소하면서 변형이 커지면 응력 값이 0에 가까워지는 것을 볼 수 있으며, 이것은 실제 물리적 현상과 유사한 경향을 보인다 할 수 있다.

Fig. 6은 Neo-Hookean 재료에 대한 그래프이다. 등방성 재료와 같은 결과를 얻을 수 있었으며, 이는 단순 전단 변형시에 두 재료 모델이 동일한 역학적 거동을 한다는 것을 의미한다.

3.3 단순 전단 변형시 ACL 모델의 객관성 응력 속도에 따른 응력 변화

Pioletti[3,4]가 제시한 전방 십자 인대 모델에서는 Fig. 7에서 보는 바와 같이 다른 재료들의 결과와는 상이한 결과를 보인다. Jaumann 속도의 경우 진동하며 증가하는 경향을 보였고, Green-Naghdi 속도와 Twirl tensor of Eulerian triad 속도의 경우 앞에서 언급한 등방성, Neo-Hookean 재료 모델과는 다르게 급격히 증가하는 양상을 보였다.

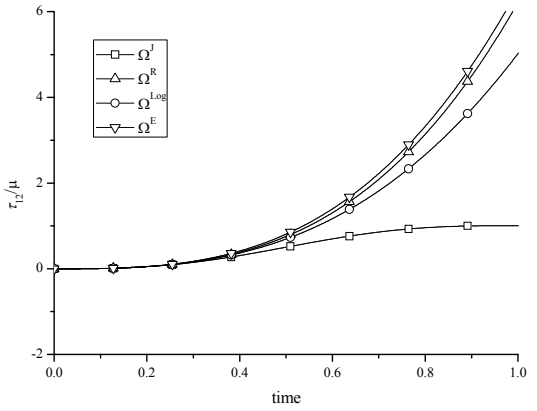

Fig. 7 Comparison of stresses for various objective stress rates for simple shear with ACL (Ω^J: Jauamnn rate, Ω^R: Green-Naghdi rate, Ω^{Log}: Logarithmic rate, Ω^E: Twirl tensor of Eulerian triad rate)

등방성 재료나 Neo-Hookean 재료에 적용했을때와 가장 큰 차이를 보이는 대수적 속도는 시간이 증가함에 따라 0으로 수렴하지 못하고 증가하였다. 등방성 재료나 Neo-Hookean 재료에 적용하였을 경우 물리적 현상과 유사한 경향을 보였지만, 전방 십자 인대 모델에 적용한 경우 대수적 속도도 물리적으로 적합하지 않은 것을 알 수 있다.

3.3 반복적인 단순 전단 변형

최대점을 지나 계속 전단이 일어나는 단순 전단변과는 다르게 항복점 내에서 일정한 주기를 가지는 반복적인 단순 전단 변형시 반복적인 주기가

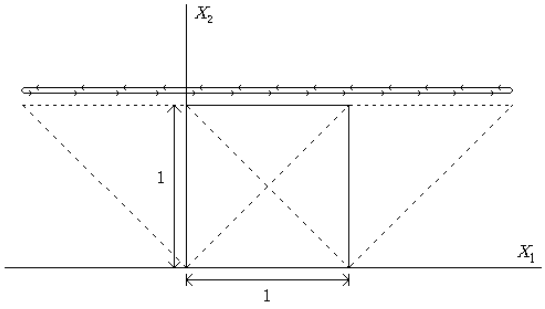

Fig. 8 Cyclic simple shear deformation

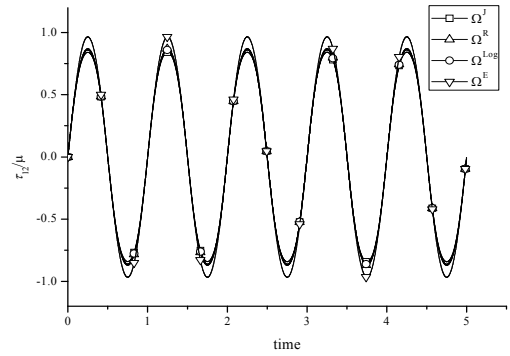

Fig. 9 Comparison of stresses for various objective stress rates for cyclic simple shear with isotropic material (Ω^J: Jauamnn rate, Ω^R: Green-Naghdi rate, Ω^{Log}: Logarithmic rate, Ω^E: Twirl tensor of Eulerian triad rate)

끝나고 나서의 응력 상태를 알아 보기 위해 Fig. 8와 같이 직교좌표계 $\boldsymbol{X}_i$에서의 가로 세로가 각각 1인 요소를 생각해 보기로 한다. 초기 응력값은 0이고, $\boldsymbol{X}_2$축과 $\boldsymbol{X}_3$축으로의 변화는 없고, $\boldsymbol{X}_1$축 방향으로 일정한 주기를 갖는 반복적인 단순 전단이 일어나는 경우에 대해 적용해보았다.

Fig. 9는 등방성 재료의 반복적인 단순 전단 변형시 각 객관성 응력 속도에 대한 무차원화 된 τ_{12}의 그래프 이다. 객관성 응력 속도 따라 진폭의 크기가 차이가 있지만, 몇주기가 지나도 모든 객관성 응력 속도가 초기 응력 상태로 돌아오는 것을 알 수가 있다.

등방성 재료와 동일한 조건으로 재료만 Neo-Hookean 과 으로 바꾸어 모듈을 돌려 보았다. Fig. 10은 Neo-Hookean 재료의 반복적인 단순 전단 변형시 각 객관성 응력 속도에 대한 전단 응력 τ_{12}의 그래프 이다. 단순 전단 변형과 같이 무차원화 할 경우 등방성 재료와 같은 그래프를 얻을 수 있다.

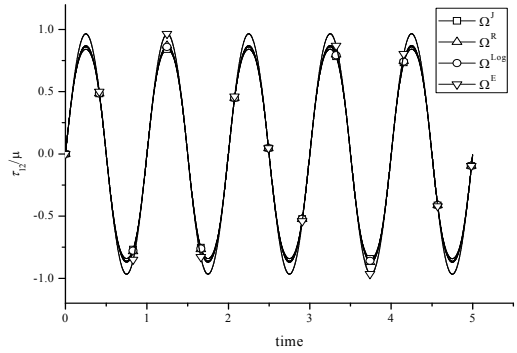

Fig. 10 Comparison of stresses for various objective stress rates for cyclic simple shear with Neo-Hookean material (Ω^J: Jauamnn rate, Ω^R: Green-Naghdi rate, Ω^{Log}: Logarithmic rate, Ω^E: Twirl tensor of Eulerian triad rate)

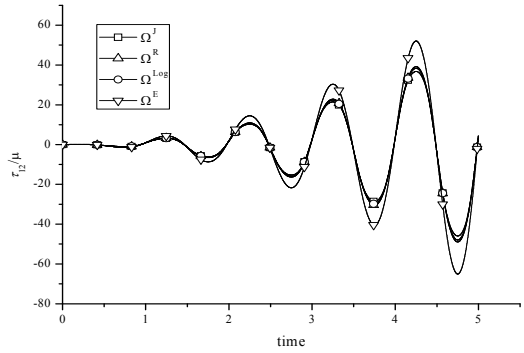

Fig. 11 Comparison of stresses for various objective stress rates for cyclic simple shear with soft-tissue material (Ω^J: Jauamnn rate, Ω^R: Green-Naghdi rate, Ω^{Log}: Logarithmic rate, Ω^E: Twirl tensor of Eulerian triad rate)

3.4 반복적인 단순 전단 변형시 ACL 모델의 객관성 응력 속도에 따른 응력 변화

Fig. 11은 Pioletti의 전방 십자 인대 모델[3,4]의 일정한 주기를 가지는 반복적인 전단 변형시 객관성 응력 속도를 고려한 무차원화 된 전단 응력 τ_{12}을 보인 것이다. 전방 십자 인대 모델은 등방성 재료나 Neo-Hookean 재료와는 다르게 4가지 객관성 응력 속도 모두 주기가 끝나는 점의 응력의 상태는 응력값이 0으로 초기 응력 상태로 돌아오기는 하나, 주기가 지나면 지날 수록 응력값이 증가하며 발산하는 경향을 보였다. 이러한 응력 변화는 물리적으로 합당하지 않은 결과라 할 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 반복적인 단순 전단 변형시 객관성 응력 속도를 고려하여 Pioletti가 제안한 전방 십자 인대 모델[3,4]의 거동에 대해 알아 보았다. 등방성 재료, Neo-Hookean 재료의 경우는 단순 전단 변형시 대수적 속도를 고려한 경우 응력이 증가하다 최대점을 지나며 감소하는 물리적으로 적합한 결과가 얻어 졌으나, 본 논문에서 사용한 화이버를 포함한 비압축성 Neo-Hookean 재료인 전방 십자 인대 모델에 대해서는 Jaumann 속도, Green-Naghdi 속도, 대수적 속도, Twirl tensor of Eulerian triad 속도 모두 응력이 계속 증가하는 하였다.

또한 응력상태가 변형의 형태에 따라 달라질 수 있으므로 초기 응력 상태를 0으로 하여 변형이 끝나면 다시 초기 응력 상태로 돌아오는 반복적인 주기를 가지는 단순 전단 변형에 대해서도 적용해 보았다. 그 결과 4가지 객관성 응력 속도 모두 주기가 끝나면 초기 응력 상태인 0 값으로 응력이 돌아오지만 주기가 반복될수록 응력이 발산하는 결과가 나타났다. 이는 본 논문에 사용된 Pioletti의 전방 십자 인대 모델과 변형의 형태에 따른 영향이라 예상 할 수 있다.

단순 전단 변형과 반복적인 단순 전단 변형의 결과를 살펴볼때 등방성 재료와 Neo-Hookean 재료에는 대수적 속도가 물리적으로 합당한 결과를 얻어 수학적 모델링에 적용 할 수 있지만, 전방 십자 인대 모델에는 본 논문에서 적용한 4가지 객관성 응력 속도 모두 물리적으로 합당치 않은 결과를 보이므로 전방 십자 인대 모델에 맞는 또다른 객관성 응력 속도를 고려하여 수학적 모델링을 해야 한다는 것을 알 수 있다.

실제로 인간의 신체가 받는 변형은 단순히 전단 변형이나 인장, 압축 변형이 아닌 복합적인 변형이 일어난다. 특히 전방 십자 인대와 같이 복합적이면서 반복적인 변형이 일어나는 모델에 대한 정확한 수학적인 모델링을 하기 위해서는 이러한 복합적인 변형을 고려해야 한다. 또한 본 논문에서는 변형의 형태가 가장 단순한 반복적인 변형인 단순 전단 변형에 대한 응력 변화를 알아 보았는데, 이때 본 논문에서 고려 하지 않은 점성 부분과 화이버와 화이버간의 역학적 상호 관계, 화이버와 화이버를 둘러싸고 있는 물질과의 역학적 상호 관계를 고려하면 전방 십자 인대 모델에 대해 좀 더 정확한 묘사를 할 수 있을 것으로 사료된다.

참고문헌

(1) Limbert, G., 2001, "Finite Element Modeling of Biological Soft Tissues. Application to the Ligaments of the Human Knee," Ph. D. Thesis, School of Engineering Sciences, University of Southampton, UK.

(2) Limbert, G. and Middleton, J., 2004, "A Transversely Isotropic Viscohyperelastic Material Application to the Modeling of Biological Soft Connective Tissues," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 4237~4260.

(3) Pioletti, D. P., 1997, "Viscoelastic Properties of Soft Tissues: Application to Knee Ligaments and Tendons," Ph. D. Thesis, Départment de physique, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland.

(4) Pioletti, D. P., Rakotomanana, L, R., Benvenuti, J. F. and Leyvraz, P. F., 1998, "Viscoelastic Constitutive Law in Large Deformations: Application to Human Knee Ligaments and Tendons," *Journal of Biomechanics*, Vol. 31, (8), pp. 753~757.

(5) Hirokawa, S. and Tsuruno, R., 2000, "Three-dimensional Deformation and Stress Distribution in an Analytical/Computational Model of the Anterior Cruciate Ligament," *Journal of Biomechanics*, Vol. 33, pp. 1069~1077.

(6) Fung, Y. C., 1973, "Biorheology of Soft Tissues," Biorheology, Vol. 10, pp. 139~155.

(7) Menciassi, A., Scalari, G., Eisinberg, A., Anticoli C., Francabandiera, P., Carrozza M. C. and Dario, P., 2001, "An Instrumented Probe for Mechanical Characterization of Soft Tissues," *Biomedical Microdevices* 3:2, pp. 149~156.

(8) Ryu, G. S., Min, O. K., Baick, H. S., 1999, “A Numerical Analysis Model of Ligament Behavior,” *Trans. of KSME (A)*, pp. 505~510.

(9) Belytschko, T., Liu, W. K. and Moran, B., 2000, "Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures," John Wiley & Sons Inc., NJ 07030, USA, pp. 130-136.

(10) Dienes, J. K., 1979, "On the Analysis of Rotation and Stress Rate in Deforming Bodies," Acta Mechanica, Vol. 32, pp. 217~232.

(11) Yong, S., Zhi-da, C., 1989, "On the Objective Stress Rate in Co-moving Coodinate System," *Appl., Math., and Mech*., Vol. 10, No. 2.

(12) Xiao, H., Bruhns, O. T. and Meyers, A., 1997, "Hypo-elasticity Model Based upon the Logarithmic Stress Rate", *J. Elasticity*, Vol. 47, pp. 51~68.

(13) Lin, R., 2002, "Viscoelastic and Elastic-viscoelastic-elastoplastic Constitutive Characterizations of Polymers at Finite Strains," Theoterical and Numerical Aspects., Ph. D. thesis, Bundeswehr University, Hamburg.

(14) Meyers, A., Xiao, H. and Bruhns, O., 2003, "Elastic Stress Ratchtting and Corotational Stress Rates," TECHNISGHE MECHANIK, Band 23, Heft 2-4, pp. 92~102.

(15) Truesdell, C. and Noll, W., 1965, "The Non-linear Field Theories of Mechanics," Handbuch der Physik, S. Flügge, ed., Plasticity and Impact Mechanics, pp. 100-109, New Age Intern. Publ. Ltd., New Delhi.

(16) Jaumann, G., 1911, "Geschlossnes System Physikalischer und Chemischer Differentialgesefze," Sitzzungsber, Ser, Akad, Wein, (IIa), pp. 385~530.

(17) Green, A. E. and McInnis, B. C., 1967, "Generalized Hypoelasticity," Proc., Roy., Soc., Edinburgh, A57, pp. 220~230.

(18) Green, A. E. and Naghdi, P. M., 1965, "A General Theory of an Elasto-plastic Continumm," *Arch., Rat., Mech., Anal*., Vol. 18, pp. 251~281.

(19) Dienes, J. K., 1987, "A Discussion of Material Rotation and Stress Rate," *Acta Mechanica*, Vol. 65, pp. 1~11.

(20) Lehmann, T., Guo, Z. H. and Liang, H. Y., 1991, "The Conjugacy between Cauchy Stress and Logarithm of the Left Stretch Tensor," *Eur., J., Mech., A/Soilds*, Vol. 10, pp. 395~404.

(21) Reinhardt, W. D. and Dubey, R. N., 1995, "Eulerian Strain-rate as a Rate of Logarithmic Strain," *Mech., Res., Comm*., Vol. 22, pp. 165~170.

(22) Xiao, H, Bruhns, O. T. and Meyers, A., 1997, "Hypo-elasticity Model Based upon the Logarithmic Stress Rate," *J. Elasticity*, Vol. 47, pp. 51~68.

(23) Xiao, H., Bruhns, O. T. and Meyers, A., 1998, "On Objective Corotational Rates and Their Defining Spin Tensors," *In. J. Solids Structures*, Vol. 35, No. 30, pp. 4001~4014.

(24) Zhou, X., Tamma, K. K., 2003, "On the Applicability and Stress Update Formulations for Corotational Stress Rate Hypoelasticity Constitutive Models," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 39, pp. 783~816.