

자연하천에서 마름/젖음 처리를 위한 격자재구성 기법의 개발 (I) : 모형의 개발 및 검증

Development of Grid Reconstruction Method to Simulate Drying/Wetting in Natural Rivers (I): Model Development and Verification

김 상 호* / 최 승 용** / 오 현 욱*** / 한 건 연****

Kim, Sang Ho / Choi, Seung Yong / Oh, Hyun Wook / Han, Kun Yeun

Abstract

The objective of this study is to develop an accurate and robust two-dimensional finite element method to simulate drying and wetting in complex natural rivers. The Dry/Wet algorithm developed in this study is Grid Reconstruction Method which requires the definition of new meshes and renumbering of the nodes. Any drop of water level in the two-dimensional domain results in eliminating nodes and elements. Several numerical simulations were carried out to examine the performance of the Grid Reconstruction Method for the purpose of validation and verification of the model. The accuracy and application of the developed model are verified by comparing simulated results with observed values.

Keywords : dry and wet, dry/wet algorithm, Grid Reconstruction Method, eliminating nodes and elements

요 지

본 연구의 목적은 자연 하천에서 마름/젖음 현상을 모의하기 위한 정확하고 정교한 2차원 유한요소 모형을 개발 하는데 있다. 이에 본 연구에서는 마름/젖음의 처리를 위해서 흐름의 시간별 수위상승 및 하강 속도를 고려하여 계산구간에 대한 격자의 자동 생성 그리고 해석 후 마른 요소에 대한 요소 제거, 다시 적용된 경계 절점에 기준한 요소의 재구성 및 계산의 수행 등을 통해 마름/젖음을 처리할 수 있는 격자재구성 기법을 개발하였다. 개발된 모형의 적용성과 검증을 위하여 단순하도 및 실험수로에 대해 모의를 수행한 후 실측치와 비교·검토함으로써 모형의 정확성과 적용성을 입증하였다.

핵심용어 : 마름/젖음, 마름/젖음 알고리즘, 격자재구성 기법, 절점 및 요소 제거

* 상지대학교 건설시스템공학과 부교수
Associate Professor, Department of Civil Engineering, Sangji Univ., Wonjusi Gangwondo, 220-702, Korea
** 교신저자, 경북대학교 공과대학 건축·토목공학부 박사과정수료
Corresponding author, Ph.D. Candidate, School of Archi. & Civil Engineering, Kyungpook National Univ., Daegu, 702-701, Korea
(e-mail : ecofriend@knu.ac.kr)
*** 상지대학교 건설시스템공학과 석사과정
Master Course, Department of Civil Engineering, Sangji Univ., Wonjusi Gangwondo, 220-702, Korea
**** 경북대학교 공과대학 건축·토목공학부 교수
Professor, School of Archi. & Civil Engineering, Kyungpook National Univ., Daegu, 702-701, Korea

1. 서 론

흐름, 유사, 오염물 해석에 대한 2차원 수치모형 기술은 수치적으로 안정되고 일관된 알고리즘을 필요로 하나, 이에 대한 국내에서의 전문기술 확보는 매우 미진한 실정이다. 더욱이 유한요소법에서의 2차원 수치모형은 마름/젖음 처리의 문제를 가지고 있다. 일반적으로 이러한 문제를 해결하는 방법은 마름/젖음에 상관없이 모든 부분에서 방정식을 푸는 방법과 해석영역으로부터 마름 부분을 제거하는 두 가지 방법으로 크게 나눌 수 있다. 첫 번째 방법은 마름 또는 부분마름 요소에 대한 특별한 처리가 필요하며 두 번째 방법은 새로운 요소에 대한 결정 및 미지수에 대한 renumbering을 필요로 하며 이는 매 계산시간에서의 정확한 계산을 요구한다 (Hervouet and Janin, 1994).

Akanbi and Katopodes (1988)는 초기 마름 부분에 대한 홍수와 전달을 모의하기 위해서 이동격자 유한요소법을 개발하였다. 그러나 이 기법의 경우 이동격자가 마름 부분에 대한 과도한 계산을 감소시키지만 계산시간에서 많은 부분이 과도한 선단부 추적 및 격자의 갱신에 할당되기 때문에 전체 계산의 효율은 감소하는 문제가 발생하였으며 또한 격자 재구성의 문제로 인해 지형이 복잡한 자연하천에는 적용이 어려운 문제점이 있다. Leclerc *et al.* (1990)은 혼합보간 유한요소모형을 개발하였는데 젖음 요소에 대해서 동역학 천수방정식을 계산하였으며, 마름 요소에 대해서는 유속은 영으로 부여하고 부분 젖음 요소에 대해서는 압력항을 무시한 운동방정식을 도입하였다. 그리고 안정적인 해석을 위해서 난류확산에 대해 인공항을 사용하였으며, 적정 확산계수를 제안하였다. 그러나 이 기법의 경우 마름 부근에서 발생하는 얇은 수심에 의한 수치 발산을 피하기 위해 물리적인 의미를 상실한 인공항을 도입하는 문제점이 있다. Tchamen and Kahawita (1994)는 Riemann 해법을 사용한 유한체적모형으로 마름/젖음 해석기법을 제안하였다. 이 기법은 수평하도의 경우 효과적으로 적용되었지만 변화하는 지형에서는 마찰항과 지형의 영향 등으로 인해 인공항이 도입되는 문제점을 가지고 있다. Hervouet and Janin (1994)는 초기 젖음 조건의 하상에 대한 홍수파의 전파양상을 모의하기 위해서 2차원 유한요소모형인 TELEMAC-2D를 사용하였다. 이 모형에서는 얇은 수심에서 발생하는 안정성 문제를 해결하기 위해서 비보존형 방정식만을 사용해야 하는 제한이 따른다. 또한 국내외에서 현재 상용되고 있는 SMS의 하천흐름해석 모형인 RMA-2 모형의 경우 마름/젖음을 모의하기 위

하여 물리적인 의미를 갖고 있지 않는 매개변수들을 도입함으로 인해 모의시 매개변수 값 선정의 어려움과 마름 구간에서 수심이 '0'으로 계산되지 않고 일정수심이 발생함에 따라 마름현상을 합리적으로 재현하지 못하는 문제점이 있다.

국내에서는 하천에 대한 유한요소법의 마름/젖음 처리를 위한 연구는 거의 전무한 실정이고 2차원 천수방정식에 관한 수치해석기법은 주로 유한차분기법을 중심으로 연구되었다. 한건연 등(1982)이 울산만의 조석해석, 최병호(1983)가 경기만의 조석해석, 이길성 등(1989)이 천수방정식의 유한차분특성, 김원(1999)이 고정확도 수치기법을 이용한 하천 천이류 해석모형을 개발한 바 있으며 한국건설기술연구원(1995)과 이진희 등(1996)이 유한체적법을 이용하여 2차원 하천모형을 연구하였다. 유한요소기법에 대한 연구로는 윤태훈(1982)이 각각 항만내 토사이동 예측과 단면 급확대에 의한 흐름영향을 고찰하기 위해서 2차원 천수방정식의 유한요소기법을 적용하였고, 윤용남과 박무중(1994)은 한강 하류부에 FESWMS 모형을 적용하여 해석한 예가 있다. 한건연 등(1996)은 개수로내의 점변 및 급변 부정류 해석을 위해서 감쇠형 유한요소모형을 적용하여 해석한 바 있고, 박재홍(1997)은 유한요소법에 의한 오염물의 동수역학적 확산해석을 적용하였고, 한건연과 김상호(2000)는 2차원 이송-확산해석을 위한 유한요소모형을 개발하고 이를 낙동강 유역에 적용하여 해석한 바 있다. 한건연 등(2003)은 하천에서의 흐름해석을 위해서 급변부정류에 대한 SU/PG 유한 요소법의 적용성을 검증하였고, 백창현 등(2006)은 3차원 유동 해석을 위한 SU/PG 기법의 적용과 그 해석결과를 제시하였다. 그러나 국내의 적으로 자연하천에서 마름/젖음을 처리하기 위한 유한요소해석의 수공학 분야에 대한 적용은 미진하다. 따라서 본 연구에서는 기존의 연구에서 문제가 되었던 단순하도에만 적용 가능한 문제, 계산 효율의 문제, 물리적인 의미를 상실한 인공항의 도입 문제, 비보존형에 국한된 문제, 비물리적인 매개변수의 도입에 대한 문제 등을 고려하여 자연하천에 적용 가능한 마름/젖음 알고리즘을 개발하고 검증하고자 한다.

2. 기본방정식

2.1 지배 방정식

수심평균치를 취한 2차원 천수방정식은 자유수면을 가진 유체의 운동을 기술하는 3차원 Navier-Stokes 식을 수심방향으로 적분함으로써 유도될 수 있는데 이를 위해서는 연직방향의 가속도항은 무시하여 정수압 분포

로 처리하는 가정이 필요하다. 이러한 가정하에 지배 방정식을 나타내면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} + i = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial y} + g \frac{\partial(h^2/2)}{\partial x} = gh(S_{\alpha} - S_{fx}) \quad (2)$$

$$\frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(v^2h)}{\partial y} + \frac{\partial(uvh)}{\partial x} + g \frac{\partial(h^2/2)}{\partial y} = gh(S_{\omega} - S_{fy}) \quad (3)$$

여기에서 h 는 흐름 수심을 나타내고 u, v 는 x, y 방향으로의 유속을 나타낸다. 또한 S_{α}, S_{ω} 는 x, y 방향으로의 바닥 경사 성분을 나타내고, S_{fx}, S_{fy} 는 x, y 방향으로의 수리학적 저항을 나타내며 i 는 침투능을 나타내고 g 는 중력 가속도 성분을 나타낸다. 만약 Manning 공식이 적용된다면 마찰 경사 성분은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$S_{fx} = \frac{n^2 u (u^2 + v^2)^{1/2}}{h^{4/3}}, \quad S_{fy} = \frac{n^2 v (u^2 + v^2)^{1/2}}{h^{4/3}} \quad (4)$$

또한 $S_{\alpha} = -\frac{\partial z_0}{\partial x}$, $S_{\omega} = -\frac{\partial z_0}{\partial y}$ 라고 쓸 수 있다. 여기서 z_0 는 바닥 경사를 나타낸다. 만약 $p = uh$ 이고 $q = vh$ 라고 한다면 Eqs. (1)~(3)은 다음과 같이 다시 정리될 수 있다.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + i = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{pq}{h} \right) + gh \frac{\partial z_0}{\partial x} + gn^2 \frac{(p^2 + q^2)^{1/2}}{h^{7/3}} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{pq}{h} \right) + gh \frac{\partial z_0}{\partial y} + gn^2 \frac{(p^2 + q^2)^{1/2}}{h^{7/3}} = 0 \quad (7)$$

3. 격자재구성 기법의 개발

실제 하천에서의 지형적 이산화에 따른 복잡성으로 인해 마름/젖음 현상이 발생하며 그로 인해 작은 수심에서 수치해석의 안정성에 영향을 주어 해석을 불가능

하게 한다. 마름/젖음 처리를 위해 본 연구에서는 2차원 유한요소를 기반으로 하여 격자재구성 기법(Grid Reconstruction Method)을 개발하였다.

3.1 기본 개념

격자재구성 기법은 요소의 수심이 마른 상태가 되었을 경우에 수치계산에서 동요를 일으키는데 이 경우 해당요소를 제거하여 새로운 지형구간을 경계로 가지게 하여 실행이 가능하도록 하는 기법이다. 계산 시간 동안에 수위의 상승 및 하강 속도를 계산하여 마른 요소에 대해서는 요소를 제거하고 젖은 요소에 대해서는 격자를 자동으로 재생성하여 마름/젖음을 처리한다. Fig. 1은 이러한 과정을 나타내고 있는데, 마른 영역이 발생하는 경우 요소제거를 통해 계산과정에 참여하게 되는 격자는 감소하게 되며 이로 인해 방정식의 수가 줄어들게 되어 좀 더 빠르게 모의 할 수 있고 시간의 변화에 따른 마름/젖음 현상을 좀 더 실제적으로 표현할 수 있다. 그러나 넓은 지역에서 모의시간 내에 마름/젖음이 발생한다면 모형에 수치적 문제를 야기하거나 요소의 제거로 인한 불규칙한 경계의 형성으로 인해 수치적 발산이 발생할 수 있다. 또한 요소에 포함된 유량이 더해지거나 감해짐으로 질량의 불연속성이 나타날 수도 있는데 이는 마름/젖음 현상이 예상되는 구간에 대해 격자를 조밀하게 구성함으로써 해결할 수 있다. 물론 격자의 조밀한 정도를 어느 정도로 해야 수치 안정성을 확보할 수 있는가에 대한 연구는 추가로 진행되어야 할 것으로 판단된다. 또한 모형의 안정성 및 수렴성을 확보하기 위하여 Courant 수를 고려한 계산 시간 간격을 자동으로 설정하도록 개발하였으며, 이때 예측된 수위로 인해 판단된 마름/젖음 절점이 실제 계산된 수위에 의해 판단된 마름/젖음 절점과 다를 경우에는 계산 시간간격을 자동으로 조정하여 계산을 수행하도록 하였다.

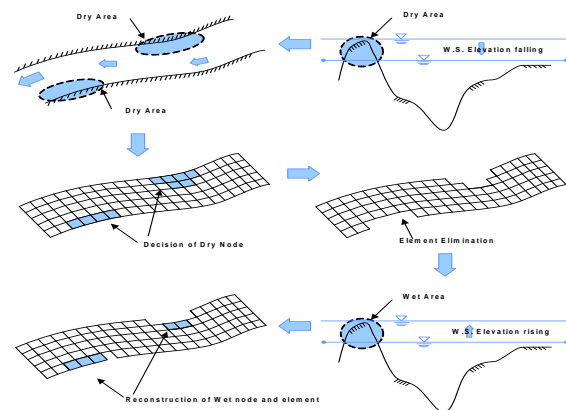


Fig. 1. Concept of Grid Reconstruction Method

3.2 수위예측을 통한 요소특성 결정

본 모형에서는 매 계산시간마다 변화하는 수위의 상승 및 하강 속도를 고려하여 절점의 마름/젖음에 대한 요소특성을 판단하였다. 절점의 마름/젖음을 판단하기 위한 과정은 다음과 같다.

- Eq. (8)과 같이 매 시간에서 계산된 수위와 직전 시간에서의 수위를 이용하여 수위의 상승 또는 하강속도를 구한다.

$$V_{wi} = \frac{h_i - h_{i-1}}{T_i - T_{i-1}} \quad (8)$$

- Eq. (9)와 같이 계산된 상승 또는 하강 속도에 계산 시간 간격을 곱하여 수위의 상승고 또는 하강고를 산정한다.

$$\Delta h = V_{wi} \Delta t_{i+1} \quad (9)$$

- Eq. (10)과 같이 현재 시간에서의 수위에 계산된 상승고 또는 하강고를 더하여 다음 시간에서의 수위를 예측한다.

$$h_{i+1} = h_i + \Delta h \quad (10)$$

- 예측된 수위를 전체 절점과 비교하여 절점의 수심이 '0'이거나 음의 값을 가지는지 판단하고 임의의 요소에서 절점이 마름 조건으로 판단되면 해당 요소 및 절점은 망에서 제거되고 새로운 경계조건에 대한 renumbering 과정을 거친 후 계산이 수행된다.
- 제거되었던 절점이 다시 젖음 상태로 판단되면 renumbering 과정을 통하여 계산 요소망을 재구성한 후 계산을 수행한다.
- 매 계산시간마다 ①~⑤ 과정을 반복한다.

여기서 h_{i+1} 은 $i+1$ 시간에서의 예측수위, h_i 와 h_{i-1} 은 i 와 $i-1$ 시간에서의 수위, Δh 는 i 시간에서 $i+1$ 시간 사이의 예상 수위변화량, T_i 는 i 시간까지의 누적계산 시간을 나타내고 있다.

이와 같이 격자재구성 기법은 매 시간마다 계산된 수심 결과를 이용하여 다음 시간대에서 절점에 대한 마름/젖음을 판단하므로 지형조건에 따른 흐름변화를 효과적으로 반영할 수 있다. Fig. 2는 격자재구성 기법에서의 수위예측을 위한 흐름도를 나타내고 있다.

3.3 요소망의 재구성

마름 조건으로 인해 절점 및 요소를 제거한 후에는

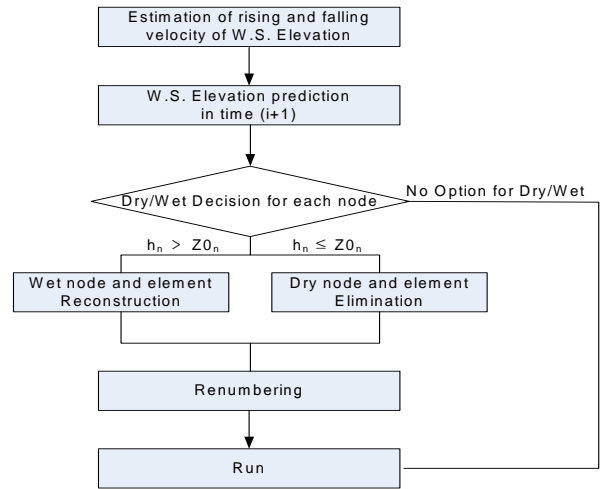


Fig. 2. Flow Chart for Grid Reconstruction Method

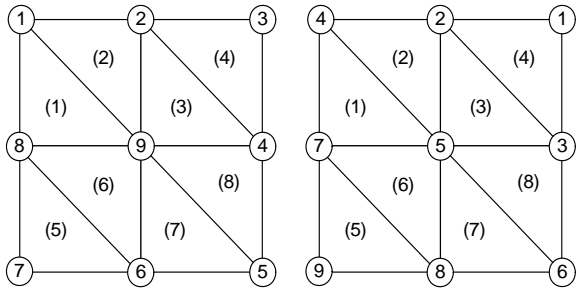
요소의 수와 절점의 수가 변하게 된다. 이 경우 계산을 수행하기 위해서는 변화된 요소와 절점을 가지고 매트릭스를 재구성하여야 한다. 이에 본 연구에서는 매트릭스에서의 저장 공간 및 계산수행시간을 최소화하기 위해서 bandwidth 최소화를 자동으로 수행할 수 있도록 하는 renumbering 기법을 구축하였다. 이때 bandwidth는 Eq. (11)과 같이 구할 수 있다.

$$NBW = (R+1)(NDOF) \quad (11)$$

여기서 NBW 는 bandwidth, R 은 한 개의 요소에 포함된 절점 번호간의 가장 큰 차이, $NDOF$ 는 각 절점에서의 자유도 수를 나타낸다.

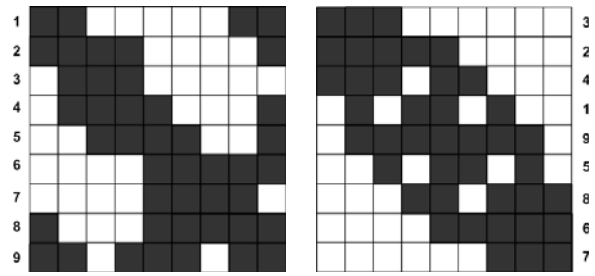
Eq. (11)에서 보는 바와 같이 bandwidth를 최소화하기 위해서는 한 개의 요소에 포함된 절점 번호간의 가장 큰 차이와 자유도의 수를 최소화하여야 한다. 그러나 자유도의 수는 renumbering에 의해서 변화하는 값이 아니라 지배방정식의 미지수 수와 전체 계산격자망에서 절점이 내부절점 또는 외곽절점에 따라 변화하는 값이다. 따라서 bandwidth를 최소화하기 위해서는 한 개의 요소에 포함된 절점 번호간의 가장 큰 차이를 최소화하면 된다. 이를 위해서 본 연구에서는 각 절점에 부여 가능한 모든 경우의 수를 고려하여 renumbering을 수행하고 각각의 요소에 포함된 절점 번호간의 차이가 최소화되는 경우를 최종 절점번호로 선정하였다.

Fig. 3(a)는 bandwidth 최소화가 적용되기 전의 8개 삼각형으로 구성된 망을 나타내고 있으며, Fig. 3(b)는 최소화가 적용된 후의 결과를 나타내고 있다. 삼각망의 자유도(Degree of Freedom)를 1이라고 할 경우 bandwidth가 9에서 4로 줄어든 것을 알 수 있으며, 이러한 결과는 Fig. 4와 같은 삼각망에 대한 매트릭스의 비교에서도 확인할 수 있다.



(a) Before Renumbering (b) After Renumbering

Fig. 3. Concept Map for Renumbering to Minimize Bandwidth

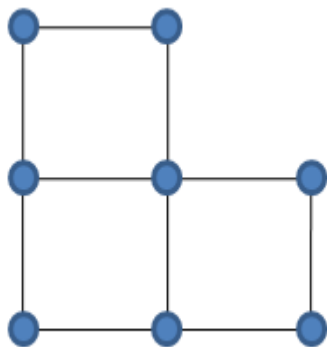


(a) Original Matrix (b) Final Matrix

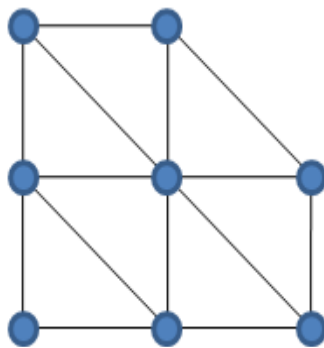
Fig. 4. Bandwidth of Matrix

Table 1. Renumbering Result with Bandwidth Optimization

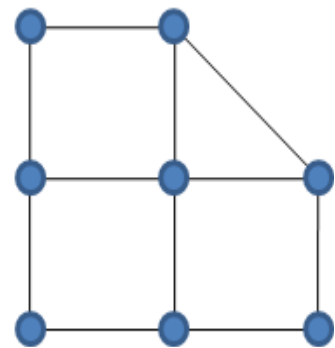
Renumbering	Element No.	Node No.			Renumbering	Element No.	Node No.		
Before	1	1	9	8	After	1	4	5	7
	2	1	2	9		2	4	2	5
	3	2	4	9		3	2	3	5
	4	2	3	4		4	2	1	3
	5	8	6	7		5	7	8	9
	6	8	9	6		6	7	5	8
	7	9	5	6		7	5	6	8
	8	9	4	5		8	5	3	6
	Bandwidth	9				Bandwidth	4		



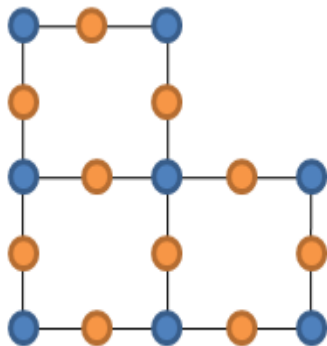
(a) Linear-Rectangular



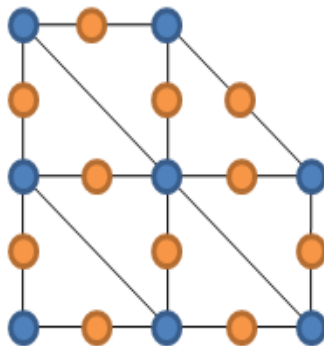
(b) Linear-Triangular



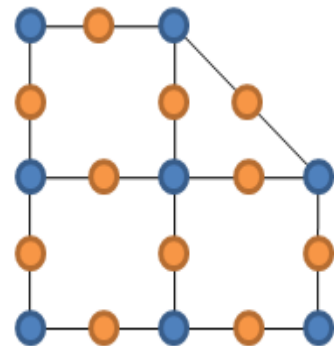
(c) Linear-Mixed



(d) Quadratic-Rectangular

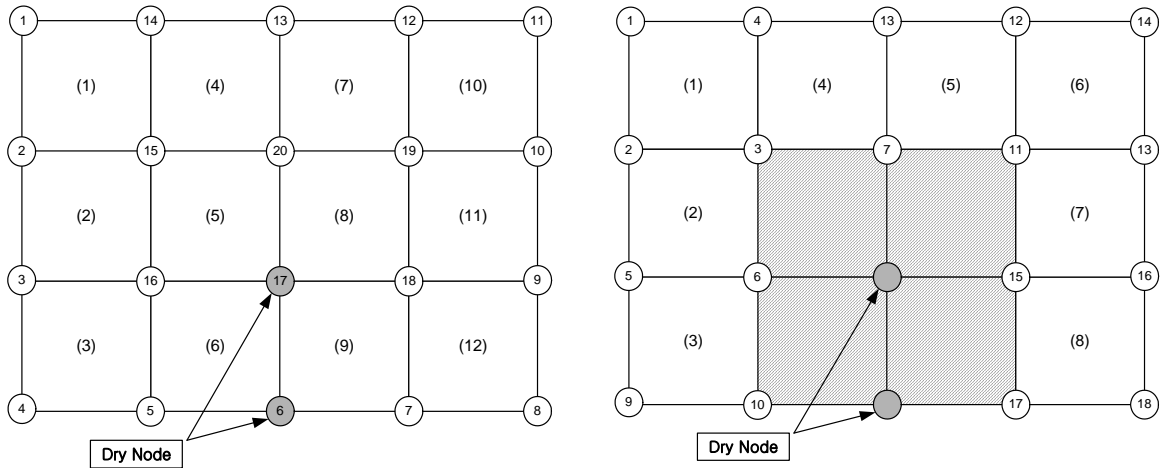


(e) Quadratic-Triangular



(f) Quadratic-Mixed

Fig. 5 Controlled Element Type for Boundary Node Decision



(a) Before Renumbering (b) After Renumbering

Fig. 6. Renumbering for Dry Nodes and Elements

Table 2. Renumbering and Boundary Value

(a) Renumbering

Renumbering	Element No.	Node No.			
Before	1	1	2	15	14
	2	2	3	16	15
	3	3	4	5	16
	4	14	15	20	13
	5	0	0	0	0
	6	0	0	0	0
	7	13	20	19	12
	8	0	0	0	0
	9	0	0	0	0
	10	12	19	10	11
	11	19	18	9	10
	12	18	7	8	9
Bandwidth	15				
Renumbering	Element No.	Node No.			
After	1	1	2	3	4
	2	2	5	6	3
	3	5	9	10	6
	4	4	3	7	8
	5	8	7	11	12
	6	12	11	13	14
	7	11	15	16	13
	8	15	17	18	16
Bandwidth	6				

(b) Boundary Value

Boundary Node No.	Boundary Value			
	p	q	h	DOF
1	1	1	0	2
2	0	1	0	1
3	1	1	0	2
4	0	1	0	1
5	0	1	0	1
6	0	1	0	1
7	0	1	0	1
8	0	1	0	1
9	1	1	0	2
10	1	1	0	2
11	1	1	0	2
12	0	1	0	1
13	0	1	0	1
14	1	1	0	2
15	0	1	0	1
17	1	1	0	2
18	1	1	0	2

본 모형에서는 외곽경계절점에 대한 자유도(DOF)가 경계값으로 지정되는데 마름/짓음 현상으로 인해 절점 및 요소가 제거되거나 다시 추가되는 과정에서 경계절점의 위치가 변하게 된다. 따라서 매 계산시간마다 변화하는 경계절점에 대해 내부절점과 경계절점을 요소모양에 따라 자동으로 구분하고 경계값을 지정하는 알고리즘을 개발하였다. 변화된 경계절점을 찾기 위해서 우선 각 요소가 선형인지 2차 요소인지 그리고 삼각형 요소인지 사각형 요소인지 등에 대한 요소의 형태를 파악한 후 절점의 위치가 내부인지 외곽인지와 같은 절점의 상태를 판단하였다. 이러한 과정을 통하여 모든 절점의 상태를 판단한 후 내부절점의 경우에는 0의 값을 지정하고 외곽경계절점의 경우에는 01000의 값을 지정함으로써 각 절점의 상태에 맞는 경계값을 지정하였다. 이러한 알고리즘은 Fig. 5에서 보는 바와 같이 삼각형, 사각형 및 혼합요소로 구성된 선형요소와 2차 요소에 대해 적용이 가능하도록 하였다. Fig. 6은 임의의 사각형 요소망에서 마름조건의 절점이 발생하였을 경우 해당 절점과 요소의 제거 및 renumbering 결과를 보여주고 있으며 Table 2는 변화된 요소 및 절점번호와 마름 조건으로 인해 변화된 경계값을 나타낸 것이다. 경계값에서 1은 자유도를 가지는 것을 의미하고 0은 자유도를 가지지 않는 것을 의미한다.

Fig. 6 and Table 2에서 보는 바와 같이 본 연구에서 개발된 renumbering 기법을 수행한 결과 마름/짓음 현상으로 인해 절점의 제거 및 재생성으로 인해 변화되는 외곽경계를 적절히 재구성할 수 있었으며 계산 수행을 위한 매트릭스의 크기와 bandwidth를 최소화하여 계산의 효율을 높일 수 있을 것으로 판단된다.

3.4 자연하천 적용을 위한 불규칙 경계면의 처리

자연하천의 흐름을 계산하는데 있어서 불규칙한 경계면에 대한 조건이 규정되어야 하는데, 불투수층을 갖는 경계면에서는 유량의 연직방향 성분이 일반적으로 '0'이 된다.

$$\vec{Q} \cdot \vec{n} = 0 \quad (12)$$

여기서, \vec{n} 은 경계면에서의 외향단위 벡터이고, \vec{Q} 는 유량이다. 유입경계에서 Eq. (12)의 우변항은 경계면에서의 연직방향 유량성분과 같다. 연직방향 벡터가 x 및 y 방향으로 위치하고 있을 때, 유량의 연직 및 접선방향 성분은 x 및 y 방향에 대한 유량 성분인 p q 와 동일하다. 만일 연직방향 벡터가 x 및 y축을 따라

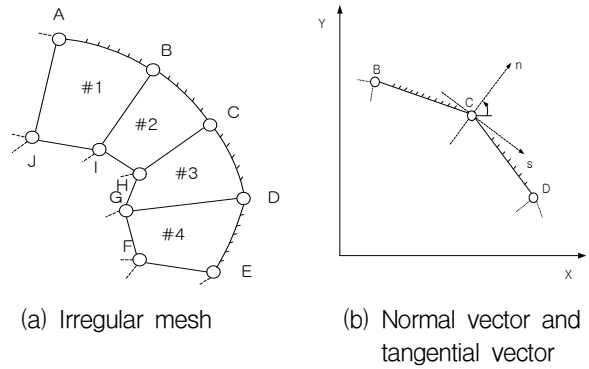


Fig. 7. Treatment of Irregular Boundary

놓여 있지 않다면 x축에 대한 경사각 θ 가 결정되어야 할 것이다.

직선경계부에서는 이 경사각은 쉽게 구할 수 있다. 그러나 곡선경계부에서는 문제영역에서의 모든 경계가 경계점에서는 불연속적인 경사를 갖는 요소로 분할되기 때문에 θ 는 일정한 값이 되지 않는다. 따라서 하나의 절점에서 만나는 두개의 요소는 Fig. 7과 같이 두 개의 상이한 연직방향 성분을 갖게 된다. 즉, Fig. 7에서 보는 바와 같이 경계 BCD를 따른 연직성분을 '0'으로 가정한다면, 연속방정식을 만족하기 위하여 유량의 연직성분 Q_s 는 BC, CD를 따라 '0'이 되어야만 한다.

$$\int Q_s ds = 0 \quad (13)$$

절점 C에서 Eq. (13)은 유량의 x, y 성분에 의하여 Eq. (14)와 같이 기술된다.

$$\int [p_c \cos\theta + q_c \sin\theta] ds = 0 \quad (14)$$

기저함수에 의하여 유량성분은 Eq. (15)와 같이 기술된다.

$$p_c = P_a N_a \quad (15a)$$

$$q_c = Q_a N_a \quad (15b)$$

Eqs. (14) and (15)로부터 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\int [P_a N_a \cos\theta + Q_a N_a \sin\theta] ds = 0 \quad (16)$$

연직 단위벡터 n 에 대하여 $l_x = \cos\theta$, $l_y = \sin\theta$ 이므로 Eq. (16)은 Eq. (17)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int [P_a(N_a l_x) + Q_a(N_a l_y)] ds = 0 \quad (17)$$

Divergence theorem에 의하여 Eq. (17)은 Eqs. (18) and (19)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int P_a(N_a l_x) ds = \int \int P_a(\partial N_a / \partial x) dA \quad (18)$$

$$\int Q_a(N_a l_y) ds = \int \int P_a(\partial N_a / \partial y) dA \quad (19)$$

표면적분과정이 절점 C를 공유하고 있는 요소에 대하여 수행되고 P_a , Q_a 는 적분항과 무관하므로 Eqs. (20) and (21)으로 기술된다.

$$\int (N_a l_x) ds = \int \int (\partial N_a / \partial x) dA \quad (20)$$

$$\int (N_a l_y) ds = \int \int (\partial N_a / \partial y) dA \quad (21)$$

여기서 계수 P_a , Q_a 가 각각 $\cos\theta$, $\sin\theta$ 에 비례하고 있음을 보여주고 있으며, $\tan\theta$ 는 Eq. (22)와 같다.

$$\tan\theta = \frac{\int \int (\partial N_a / \partial y) dA}{\int \int (\partial N_a / \partial x) dA} \quad (22)$$

연직방향이 결정되면 절점에서 유량의 접선 및 연직 성분인 Q_{sa} , Q_{ma} 는 x, y 성분에 의하여 Eq. (23)과 같이 기술된다.

$$\begin{bmatrix} Q_{sa} \\ Q_{ma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta_a & -\cos\theta_a \\ \cos\theta_a & \sin\theta_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_a \\ Q_a \end{bmatrix} \quad (23)$$

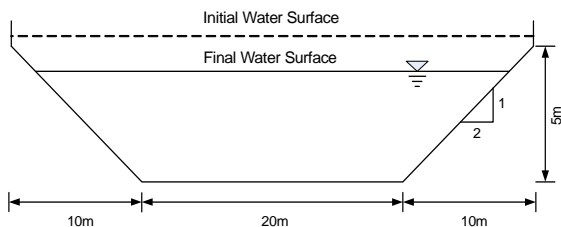
여기서, θ_a 는 절점에서 x축과 연직방향이 이루는 각을 의미한다.

4. 모형의 검증

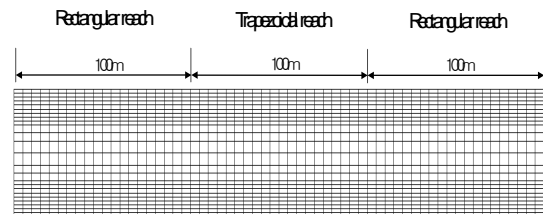
마름/젓음 해석에 관한 개발된 유한요소모형을 검증하기 위해서 직사각형 단면과 사다리꼴 단면 수로 및 실험수로에 대해 모의수행을 실시하였으며 그 결과를 상용 모형 및 실측치와 비교 분석하였다.

4.1 마름 모의시 유량에 대한 검증

앞서 언급했듯이 마름/젓음 모의시 마름 조건으로 인해 제거되는 절점 및 요소로 인해 요소에 포함된 유량이 더해지거나 감해짐으로써 질량의 불연속성이 나타날 수 있다. 이에 본 연구에서는 마름/젓음 모의시 유량의 보존에 대한 검증을 위해 가상의 사다리꼴 단면을 가지는 하도 내에서 사다리꼴 단면의 좌·우측에서 발생하는 마름/젓음 현상에 대해 모의를 실시하였다. 하도의 형상은 길이 300 m, 폭 40 m이며 상호 변화하는 사각형과 사다리꼴 단면을 가진다. 즉, 상류부는 사각형 단면에서 사다리꼴 단면으로, 하류부는 사다리꼴 단면에서 사각형 단면으로 변화하며, 중간부 100 m 구간은 사다리꼴 단면으로 이루어져 있다. Fig. 8(a)는 상류단으로부터 200 m 지점에 위치한 단면의 형상을 나타내고 있다. 상류단 경계조건은 $80 \text{ m}^3/\text{sec}$ 유량이 주어졌고 하류단 경계조건으로는 4 m의 수위를 지정하여 정상상태로 모의하였다. Fig. 8(b)는 모의에 적용된 요소망을 나타내며 마름/젓음 현상의 발생이 예상되는 하도 좌·우측의 요소는 조밀하게 구성하였다.

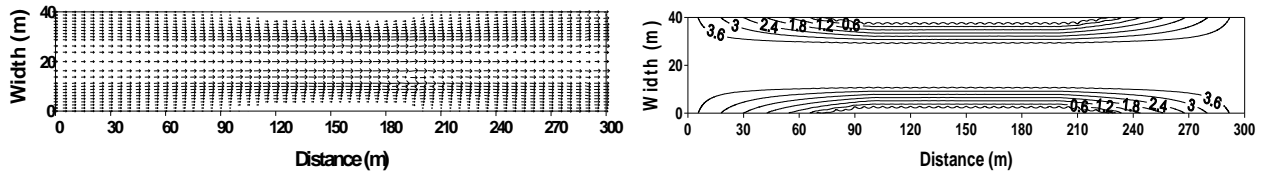


(a) Cross Section at 200m

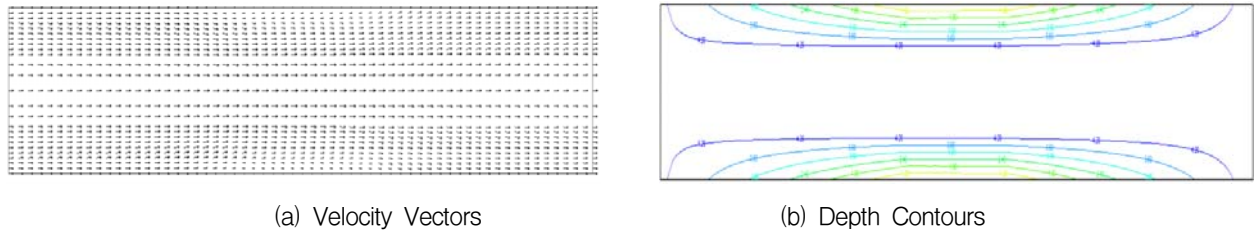


(b) finite element mesh

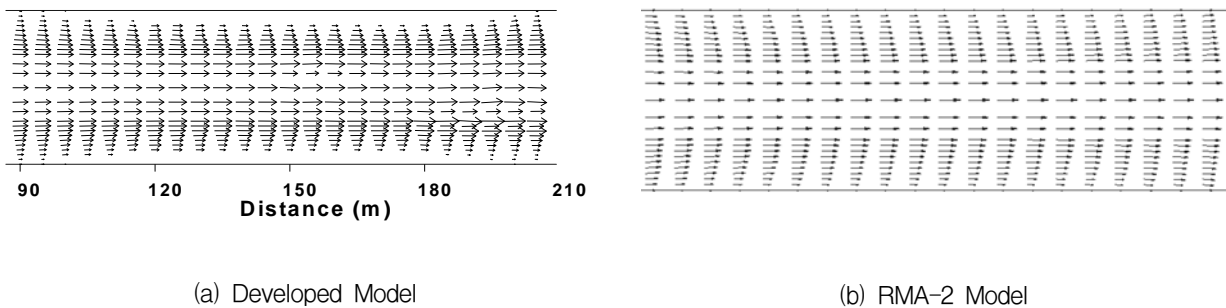
Fig. 8. Cross Section at 200m and Finite Element Mesh



(a) Velocity Vectors (b) Depth Contours
Fig. 9. Velocity Vectors and Depth Contours of Developed Model



(a) Velocity Vectors (b) Depth Contours
Fig. 10. Velocity Vectors and Depth Contours of RMA-2 Model



(a) Developed Model (b) RMA-2 Model
Fig. 11. Comparison of Developed Model and RMA-2 Model

기존 모형과의 비교를 위해 동일 조건하에서 RMA-2 모형에 대해 모의를 실시하였다. Fig. 9은 본 연구에서 개발된 모형의 결과로 유속 벡터도와 등수심도를 나타내고 있는데, 그림에서 보는 바와 같이 대상 하도가 사다리꼴 단면으로 이루어져 있기 때문에 유속의 분포는 하도 중심부에서 빠르게 나타나고 있으며 하도 중심부 부근의 좌·우측에서는 마름 조건으로 인한 유속분포를 적절하게 나타내고 있음을 확인할 수 있었다. Fig. 10는 RMA-2 모형의 결과로 그림에서 보는 바와 같이 사다리꼴 단면의 외측부에서 마름 현상이 잘 나타나지 않는 것을 알 수 있다.

마름이 나타나는 부근에서 모의결과를 좀 더 자세하게 살펴보기 위해 Fig. 11과 같이 확대하여 도시하였다. Fig. 11(a)는 본 연구개발 모형의 결과로 그림에서 보는 바와 같이 마름이 나타나는 구간에서 유속이 '0'으로 나타났으며 또한 마름으로 인한 요소의 제거로 단면의 축소부에서 유속이 빠르게 나타남을 확인할 수 있었다. 그러나 RMA-2 모형의 경우에는 Fig. 11(b)에서 보는바와 같이 마름이 나타나는 구간에서도 유속이 '0'으로 계산되지 않고 흐름이 존재하는 것으로 나타

났다. 이를 통해 본 연구개발 모형이 RMA-2 모형보다 완전 마름구간에서 마름현상을 합리적으로 재현하고 있음을 확인할 수 있었다.

Fig. 12는 본 연구에서 개발된 모형의 유량에 대한 모의 결과를 도시한 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 전 구간에서 유량이 잘 보존되고 있음을 확인할 수 있었다.

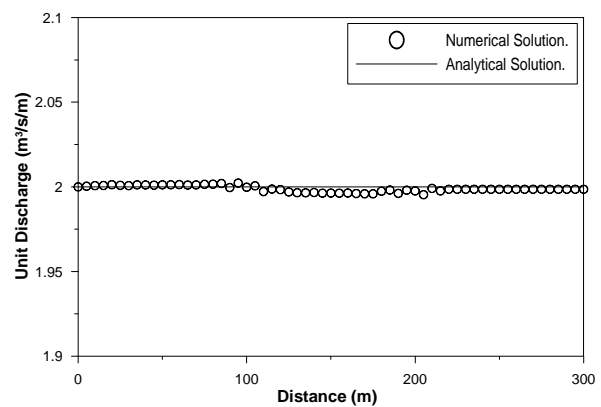


Fig. 12. Comparison of the Analytical and Numerical Solutions for Discharge

유량 보존에 대한 결과를 정량적으로 판단하기 위하여 다음과 같은 오차를 사용하였다.

$$L_1 \text{ 오차} : \|e\|_{L_1} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{\psi_{\max}} \sum_{i=1}^m e_{i,j} \right) \quad (24)$$

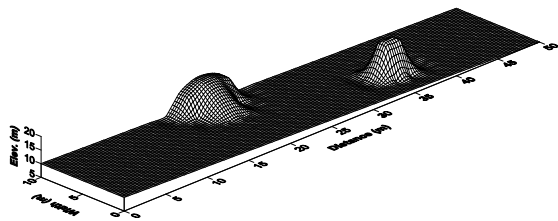
$$L_2 \text{ 오차} : \|e\|_{L_2} = \left[\frac{1}{m} \left(\frac{1}{\psi_{\max}^2} \sum_{i=1}^m e_{i,j}^2 \right) \right]^{1/2} \quad (25)$$

$$L_{\infty} \text{ 오차} : \|e\|_{L_{\infty}} = \frac{1}{\psi_{\max}} \max |e_{i,j}| \quad (26)$$

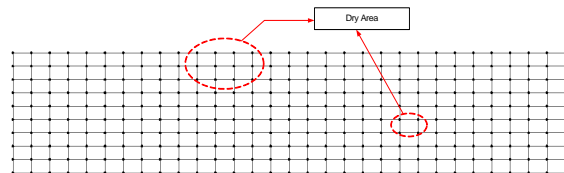
$$\text{평균제곱근 오차} : \|e\|_{RMS} = \left[\frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m e_{i,j}^2 \right) \right]^{1/2} \quad (27)$$

$$\text{평균오차} : \|e\|_{ME} = \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m e_{i,j} \right) \quad (28)$$

여기서, e 는 근사치 ψ 와 정확치 $\widehat{\psi}$ 의 차이 ($e_{i,j} = \psi_{i,j} - \widehat{\psi}_{i,j}$), m 은 자료수, ψ_{\max} 는 ψ_i 의 최대값을 나타낸다. Table 3은 유량에 대한 오차를 나타내고 있는데 표에서 알 수 있듯이 유량 오차가 상당히 작게 나타나고 있음을 확인할 수 있었다. 또한 유량에 대한 평균오차의 경우 0.2 %로 마름/젓음 모의시에도 유량이 잘 보존되고 있음을 확인할 수 있었다.

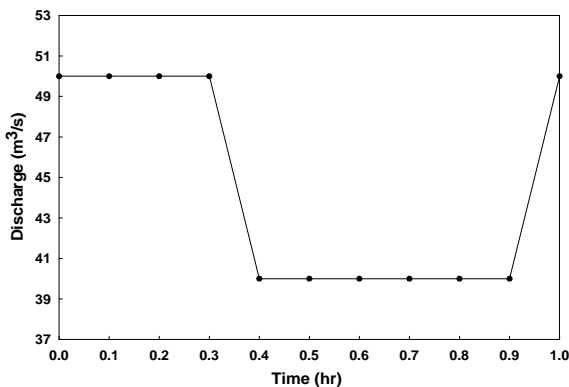


(a) 3-D Bed Elevation

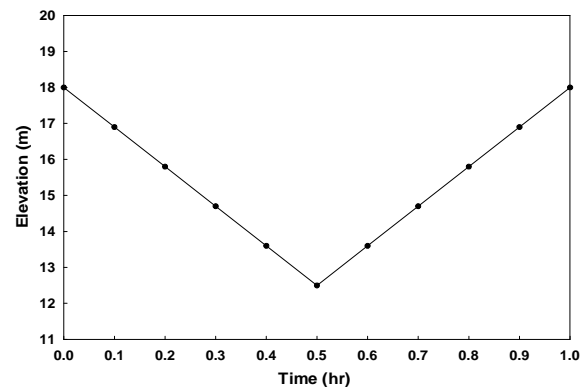


(b) Computational Mesh

Fig. 13. Finite Element Mesh and Bed Elevation



(a) Upstream Boundary



(b) Downstream Boundary

Fig. 14. Boundary Conditions

Table 3. Error of Discharge

L_1 Error	L_2 Error	L_{∞} Error	RMS Error	Mean Error
9.25×10^{-4}	1.08×10^{-3}	2.31×10^{-3}	1.90×10^{-3}	2.00×10^{-3}

4.2 마름/젓음 조건을 갖는 하도에 대한 부정류 해석

본 수치모의는 불규칙적으로 높은 지형을 가지는 직사각형 단면의 하도 내에서 수위의 상승 및 하강에 따른 마름/젓음 처리를 검토하기 위해 실시되었다. 가상 수로의 제원은 길이가 50 m, 폭 10 m이며 하류단 방향으로 좌측 및 중앙부에 높은 하상고를 가진다. 요소망은 310개의 절점, 78개의 경계절점, 270개의 요소로 구성되었으며 계산시간간격은 0.01시간이고 총 모의시간은 1시간으로 하였다. Fig. 13은 모의에 사용된 유한요소망과 하도의 3차원적 형상을 나타내며 점선으로 표시된 부분이 높은 하상고를 가지는 마름/젓음 처리 대상 요소들이다.

마름/젓음 현상을 합리적으로 모의하기 위해서 대상 가상하도에 대한 초기유속은 0인 정적계산 조건으로부터 시작하였으며 상하류단 경계조건은 Fig. 14와 같이 각각 부여하였다.

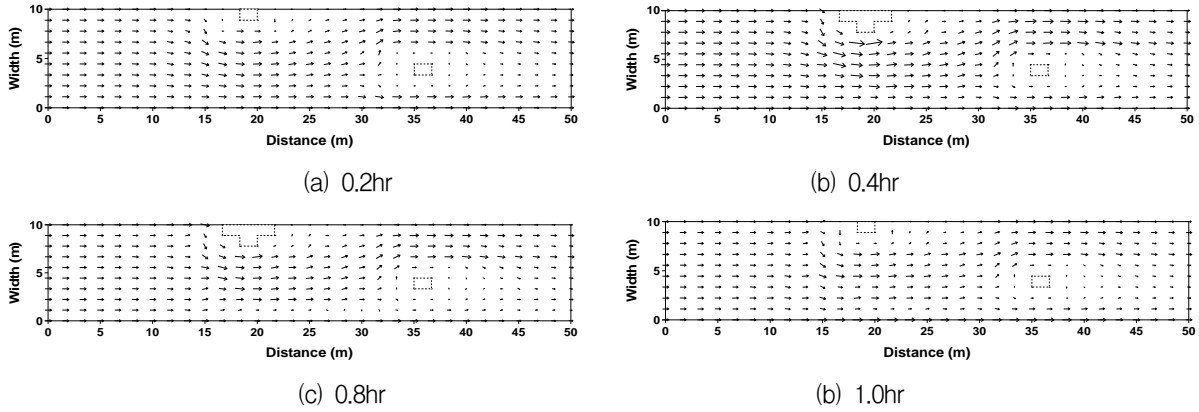


Fig. 15. Velocity Vectors of Developed Model

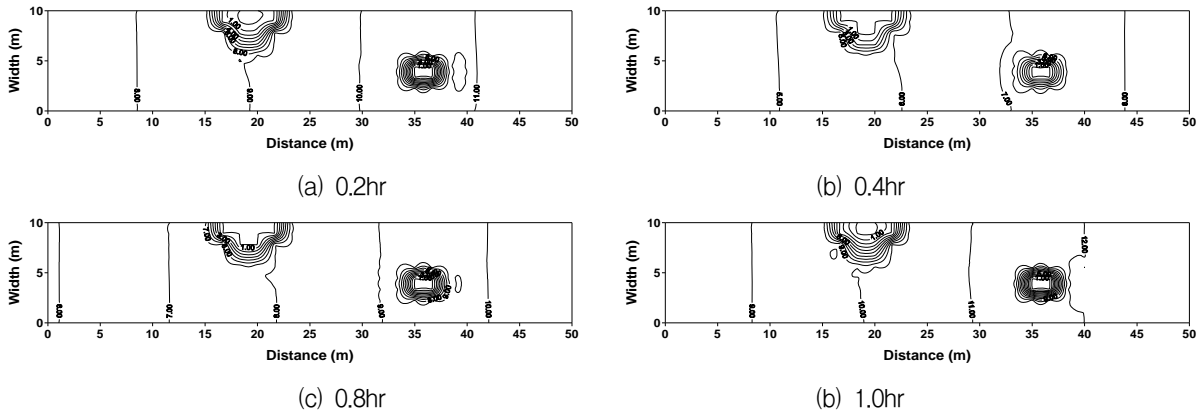


Fig. 16. Depth Contour of Developed Model

주어진 경계 조건하에서 마름/젖음이 나타나는지에 대한 정량적인 판단을 하기 위하여 HEC-RAS 부정류 모의를 실시하였다. 모의 결과 상류로부터 마름이 예상되는 첫 번째 단면에서의 시간에 따른 수위는 12.97 m~18.03 m로 나타났고 마름이 예상되는 두 번째 단면에서의 수위는 12.99 m~18.00 m로 나타났다. 마름이 예상되는 첫 번째 단면의 최고 하상고가 18.17 m이고 두 번째 단면은 18.7 m이므로 모의에 사용된 경계 조건하에서 마름/젖음 현상이 나타남을 확인할 수 있었다. 또한 하도 전 구간에서 수위의 범위는 12.97 m

~18.05 m로 나타났다.

Fig. 15는 계산 시간별 유속분포를 나타내고 있는데, 상·하류 경계조건으로 인해 마름 하도로 판단되어 수위 및 유속 값이 '0'으로 계산된 절점에 대해서는 점선으로 도시하였다. 그림에서 보는 바와 같이 격자재구성 기법을 적용한 본 모형은 시간에 따른 수문곡선의 변화에 의해 발생하는 수위 상승과 하강을 잘 반영하는 것을 확인할 수 있었다. 즉, 높은 지형이 나타나거나 소멸로 인한 2차원 흐름거동에서의 마름/젖음 현상을 합리적으로 모의하는 것을 확인할 수 있었다. Fig. 16은 각

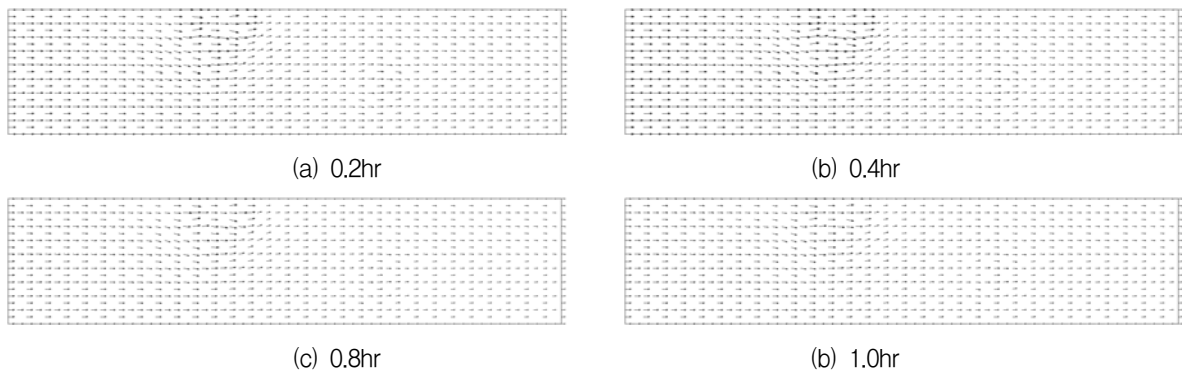


Fig. 17. Velocity Vectors of RMA-2 Model

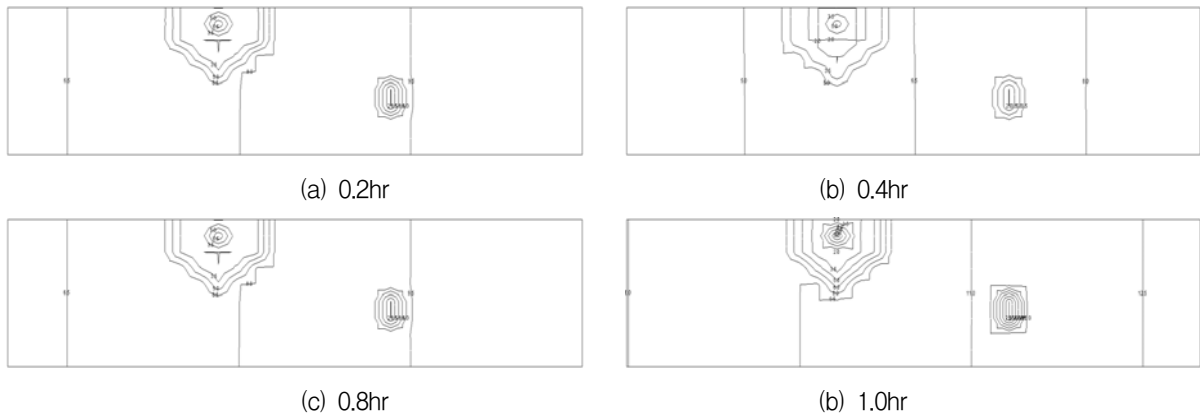


Fig. 18. Depth Contour of RMA-2 Model

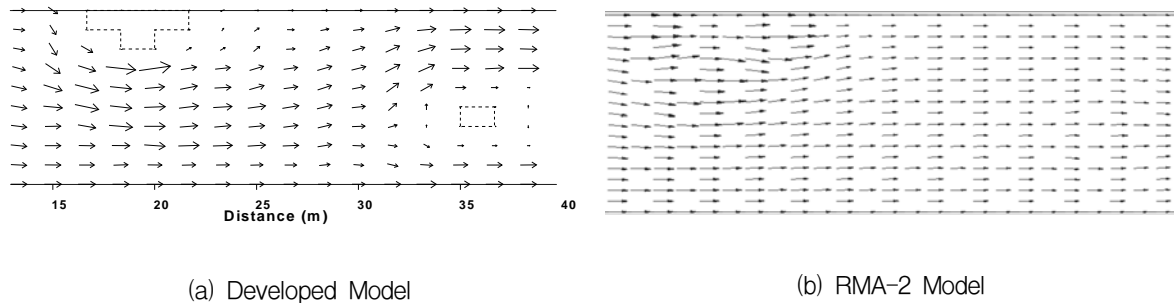


Fig. 19. Comparison of Developed Model and RMA-2 Model at 0.4hr

시간대에서의 등수심도를 나타내고 있다.

기존 모형과의 비교를 위해 상용 모형인 RMA-2 모형을 같은 조건하에서 모의를 실시하였다. Fig. 17 and Fig. 18은 RMA-2 모형의 모의 결과로 유속벡터도와 등수심도를 나타내고 있다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이 마름영역에서 완전한 마름조건이 나타나지 않는 것을 확인할 수 있다.

마름이 나타나는 부근에서 모의결과를 좀 더 자세하게 살펴보기 위해 0.4hr의 모의결과를 Fig. 19와 같이 확대하여 도시하였다. Fig. 19(a)는 본 연구개발 모형의 결과로 그림에서 보는바와 같이 마름이 나타나는 하도 외측부와 내부에서 '0'으로 나타났는데 반해 RMA-2 모형의 경우에는 Fig. 19(b)에서 보는 바와 같이 마름이 나타나는 영역에서도 유속이 '0'으로 계산되지 않고 흐름이 존재하는 것으로 나타났다. 또한 하도 외측부의 마름구간에서는 흐름이 불안정하게 나타나고 있는 것을 확인할 수 있다. 이를 통해 본 연구개발 모형이 RMA-2 모형보다 완전 마름구간에서 마름현상을 합리적으로 재현하고 있음을 확인할 수 있었다.

4.3 마름/젖음 조건을 가지는 실험 수로에 대한 적용

본 연구에서 개발된 모형의 정확성을 검토하기 위해

Fig. 20와 같은 실험수로의 좌측부에 마름/젖음 조건을 가지는 하상조건을 설치하여 실험을 수행하였다. 실험 수로는 직사각형 단면이며, 실험수로의 전체길이는 6.4 m이고 폭은 0.4 m이다.

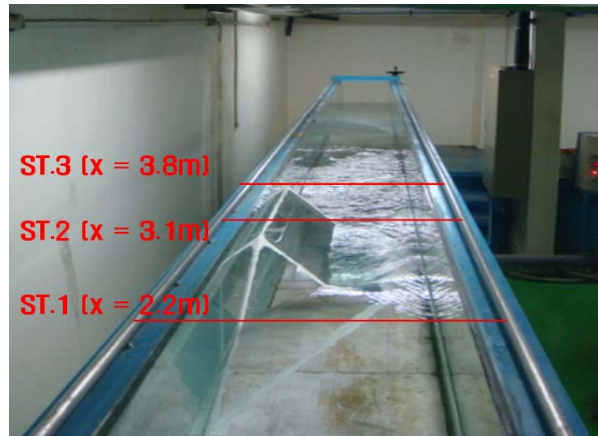


Fig. 20. Experimental Channel

실험수로의 상류단 경계조건은 $0.016 \text{ m}^3/\text{sec}$ 유량조건이 주어졌고 하류단 경계조건은 0.29 m의 수위조건이 주어졌다. 모의에 사용된 유한요소망은 Fig. 21에서 보는 바와 같이 조밀한 요소망과 거친 요소망의 두 경우에 대해 모의를 수행하였다. 실험 결과와의 비교를 위해 Fig. 19에서 보는 바와 같이 3개의 단면을 선택하

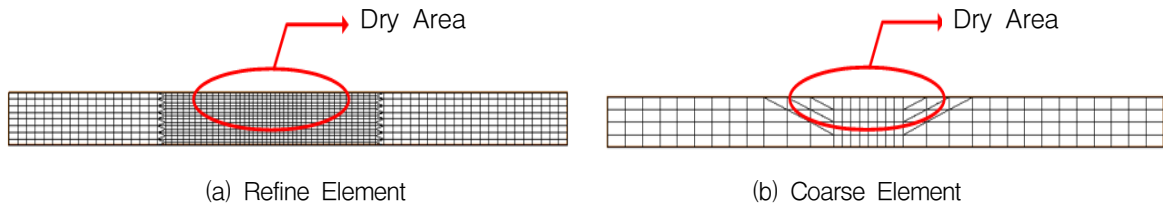
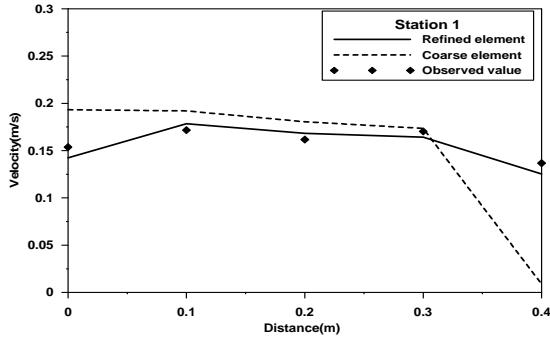
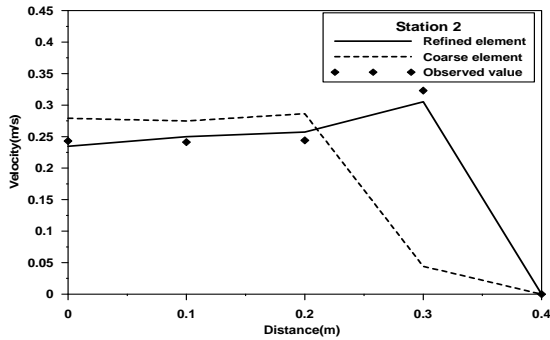


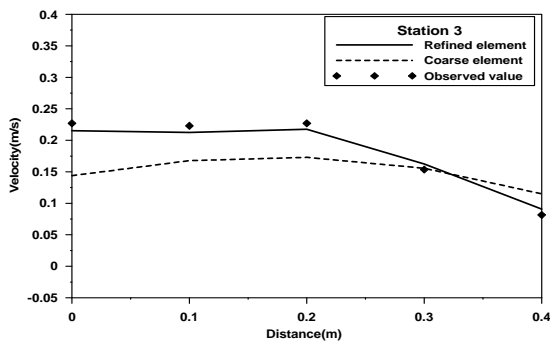
Fig. 21. Finite Element Mesh



(a) Station 1

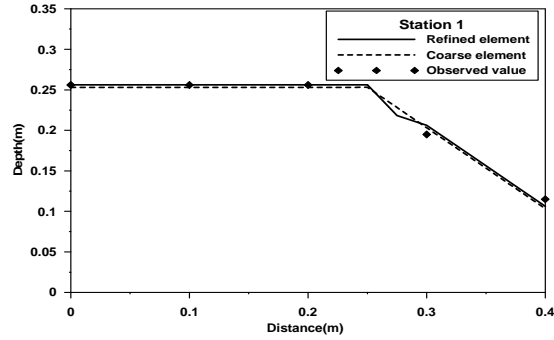


(b) Station 2

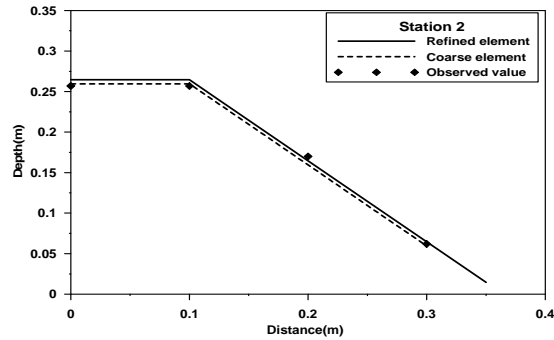


(c) Station 3

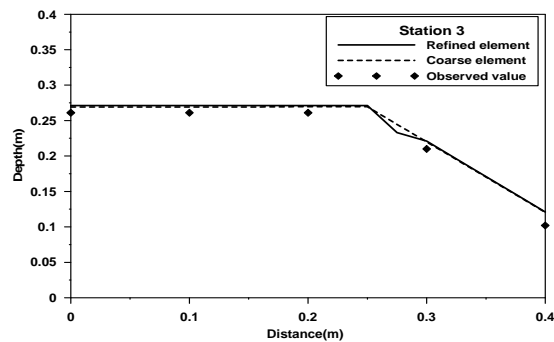
Fig. 22. Comparison Between Measured and Simulated Velocities



(a) Station 1



(b) Station 2

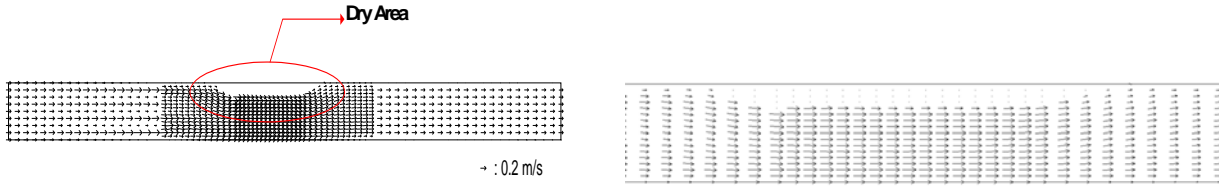


(c) Station 3

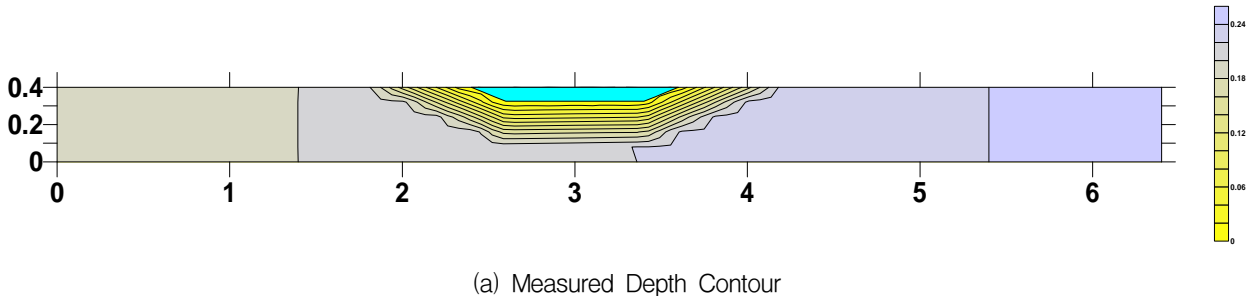
Fig. 23. Comparison Between Measured and Simulated Depths

여 관측을 실시하였다. Station 1은 상류부로부터 2.2 m, Station 2는 3.1 m, Station 3은 3.8 m이다. Fig. 22는 각 Station에서 조밀한 요소망에서의 모의결과와 거친 요소망에서의 모의 결과를 유속 관측값과 비교한 결과이고, Fig. 23은 각 station에서 조밀한 요소망에서의 수심에 대한 모의결과와 거친 요소망에서의 수심에

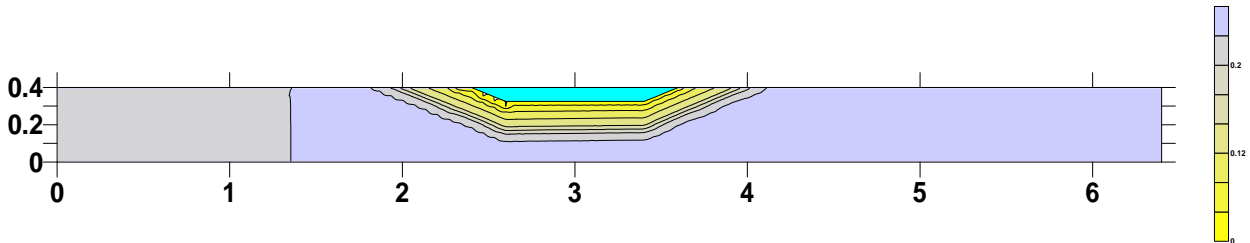
대한 모의 결과를 수심 관측값과 비교한 결과이다. Fig. 24(a)는 조밀한 요소망에서의 모의결과로 유속벡터도를 나타내고 있으며 Fig. 24(b)는 하도 외측부 마름구간을 확대하여 도시한 그림으로 유속이 '0'으로 계산되어 완전한 마름 현상을 적절히 구현하고 있음을 확인할 수 있다.



(a) Velocity Vectors (b) Zoom Dry Area
Fig. 24. Velocity Vectors with Refined Mesh



(a) Measured Depth Contour



(b) Simulated Depth Contour

Fig. 25. Comparison Between Measured and Simulated Depth Contour

그림에서 보는 바와 같이 각 Station에서 모의결과와 관측값이 비교적 잘 일치하는 것을 알 수 있었고 이를 통해 본 연구에서 개발된 모형이 마름/젖음 현상을 잘 구현하고 있음을 확인할 수 있었다. 또한 그림에서 보는 바와 같이 마름/젖음 영역의 명확한 판단을 하는데 있어 조밀한 요소망에서의 모의 결과가 거친 요소망에서의 결과보다 정확한 해를 나타내고 있음을 확인할 수 있었다. Fig. 25는 조밀한 요소망에 대한 모의 결과와 관측값을 비교하여 나타낸 등수심도이다. 그림에서 보는 바와 같이 모의한 결과와 관측값이 비교적 잘 일치하고 있는 것을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 자연하천에서의 마름/젖음 현상에 대한 흐름해석을 위해서 격자재구성 기법을 이용한 2차원 하천 흐름해석 모형을 개발하였다. 본 연구의 주요 연구결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 본 연구에서는 불규칙한 경계조건을 가진 자연

하천에서의 2차원 흐름 거동을 모의하는데 적합한 유한요소모형을 기반으로 자연하천에서 수위의 상승 및 하강에 따라 빈번히 발생하는 마름/젖음을 처리하기 위해서 격자재구성 기법을 개발하였다.

(2) 격자재구성 기법은 계산 시간 동안에 수위의 상승 및 하강 속도를 계산하여 마른 요소에 대해서는 요소를 제거하고 젖은 요소에 대해서는 격자를 자동으로 재생성함으로써 마름/젖음을 처리한다. 이 기법은 마른 요소가 나타나는 경우 적용 격자의 감소로 인해 방정식의 수가 줄어들게 되어 좀 더 빠르게 모의 할 수 있고 시간의 변화에 따른 마름/젖음 현상을 좀 더 실제적으로 표현할 수 있을 것으로 판단된다.

(3) 마름/젖음 모의시 유량의 보존에 대한 검증을 위해 가상의 사다리꼴 단면을 가지는 하도에서 마름/젖음 현상에 대해 모의를 실시하였다. 그 결과 유량에 대한 평균오차가 0.2%로 하도 전구간에서

유량 보존 특성이 잘 이루어지고 있음을 확인할 수 있었다. 또한 수위의 상승 및 하강에 따른 마름/젖음 현상에 대한 모의의 검증에 위해서 사다리꼴 단면과 내부에 높은 지형을 갖는 직사각형 하도 구간에 대한 2차원 흐름양상을 모의하였으며 해석결과 시간변화에 따라 마름/젖음을 합리적으로 모의하고 있음을 확인할 수 있었다.

- (4) 본 연구에서 개발된 마름/젖음 알고리즘의 정확성을 검토하기 위해 수로의 외측부에 마름/젖음 조건을 가지는 실험수로에 대해 모의를 실시하고, 유속과 수심에 대해 실측치와 비교·검토 하였다. 그 결과 각각의 지점에서 유속과 수심이 실측치와 잘 일치하는 것을 확인할 수 있었다. 마름/젖음 처리시 요소의 해상도에 따른 검토를 위해 마름/젖음 구간에 대해 요소를 거칠게 구성한 경우와 조밀하게 구성한 경우에 대해 비교한 결과 조밀하게 구성한 경우가 실제 지형을 정확하게 반영하여 마름조건으로 인한 흐름거동을 합리적으로 재현하며 수치계산의 정확성이 향상되었음을 확인할 수 있었다.

감사의 글

본 연구는 과학기술부가 출연하고 수자원의 지속적 확보기술개발사업단에서 위탁 시행한 21세기 프론티어 연구개발사업중 “RAM2 모형의 확장개발 및 상용화”(과제번호2-3-3)에 의해 수행되었습니다.

참고 문헌

- 김원 (1999). 고정확도 수치기법을 이용한 하천 천이류 해석모형의 개발. 박사학위논문, 경북대학교, pp. 10-20.
- 박재홍 (1997). 유한요소법에 의한 오염물의 동수역학적 확산해석. 박사학위논문, 경북대학교, pp. 8-16.
- 백창현 (2006). 하천흐름해석을 위한 3차원 상향가중 유한요소모형의 개발. 박사학위논문, 경북대학교, pp. 6-11.
- 윤용남, 박무중 (1994). “FESWMS-2DH에 의한 한강 하류부의 수리특성 분석.” **대한토목학회논문집**, 제 14권, 제4호, pp. 847-857.
- 윤태훈 (1982). “유한요소법에 의한 항만에서의 토사이동 추정모형.” **대한토목학회논문집**, 제2권, 제2호, pp. 847-857.
- 이길성, 강주환 (1989). “천수방정식의 유한차분특성.” **대한토목학회논문집**, 제9권, 제1호, pp. 41-52.
- 이진희, 김정탁, 심명필 (1996). “개수로에서의 2차원 부정류 해석을 위한 유한체적법.” **한국수자원학회 논문집**, 제29권, 제5호, pp. 173-184.
- 최병호 (1983). “경기만남부해역의 M2조석영향.” **대한토목학회 논문집**, 제3권, 제2호, pp. 97-107.
- 한건연, 김상호 (2000). “Petrov-Galerkin 기법에 의한 하천에서의 이송-확산 해석.” **대한토목학회 논문집**, 제20권, 제2-B호, pp. 45-53.
- 한건연, 김정역 (1982). “수치모델에 의한 만내의 2차원 동수역학 해석.” **한국수자원학회 논문집**, 제15권, 제 4호, pp. 167-178.
- 한건연, 박경욱, 백창현 (2003). “SU/PG 기법에 의한 하천흐름의 유한요소해석 : II. 적용.” **대한토목학회 논문집**, 제24권, 제3B호, pp. 193-199.
- 한건연, 이종태, 박재홍 (1996). “개수로내의 점변 및 급변 부정류에 대한 유한요소해석: I. 이론 및 수치안정성 해석.” **한국수자원학회 논문집**, 제29권, 제4호, pp. 167-178.
- 한국건설기술연구원 (1995). **이차원 하천 모형의 개발 (I)**, KICT/95-WR-1103-1, pp. 8-19.
- Akanbi, A.A. and Katopodes, N.D. (1988). “Model for Flood Propagation on Initially Dry Land.” *Journal of Hydraulics Engineering*, ASCE, Vol. 16, pp. 489-505.
- Berger, R.C. and Howington, S.E. (2005). “Discrete Fluxes and Mass Balances in Finite Elements.” *Journal of Hydraulics Engineering*, Vol. 128, pp. 97-92.
- Boe, O. (1993). “A monotone Petrov-Galerkin method for quasi-linear parabolic differential equations.” *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 14, pp. 1057-1071.
- Han, Kun-Yeun, and Baik, Chang-Hyun. (2006). “Finite Element Hydrodynamic Modeling in a River.” *River Flow 2006*, pp. 670-689.
- Hervouet, J.M., and Janin, J.M. (1994). “Finite element algorithms for modeling flood propagation.” *Modeling of Flood Propagation over Initially Dry Areas, Proc., Specialty Conf. Co-sponsored by ASCE-CNR/GNDICI-ENEL spa*, Milan, Italy, ASCE, New York, pp. 102-113.
- Katopodes, N.D. (1987). “Analysis of transient flow through broken levees.” *Turbulence Measurements and Flow Modeling*, Hemisphere Publishing Corp., Washington, D. C., pp. 301-310.

Leclerc, M., Bellemare, J., Dumas, G. and Dhatt, G. (1990). "A Finite Element Model of Estuarine and River Flows with Moving Boundaries." *Advanced in Water Resources*, Vol. 13, No. 4, pp. 158-168.

Tchamen, G.W. and Kahawita, R. (1994). "The Numerical Simulation of Wetting and Drying Areas Using Riemann Solver." *Modeling of Flood*

Propagation over Initially Dry Areas, Proc., Specialty Conf. Co-sponsored by ASCE-CNR/GNDCl-ENEL spa, pp. 127-140.

논문번호: 09-079	접수: 2009.07.07
수정일자: 2009.08.27/09.11	심사완료: 2009.09.11