

$u-w$ 정식화에 근거한 지하수로 포화된 가로등방성 층상지반에서의 3차원 전달경계

3D Transmitting Boundary for Water-Saturated Transversely Isotropic Soil Strata Based on the $u-w$ Formulation

이진호¹⁾ · 김재관²⁾ · 류정수³⁾

Lee, Jin Ho · Kim, Jae Kwan · Ryu, Jeong-Soo

국문 요약 >> 이 연구에서는 $u-w$ 정식화에 근거하여 일반적인 3차원 문제에 적용할 수 있는 지하수로 포화된 가로등방성 층상지반에서의 3차원 전달경계를 개발하였다. 지반 원역에서의 동적거동을 Fourier 급수로 전개하고, 각 항에 대한 동적강성을 $u-w$ 정식화에 근거하여 유도하였다. 그리고 이를 Cartesian 좌표계에서 표현된 지반 근역의 3차원 유한요소와 결합할 수 있도록 변형하여 일반적인 3차원 문제에도 적용할 수 있는 방법을 개발하였다. 개발된 방법을 강체 원형 기초의 동적거동 해석에 적용하고 기존의 해석 결과와 비교하여, 이 연구에서 개발된 전달경계가 정확함을 확인하였다. 또한 다양한 형태의 강체 기초 동적거동 해석에 개발된 전달경계를 적용하였고, 지하수로 포화된 가로등방성 층상지반에서 지하수위에 따라 강체 기초 동적거동의 변화 양상을 조사하여, 이 연구에서 개발된 방법의 활용성을 입증하였다.

주요어 전달경계, 지하수로 포화된 지반, 가로등방성, 지반-구조물 상호작용

ABSTRACT >> In this study, a 3D transmitting boundary in water-saturated transversely isotropic soil strata has been developed based on $u-w$ formulation for application to general 3D analysis. Behavior in the far field region is expanded in the Fourier series, and dynamic stiffness for each term is obtained based on the $u-w$ formulation. Transformation of the dynamic stiffness is presented to combine the transmitting boundary with the 3D finite elements for the near field region formulated in a 3D Cartesian coordinate system. The developed transmitting boundary is verified through a comparison of the dynamic behavior of a rigid circular foundation with the results from the existing numerical method. In addition, the developed transmitting boundary is applied to the analysis of the dynamic behavior of rigid foundations of diverse shapes, and the effects of the level of the groundwater table on the dynamic stiffness of a rigid rectangular foundation in the water-saturated transversely isotropic layered stratum are studied.

Key words Transmitting boundary, Water-saturated soil, Transversely isotropy, Soil-structure interaction

1. 서론

연약한 지반 위에 건설된 액체저장탱크, 원자력 발전소, 장대교량 등의 특수 구조물의 동적거동은 지반-구조물 상호작용의 영향을 많이 받음은 이미 알려진 사실이다. 이러한 시스템의 지반-구조물 상호작용 문제를 해석하기 위하여 지금까지 다양한 연구가 이루어져 왔다. 지반-구조물 상호작용

해석 시 가장 문제가 되는 것은 무한한 지반의 원역 처리 문제이기에 원역에 대한 효과적인 수치 모형으로 여러가지 방법이 개발되었다. 이러한 원역의 수치 모형으로는 전달경계⁽¹⁻¹⁴⁾, 점성경계^{(15),(16)}, 경계요소⁽¹⁷⁾, 무한요소⁽¹⁸⁻²⁰⁾, system identification에 의한 방법^{(21),(22)} 등이 제시되었다. 이중 전달경계는 그 해의 정확성과 층상지반 문제에 적용하기가 쉽기 때문에 많은 연구자들에 의해 연구가 이루어졌다.

Waas⁽¹⁾은 강체 기반암 위에 놓인 층상지반에서의 파전파 해석을 위한 반해석적 유한요소(Semi-Analytic Finite Element)를 개발하였고 강체 줄 기초와 원형 기초의 동적강성 해석에 적용하였다. 그의 연구에서 지반의 근역에 대해서는 기존의 유한요소를 사용하였고 원역에 대해서는 반해석적 유

¹⁾ 정회원·한국원자력연구원 연구로공학부, 박사후연구원
(교신저자: jholee0218@gmail.com)

²⁾ 정회원, 서울대학교 건설환경공학부, 교수

³⁾ 한국원자력연구원 연구로공학부, 책임연구원

본 논문에 대한 토의를 2010년 2월 28일까지 학회로 보내 주시면 그 결과를 게재하겠습니다.

(논문접수일 : 2009. 7. 24 / 수정일 : 2009. 10. 28, 게재확정일 : 2009. 11. 12)

한 요소를 사용하였다. 이 반해석적 유한요소는 초유한요소 (Hyperelement)라 불리기도 한다. Kausel⁽²⁾은 Waas의 연구를 확장하여 원형 기초의 수평 운동과 rocking 운동에 적용할 수 있는 전달경계를 개발하였다. Tassoulas⁽³⁾는 상보해와 지반 근역에서의 inhomogeneous 경계조건을 만족시키는 특수해를 결합하여 inhomogeneous 원형 및 환형 초유한요소를 개발하였고, 그가 개발한 균질 원형 및 환형 초유한요소와 함께 사용하여 지반의 근역에 대해서도 초유한요소를 사용하였다. 일반적인 3차원 전달경계가 Werkle⁽⁴⁾과 Lin and Tassoulas⁽⁵⁾에 의해 개발되어 임의의 형상을 가진 강체 기초의 동적거동 해석이 가능하게 되었다. 최근에 Kim et al.⁽⁶⁾은 2차원 전달경계의 Fourier 중첩을 사용하여 일반적인 3차원 좌표계에서 사용할 수 있는 전달경계를 개발하여 비균질 지반에 놓인 강체 사각형 기초의 동적거동을 해석하기도 하였다. 또한 강체 기반암 위에 놓인 층상지반이 아닌 반무한 지반에서의 초유한요소에 대한 연구가 이루어지기도 하였다. Andrade⁽⁷⁾는 반무한 지반의 동적강성의 second-order approximation에 근거하여 반무한 지반에 대한 반무한 유한요소와 초유한요소를 개발하여 반무한 지반에 놓인 표면 기초와 묻힌 기초의 동적거동을 해석하였다

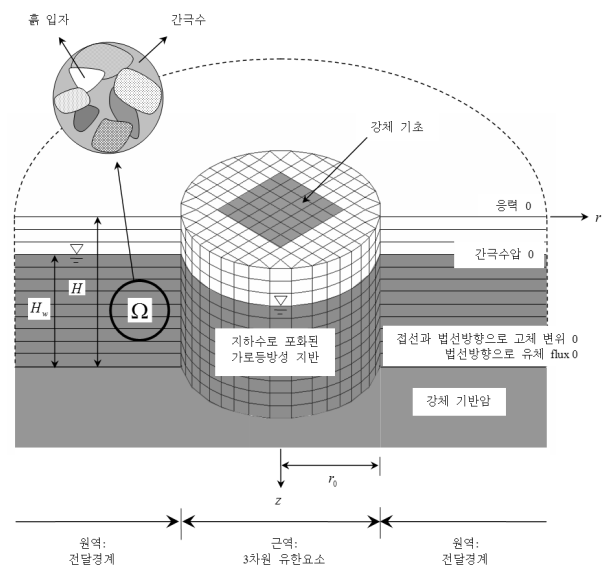
지반에는 일정한 깊이부터 분명 지하수가 존재하게 되고 이로 인해 지하수위 아래의 지반은 지하수로 포화된 2상 매질이므로, 지반-구조물 상호작용계의 정확한 지진응답을 구하기 위해서는 지반을 지하수로 포화된 다공성 2상 매질로 모형화하여야 한다. 이러한 목적을 위하여 앞에서 언급한 반해석적 방법을 확장하여 지하수로 포화된 지반에 대해서도 적용가능 하도록 연구가 이루어져 왔다. Nogami and Kazama^{(8),(9)}는 Biot의 이론⁽²³⁾을 이용하여 지하수로 포화된 지반의 동적거동 해석에 적용할 수 있는 thin layer method를 개발하여 다양한 지반의 동적거동을 조사하였고 지하수로 인해 지반의 동적거동이 상당한 영향을 받을 수 있음을 보였다. Bougacha et al.^{(10),(11)}은 Nogami and Kazama의 연구와는 다른 정식화를 이용하여 간극수로 포화된 다공성 층상지반에 놓인 강체 줄 기초와 원형 기초의 동적거동 해석에 적용할 수 있는 전달경계를 개발하였다. 이진호⁽¹²⁾와 Lee and Kim⁽¹³⁾은 Nogami and Kazama와 Bougacha et al.의 연구의 한계를 보완하고 지반의 가로등방성 효과를 고려하여 가장 엄밀한 전달경계를 개발하고, 이를 액체저장탱크의 지진응답해석에 적용하였다.⁽¹⁴⁾

이 연구에서는 Lee and Kim이 개발한 방법을 일반적인 3차원 문제에 적용할 수 있도록 확장하였다. 단, Lee and Kim의 연구는 $u-U$ 정식화에 근거하였지만, 이 연구에서는

$u-w$ 정식화에 근거하여 이론을 전개하였다. $u-w$ 정식화는 지반과 구조물이 접하는 부분에서의 경계조건을 부과하는 것이 기존의 방법보다 더 수월해지는 장점이 있기 때문이다. 지반 원역에서의 지반의 거동을 Fourier 급수로 전개하고, 각 항에 대한 동적강성을 $u-w$ 정식화에 근거하여 Lee and Kim에서 개발한 방법과 동등하게 유도한다. 그리고 이를 Cartesian 좌표계에서 표현된 지반 근역의 3차원 유한요소와 결합할 수 있도록 변형하여, 일반적인 3차원 문제에도 적용할 수 있는 방법을 개발하였다. 개발된 방법을 사용하여 강제 원형 기초의 동적강성을 구하고 이를 기존의 결과와 비교하여 그 정확성을 검증하였다. 또한 강제 정사각형 기초와 직사각형 기초의 동적거동 해석에 적용하였고, 지하수로 포화된 가로등방성 층상지반에 놓인 강제 직사각형 기초의 동적거동이 지하수위의 변화에 따라 어떻게 변화하는지 조사하여 일반적인 3차원 지반-구조물 상호작용 해석에의 적용 가능성을 검토하였다.

2. 지하수로 포화된 가로등방성 매질에서의 운동방정식

지하수로 포화된 다공성 매질의 지배방정식은 일반화된 Biot의 이론⁽²³⁻²⁵⁾이나 혼합물 이론 (Mixture Theory)⁽²⁶⁾으로부터 유도할 수 있다. 만약 비선형 대류항, 물체력(Body Force)의 효과, 밀도와 온도의 변화 등을 무시한다면, 일반적인 직교 좌표계에서 영역 Ω (그림 1)에 대한 지배방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.



〈그림 1〉 지하수로 포화된 가로등방성 층상지반에 놓인 강체 기초

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \rho_w \ddot{\mathbf{w}} \quad (1a)$$

$$\nabla p + \mathbf{f}\dot{\mathbf{w}} + \rho_w \ddot{\mathbf{u}} + \frac{\rho_w}{n} \ddot{\mathbf{w}} = 0 \quad (1b)$$

$$\frac{1}{Q} \dot{p} + (\boldsymbol{\alpha} \nabla) \cdot \dot{\mathbf{u}} + \nabla \cdot \dot{\mathbf{w}} = 0 \quad (1c)$$

여기서 $\boldsymbol{\sigma}$ 는 흙의 전응력, \mathbf{u} 는 흙의 변위, $\mathbf{w} = n(\mathbf{U} - \mathbf{u})$ 는 $\dot{\mathbf{w}}$ 이 평균 상대 침투속도가 되도록 정의한 흙에 대한 간극수의 상대변위(Pseudo-Displacement)인데 \mathbf{U} 는 간극수의 변위이다. p 는 간극수압, n 은 간극률, ρ_w 는 간극수의 밀도, $\rho = (1-n)\rho_s + n\rho_w$ 는 흙과 간극수 혼합물의 평균 밀도인데 ρ_s 는 흙 입자의 밀도이다. $\mathbf{f} = \boldsymbol{\kappa}^{-1}$ 이고 $\boldsymbol{\kappa}$ 는 투수계수 tensor이다. $\boldsymbol{\kappa}$ 는 가로등방성 매질에서 다음과 같이 표현된다.

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_h & & \\ & \kappa_h & \\ & & \kappa_v \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서 κ_h 와 κ_v 는 각각 등방성 평면 내에서의와 이에 수직인 방향으로의 투수계수를 나타낸다. 식 (1c)에서 $\boldsymbol{\alpha}$ 는 일반화된 Biot의 상수이다. 이는 가로등방성 매질에서 다음과 같이 표현된다.

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{I} - \frac{1}{3K_s} \mathbf{D} : \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \alpha_h & & \\ & \alpha_h & \\ & & \alpha_v \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서 \mathbf{D} 는 가로등방성 매질의 탄성계수 tensor이고 부록 1에 주어진 바와 같다. \mathbf{I} 는 2차 단위 tensor이고 K_s 는 흙 입자의 체적팽창계수이다. 식 (1c)의 체적팽창계수 Q 는 흙 골격의 체적팽창계수 K_T , 흙 입자의 체적팽창계수 K_s , 간극수의 체적팽창계수 K_w 에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{1}{Q} = \frac{\alpha - n}{K_s} + \frac{n}{K_w} \quad (4a)$$

$$\alpha = \frac{1}{3} \mathbf{I} : \boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{3} \boldsymbol{\alpha} : \mathbf{I} = 1 - \frac{K_T}{K_s} \quad (4b)$$

만약 초기응력을 고려하지 않는다면, 전응력 $\boldsymbol{\sigma}$ 는 흙의

유효응력 $\boldsymbol{\sigma}''$, 간극수압 p , 일반화된 Biot의 상수 $\boldsymbol{\alpha}$ 를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}'' - \boldsymbol{\alpha} p = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\alpha} p = \mathbf{D} : \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\alpha} p \quad (5)$$

여기서 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 은 흙의 변형률이다.

영역 Ω 의 경계 $\partial\Omega = \Gamma$ 에서, 흙에 대한 경계조건은 다음과 같이 표현된다.

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n \quad \text{on } \Gamma = \Gamma_t \quad (6a)$$

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma = \Gamma_u \quad (6b)$$

여기서 \mathbf{v} 는 경계 Γ 에서 외향 단위 법선 벡터이고, Γ_t 와 Γ_u 에서 각각 응력과 변위 경계조건이 부과된다. $\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_u$ 이고 $\Gamma_t \cap \Gamma_u = \emptyset$ 이다. 경계 Γ 에서 간극수에 대한 경계조건은 다음과 같이 표현된다.

$$p = \tilde{p} \quad \text{on } \Gamma = \Gamma_p \quad (7a)$$

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{w}} = \tilde{W}_n \quad \text{on } \Gamma = \Gamma_w \quad (7b)$$

여기서 Γ_p 와 Γ_w 는 각각 압력과 flux 경계조건이 부과되는 경계이다. $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_w$ 이고 $\Gamma_p \cap \Gamma_w = \emptyset$ 이다.

지배방정식 (1)은 선택한 해법 과정에 따라 여러가지 방법으로 재정식화할 수 있다. 만약 어떠한 변형도 없이 원래 형태대로 사용하면, 이는 full mixed formulation 또는 $u-p-U$ 정식화라고 부른다.^{(25),(27)} 만약 초기 조건을 0이라고 가정하면, 식 (1c)를 적분할 수 있고 간극수압 p 를 \mathbf{u} 와 \mathbf{w} 에 의해 표현할 수 있다. 그러면 식 (1a)와 (1b)에서 간극수압을 소거하여 다음과 같이 $u-w$ 정식화의 형태로 다시 표현할 수 있다.

$$\nabla \cdot (\mathbf{D} : \nabla \mathbf{u}) + Q(\boldsymbol{\alpha} \nabla) \cdot \mathbf{u} + Q(\boldsymbol{\alpha} \nabla) \nabla \cdot \mathbf{w} - \rho \ddot{\mathbf{u}} - \rho_w \ddot{\mathbf{w}} = 0 \quad (8a)$$

$$Q \nabla (\boldsymbol{\alpha} \nabla) \cdot \mathbf{u} + Q \nabla \nabla \cdot \mathbf{w} - \rho_w \ddot{\mathbf{u}} - \frac{\rho_w}{n} \ddot{\mathbf{w}} - \mathbf{f}\dot{\mathbf{w}} = 0 \quad (8b)$$

식 (8)에 $\mathbf{w} = n(\mathbf{U} - \mathbf{u})$ 을 대입한 후 정리하면 $u-U$ 정식화를 얻을 수 있는데, 이 정식화는 기존의 다양한 연구에서 사용된 방법이다.^{(8),(9),(13),(14)} 식 (1)의 또다른 가능한 정식화는 Bougacha et al.⁽¹⁰⁾에서 사용된 방법을 일반화한 $u-p$ 정식화이다.⁽¹³⁾

이 연구에서는 $u-w$ 정식화에 근거하여 이론을 전개하였다. $u-p$ 정식화는 주파수영역에서만 가능한 정식화이지만 $u-w$ 정식화와 $u-U$ 정식화는 시간영역에서도 가능한 정식화이므로 이 두가지가 더 일반적인 방법이라고 할 수 있다. 한편, $u-U$ 정식화는 지반과 구조물이 접하는 부분에서 경계조건 (7b), $U_n = u_n$ 을 부과하기 위해 별도의 절차가 필요했다. 하지만, $u-w$ 정식화를 사용하면 이 경계조건이 단순한 $w_n = 0$ 라는 조건으로 바뀌므로 $u-U$ 정식화에서보다는 부과하는 것이 더 수월해지는 장점이 있다. 그러므로 이 연구에서는 식 (8)의 $u-w$ 정식화에 근거하여 일반적인 3차원 문제에도 적용 가능한 전달경계를 유도하였다.

3. 진동 모드와 지배방정식의 분리

지배방정식 (8)의 해를 얻기 위하여, 변수분리법을 사용한다. 흠과 간극수의 변위를 다음과 같이 Fourier 급수를 사용하여 표현할 수 있다. (2),(3),(9),(10)

$$u_r(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{u}_{r,m}(r, z) \begin{bmatrix} \cos(m\theta) \\ \sin(m\theta) \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} k \hat{u}_r(z) C'_m(kr) \begin{bmatrix} \cos(m\theta) \\ \sin(m\theta) \end{bmatrix} \quad (9a)$$

$$u_z(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{u}_{z,m}(r, z) \begin{bmatrix} \cos(m\theta) \\ \sin(m\theta) \end{bmatrix} = -i \sum_{m=0}^{\infty} k \hat{u}_z(z) C_m(kr) \begin{bmatrix} \cos(m\theta) \\ \sin(m\theta) \end{bmatrix} \quad (9b)$$

$$u_\theta(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{u}_{\theta,m}(r, z) \begin{bmatrix} -\sin(m\theta) \\ \cos(m\theta) \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{r} \hat{u}_\theta(z) C_m(kr) \begin{bmatrix} -\sin(m\theta) \\ \cos(m\theta) \end{bmatrix} \quad (9c)$$

$$w_r(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{w}_{r,m}(r, z) \begin{bmatrix} \cos(m\theta) \\ \sin(m\theta) \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} k \hat{w}_r(z) C'_m(kr) \begin{bmatrix} \cos(m\theta) \\ \sin(m\theta) \end{bmatrix} \quad (9d)$$

$$w_z(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{w}_{z,m}(r, z) \begin{bmatrix} \cos(m\theta) \\ \sin(m\theta) \end{bmatrix} = -i \sum_{m=0}^{\infty} k \hat{w}_z(z) C_m(kr) \begin{bmatrix} \cos(m\theta) \\ \sin(m\theta) \end{bmatrix} \quad (9e)$$

$$w_\theta(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{w}_{\theta,m}(r, z) \begin{bmatrix} -\sin(m\theta) \\ \cos(m\theta) \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{r} \hat{w}_\theta(z) C_m(kr) \begin{bmatrix} -\sin(m\theta) \\ \cos(m\theta) \end{bmatrix} \quad (9f)$$

그리고

$$u_r(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{u}_{r,m}(r, z) \begin{bmatrix} \cos(m\theta) \\ \sin(m\theta) \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{r} \hat{u}_\theta(z) C_m(kr) \begin{bmatrix} \cos(m\theta) \\ \sin(m\theta) \end{bmatrix} \quad (10a)$$

$$u_z(r, \theta, z) = 0 \quad (10b)$$

$$u_\theta(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{u}_{\theta,m}(r, z) \begin{bmatrix} -\sin(m\theta) \\ \cos(m\theta) \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} k \hat{u}_\theta(z) C'_m(kr) \begin{bmatrix} -\sin(m\theta) \\ \cos(m\theta) \end{bmatrix} \quad (10c)$$

$$w_r(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{w}_{r,m}(r, z) \begin{bmatrix} \cos(m\theta) \\ \sin(m\theta) \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{r} \hat{w}_\theta(z) C_m(kr) \begin{bmatrix} \cos(m\theta) \\ \sin(m\theta) \end{bmatrix} \quad (10d)$$

$$w_z(r, \theta, z) = 0 \quad (10e)$$

$$w_\theta(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{w}_{\theta,m}(r, z) \begin{bmatrix} -\sin(m\theta) \\ \cos(m\theta) \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} k \hat{w}_\theta(z) C'_m(kr) \begin{bmatrix} -\sin(m\theta) \\ \cos(m\theta) \end{bmatrix} \quad (10f)$$

여기서 u_r , u_z , u_θ 는 각각 반경방향, 축방향, 원주방향

으로의 흠의 변위이고 w_r , w_z , w_θ 는 각각 간극수의 상대 변위이다. $\bar{u}_{r,m}$, $\bar{u}_{z,m}$, $\bar{u}_{\theta,m}$, $\bar{w}_{r,m}$, $\bar{w}_{z,m}$, $\bar{w}_{\theta,m}$ 은 각각 대응하는 변위의 Fourier 수 m 에 대한 진폭이다. $C_m(\xi)$ 은 m 차의 Bessel 방정식의 해이고, prime은 변수 $\xi = kr$ 에 관한 미분을 나타낸다. 괄호에서 위의 항은 대칭 모드이고, 아래의 항은 역대칭 모드이다.

간단한 대입에 의하여 \hat{u}_r , \hat{u}_z , \hat{w}_r , \hat{w}_z 는 다음의 식을 만족함을 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{(elastic force)} & \text{(force due to pore pressure gradient)} \\ & \left(d_{44} k^2 \hat{u}_r - d_{55} \frac{\partial^2 \hat{u}_r}{\partial z^2} + (d_{13} + d_{31}) i k \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial z} \right) + \left(Q \alpha_s k^2 \hat{u}_r + Q \alpha_s \alpha_s i k \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial z} + Q \alpha_s k^2 \hat{w}_r + Q \alpha_s i k \frac{\partial \hat{w}_r}{\partial z} \right) \\ & + (-\omega^2 \rho \hat{u}_r - \omega^2 \rho_w \hat{w}_r) = 0 \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} & \left(d_{44} k^2 \hat{u}_z - d_{55} \frac{\partial^2 \hat{u}_z}{\partial z^2} + (d_{13} + d_{31}) i k \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial z} \right) + \left(Q \alpha_s \alpha_s i k \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial z} - Q \alpha_s^2 \frac{\partial^2 \hat{u}_z}{\partial z^2} + Q \alpha_s i k \frac{\partial \hat{w}_z}{\partial z} - Q \alpha_s \frac{\partial^2 \hat{w}_z}{\partial z^2} \right) \\ & + (-\omega^2 \rho \hat{u}_z - \omega^2 \rho_w \hat{w}_z) = 0 \end{aligned} \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} & \left(Q \alpha_s k^2 \hat{u}_r + Q \alpha_s i k \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial z} + Q k^2 \hat{w}_r + Q i k \frac{\partial \hat{w}_r}{\partial z} \right) \\ & + \left(-\omega^2 \rho_w \hat{u}_r - \omega^2 \frac{\rho_w}{n} \hat{w}_r \right) + i \omega f_r \hat{w}_r = 0 \end{aligned} \quad (11c)$$

$$\begin{aligned} & \left(Q \alpha_s i k \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial z} - Q \alpha_s \frac{\partial^2 \hat{u}_r}{\partial z^2} + Q i k \frac{\partial \hat{w}_r}{\partial z} - Q \frac{\partial^2 \hat{w}_r}{\partial z^2} \right) \\ & + \left(-\omega^2 \rho_w \hat{u}_r - \omega^2 \frac{\rho_w}{n} \hat{w}_r \right) + i \omega f_r \hat{w}_r = 0 \end{aligned} \quad (11d)$$

식 (11)은 Rayleigh 파 모드에 대한 방정식이다. 식 (11)의 4개의 방정식은 서로 독립적이지 않으므로 3개의 독립적인 방정식으로 축약할 수 있는데, 그 방정식은 $u-p$ 정식화에 의한 운동방정식⁽¹⁰⁾과 일치한다. 식 (11)에서 Rayleigh 파 모드에 대한 운동방정식은 탄성력, 간극수압의 gradient에 의한 힘, 관성력, 감쇠력과 관계된 4개의 항으로 구성된 것을 확인할 수 있다. 탄성력과 간극수압의 구배에 의한 힘은 각각 흠의 유효응력과 간극수압의 공간적 분포에 의해서 발생하는데 이는 흠과 간극수의 부분응력(Partial Stress)의 개념으로 설명할 수 있다. 감쇠력은 점성 또는 이력감쇠가 아닌 침투력에 의해 발생한다. Mei and Foda⁽²⁸⁾는 침투력의 효과를 고려할 때, 실수의 전파속도를 가지는 파동과 복소수의 전파속도를 가지는 파동, 두가지 파동이 발생하고, 복소수의 전파속도를 가지는 파동이 저주파수에서의 감쇠 효과와 관련이 있음을 보였다. 식 (11)의 감쇠력은 이 효과와 관련이 있다.

\hat{u}_θ 와 \hat{w}_θ 는 Love 파 모드의 방정식을 만족함을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{(elastic force)} & \text{(inertia force)} \\ & d_{44} k^2 \hat{u}_\theta - d_{55} \frac{\partial^2 \hat{u}_\theta}{\partial z^2} - \omega^2 \rho \hat{u}_\theta - \omega^2 \rho_w \hat{w}_\theta = 0 \end{aligned} \quad (12a)$$

$$-\omega^2 \rho_w \hat{u}_\theta - \omega^2 \frac{\rho_w}{n} \hat{w}_\theta + i\omega f_h \hat{w}_\theta = 0 \quad (12b)$$

(damping force)

식 (12b)를 사용하여, 식 (12a)에서 \hat{W}_θ 를 소거할 수 있고 $u-p$ 정식화의 경우와 일치하는 Love 파 모드에 대한 운동방정식⁽¹⁰⁾을 얻을 수 있다. Love 파 모드에 대한 운동방정식은 탄성력, 관성력, 감쇠력과 관련된 3개의 항으로 구성되어 있다. Love 파 모드에 대해서는 간극수압이 발생하지 않기 때문에 간극수압의 gradient와 관련된 힘은 방정식에 나타나지 않는다.

식 (9), (10), (11), (12)로부터, 원통형 좌표계에서 지하수로 포화된 가로등방성 층상지반의 파동은 Rayleigh와 Love 파 모드에 의해서 발생하는 진동모드를 조합하여 표현할 수 있음을 확인할 수 있다. 식 (9)는 Rayleigh 파 모드로부터 발생하는 진동모드와 연관되고, 식 (10)은 Love 파 모드로부터 발생하는 진동모드와 연관된다.

4. Rayleigh와 Love 파 모드에 대한 고유치 문제

강체 기반암 위에 놓인 층상지반의 경계조건을 적용하여 식 (11)과 (12)로부터 Rayleigh와 Love 파 모드에 대한 고유치 문제를 정의할 수 있다. 경계조건은 그림 1에 보인 바와 같다. 층상지반에서 지하수위는 $H_w \leq H$ 인 높이에 위치하고 있다고 가정한다. 지표면에는 응력이 0이고 지하수면에는 간극수압이 0이다. 기반암과 접하는 면에서 흙의 변위는 기반암의 접선 방향과 법선 방향 모두 제한되어 있다. 지하수는 기반암과 접하는 면에서 기반암의 접선 방향으로 흐를 수 있으나, 법선 방향으로 흐를 수 없다. 이러한 경계조건은 수학적 형태로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sigma_z = \tau_{zr} = \tau_{\theta z} = 0 \text{ at } z=0 \quad (13a)$$

$$p=0 \text{ at } z=H-H_w \quad (13b)$$

$$u_r=u_\theta=u_z=0 \text{ at } z=H \quad (13c)$$

$$w_z=0 \text{ at } z=H \quad (13d)$$

경계조건 (13)을 적용하면, 식 (11)과 (12)는 각각 Rayleigh와 Love 파 모드에 대한 고유치 문제를 구성한다.

이와 같이 정의된 고유치 문제의 고유치와 고유함수를 구하기 위해 유효요소의 개념을 적용한다.⁽¹⁾ 지반은 몇 개의 얇은 층으로 나누어지는데, 그 두께는 진행파의 파장보다 아주 작다. N 개의 얇은 층으로 나누어진 지반에 대해, Rayleigh 파 모드에 대한 다음의 대수방정식을 얻을 수 있다.

$$\left[k^2 \mathbf{A}_R + ik \mathbf{B}_R + \mathbf{G}_R - \omega^2 \mathbf{M}_R + i\omega \mathbf{C}_R \right] \mathbf{\Delta}_R = \mathbf{0} \quad (14a)$$

$$\mathbf{\Delta}_R = \left(\hat{u}_r(z_1) \quad \hat{u}_z(z_1) \quad \hat{w}_r(z_1) \quad \hat{w}_z(z_1) \quad \dots \right. \\ \left. \hat{u}_r(z_N) \quad \hat{u}_z(z_N) \quad \hat{w}_r(z_N) \quad \hat{w}_z(z_N) \quad \hat{w}_r(z_{N+1}) \right)^T \quad (14b)$$

여기서 k 는 고유치이고 $\mathbf{\Delta}_R$ 은 대응하는 고유벡터이다. 행렬 $\mathbf{A}_R, \mathbf{B}_R, \mathbf{G}_R, \mathbf{M}_R, \mathbf{C}_R$ 은 선형 형상함수로부터 구해지는 부록 2의 요소 행렬로부터 구성할 수 있다. 식 (14a)는 $(8N+2)$ 개의 고유치를 산출한다. 식 (11)의 비독립성으로 인해 식 (14a)에서 N 개의 방정식은 소거할 수 있다. 그러므로, 유효한 고유치의 수는 $(6N+2)$ 이다. $(6N+2)$ 개의 모드 중 절반은 양의 r 축 방향으로 진행하고 나머지 절반은 음의 r 축 방향으로 진행한다.

유사한 방법으로 Love 파 모드에 대한 고유치 문제를 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\left[k^2 \mathbf{A}_L + \mathbf{G}_L - \omega^2 \mathbf{M}_L + i\omega \mathbf{C}_L \right] \mathbf{\Delta}_L = \mathbf{0} \quad (15a)$$

$$\mathbf{\Delta}_L = \left(\hat{u}_\theta(z_1) \quad \hat{w}_\theta(z_1) \quad \dots \quad \hat{u}_\theta(z_N) \quad \hat{w}_\theta(z_N) \right)^T \quad (15b)$$

여기서 행렬 $\mathbf{A}_L, \mathbf{G}_L, \mathbf{M}_L, \mathbf{C}_L$ 은 선형 형상함수로부터 구해지는 부록 3의 요소 행렬로부터 구성할 수 있다. 식 (12b)와 (13c)로부터 기반암과 접하는 면에서의 경계조건을 추가적으로 유도할 수 있고, 식 (15b)에서 자유도 $\hat{w}_\theta(z_{N+1})$ 은 포함되지 않았다. 식 (15a)는 $4N$ 개의 고유치를 산출한다. 이중 $2N$ 개는 추가 제한조건인 식 (12b)와 연관되어 있으므로, 유효한 고유치의 수는 $2N$ 이다. Rayleigh 파 모드의 경우처럼, $2N$ 개의 모드 중 N 개는 양의 r 축 방향으로 진행하고 나머지 N 개는 음의 r 축 방향으로 진행한다.

식 (14)와 (15)로부터 얻어지는 고유치와 고유벡터는 Fourier 수 m 과 관계가 없다.

5. 원통형 좌표계에서 Fourier 수 m 에 대한 원역의 전달경계

$r \geq r_0$ 이고 $0 \leq z \leq H$ 인 원역을 N 개의 얇은 층으로 나누고 진동모드의 선형조합에 의해 원역의 동적강성을 얻는다. 대칭 모드와 역대칭 모드가 연계되어 있지 않으므로, 편의상 이를 구분하지 않기로 한다. 식 (9)와 (10)의 Bessel 방정식의 해 $C_m(\xi)$ 는 m 차의 제2종 Hankel 함수 $H_m^{(2)}(\xi)$ 이다. $r=r_0$ 에서 계산된, Fourier 수 m 에 대한 모드 행렬 $\mathbf{\Psi}_m, \mathbf{\Phi}_m, \mathbf{Y}_m$ 을 도입한다. 이 행렬에서 처음 $(3N+1)$ 열은 Rayleigh 파 모드와 연관되고 나머지 N 열은 Love 파 모드와 연관된다. 모드 행렬 $\mathbf{\Psi}_m, \mathbf{\Phi}_m, \mathbf{Y}_m$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{cases} (\Psi_m)_{4j-3,l} = \hat{u}_z^l(z_j)C_m(k_l r_0) \\ (\Psi_m)_{4j-2,l} = i\hat{u}_z^l(z_j)C_{m-1}(k_l r_0) \\ (\Psi_m)_{4j-1,l} = 0 \\ (\Psi_m)_{4j,l} = \hat{w}_r^l(z_j)C_m(k_l r_0) \end{cases} \text{ for } 1 \leq l \leq 3N+1, 1 \leq j \leq N \quad (16a)$$

$$(\Psi_m)_{4N+1,l} = \hat{w}_r^l(z_{N+1})C_m(k_l r_0) \text{ for } 1 \leq l \leq 3N+1$$

$$\begin{cases} (\Psi_m)_{4j-3,l} = 0 \\ (\Psi_m)_{4j-2,l} = 0 \\ (\Psi_m)_{4j-1,l} = \hat{u}_\theta^{l-3N-1}(z_j)C_m(k_l r_0) \\ (\Psi_m)_{4j,l} = 0 \end{cases} \text{ for } 3N+2 \leq l \leq 4N+1, 1 \leq j \leq N \quad (16b)$$

$$(\Psi_m)_{4N+1,l} = 0 \text{ for } 3N+2 \leq l \leq 4N+1$$

$$\begin{cases} (\Phi_m)_{4j-3,l} = -\hat{u}_z^l(z_j)C_{m-1}(k_l r_0) \\ (\Phi_m)_{4j-2,l} = -i\hat{u}_z^l(z_j)C_m(k_l r_0) \\ (\Phi_m)_{4j-1,l} = 0 \\ (\Phi_m)_{4j,l} = -i\hat{w}_r^l(z_j)C_m(k_l r_0) \end{cases} \text{ for } 1 \leq l \leq 3N+1, 1 \leq j \leq N \quad (17a)$$

$$(\Phi_m)_{4N+1,l} = -i\hat{w}_r^l(z_{N+1})C_m(k_l r_0) \text{ for } 1 \leq l \leq 3N+1$$

$$\begin{cases} (\Phi_m)_{4j-3,l} = 0 \\ (\Phi_m)_{4j-2,l} = 0 \\ (\Phi_m)_{4j-1,l} = -\hat{u}_\theta^{l-3N-1}(z_j)C_{m-1}(k_l r_0) \\ (\Phi_m)_{4j,l} = 0 \end{cases} \text{ for } 3N+2 \leq l \leq 4N+1, 1 \leq j \leq N \quad (17b)$$

$$(\Phi_m)_{4N+1,l} = 0 \text{ for } 3N+2 \leq l \leq 4N+1$$

$$\begin{cases} (Y_m)_{4j-3,l} = k_l \hat{u}_r^l(z_j)C_m'(k_l r_0) \\ (Y_m)_{4j-2,l} = -ik_l \hat{u}_z^l(z_j)C_m(k_l r_0) \\ (Y_m)_{4j-1,l} = \frac{m}{r_0} \hat{u}_r^l(z_j)C_m(k_l r_0) \\ (Y_m)_{4j,l} = k_l \hat{w}_r^l(z_j)C_m'(k_l r_0) \end{cases} \text{ for } 1 \leq l \leq 3N+1, 1 \leq j \leq N \quad (18a)$$

$$(Y_m)_{4N+1,l} = k_l \hat{w}_r^l(z_{N+1})C_m'(k_l r_0) \text{ for } 1 \leq l \leq 3N+1,$$

$$\begin{cases} (Y_m)_{4j-3,l} = \frac{m}{r_0} \hat{u}_\theta^{l-3N-1}(z_j)C_m(k_l r_0) \\ (Y_m)_{4j-2,l} = 0 \\ (Y_m)_{4j-1,l} = k_l \hat{u}_\theta^{l-3N-1}(z_j)C_m'(k_l r_0) \\ (Y_m)_{4j,l} = \frac{m}{r_0} \hat{w}_\theta^{l-3N-1}(z_j)C_m(k_l r_0) \end{cases} \text{ for } 3N+2 \leq l \leq 4N+1, 1 \leq j \leq N \quad (18b)$$

$$(Y_m)_{4N+1,l} = 0 \text{ for } 3N+2 \leq l \leq 4N+1$$

여기서 윗첨자는 식 (14)와 (15)에서 구해진 특정 고유벡터를 의미한다. 원역의 원통형 경계 $r=r_0$ 에서 등가절점력을 계산한다. Fourier 수 m 에 대한 등가절점력의 진폭 $\bar{\mathbf{F}}_{r,m}$, $\bar{\mathbf{F}}_{z,m}$, $\bar{\mathbf{F}}_{\theta,m}$, $\bar{\mathbf{Q}}_{r,m}$ 은 다음과 같이 주어진다.

$$\bar{\mathbf{F}}_{r,m} = -r_0 \int \mathbf{N}^T(z) \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{r,m}(r_0, z) dz \quad (19a)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{z,m} = -r_0 \int \mathbf{N}^T(z) \bar{\boldsymbol{\tau}}_{zr,m}(r_0, z) dz \quad (19b)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{\theta,m} = -r_0 \int \mathbf{N}^T(z) \bar{\boldsymbol{\tau}}_{r\theta,m}(r_0, z) dz \quad (19c)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_{r,m} = r_0 \int \mathbf{N}^T(z) \bar{\boldsymbol{p}}_m(r_0, z) dz \quad (19d)$$

여기서 $\mathbf{N}(z)$ 는 형상함수이고 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{r,m}$, $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{zr,m}$, $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{r\theta,m}$, $\bar{\boldsymbol{p}}_m$ 은 Fourier 수 m 에 대한 응력과 간극수압의 진폭이다. 등가절점력 $\bar{\mathbf{F}}_m$ 을 진동모드의 선형조합에 의해 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\bar{\mathbf{F}}_m = r_0 \left\{ \mathbf{A}_{TB} \boldsymbol{\Psi}_m \mathbf{K}^2 + (\mathbf{D}_{TB} - \mathbf{E}_{TB} + m\mathbf{N}_{TB}) \boldsymbol{\Phi}_m \mathbf{K} - \left[\frac{m(m+1)}{2} \mathbf{L}_{TB} + m\mathbf{Q}_{TB} \right] \boldsymbol{\Psi}_m \right\} \boldsymbol{\Gamma} \quad (20)$$

여기서 \mathbf{K} 는 Rayleigh 파와 Love 파 모드의 고유치로 이루어진 대각행렬이고 $\boldsymbol{\Gamma}$ 는 모드 참여계수 벡터이다. \mathbf{A}_{TB} , \mathbf{D}_{TB} , \mathbf{E}_{TB} , \mathbf{N}_{TB} , \mathbf{L}_{TB} , \mathbf{Q}_{TB} 는 부록 4의 요소 행렬로부터 구성되는 $(4N+1) \times (4N+1)$ 행렬이다. 후과 간극수의 절점변위의 Fourier 수 m 에 대한 진폭 $\bar{\boldsymbol{\Delta}}_m$ 은 진동 모드의 선형조합에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{\boldsymbol{\Delta}}_m = \mathbf{Y}_m \boldsymbol{\Gamma} \quad (21a)$$

$$\begin{cases} (\bar{\boldsymbol{\Delta}}_m)_{4j-3} = \bar{u}_{r,m}(r_0, z_j) \\ (\bar{\boldsymbol{\Delta}}_m)_{4j-2} = \bar{u}_{z,m}(r_0, z_j) \\ (\bar{\boldsymbol{\Delta}}_m)_{4j-1} = \bar{u}_{\theta,m}(r_0, z_j) \\ (\bar{\boldsymbol{\Delta}}_m)_{4j} = \bar{w}_{r,m}(r_0, z_j) \\ (\bar{\boldsymbol{\Delta}}_m)_{4N+1} = \bar{w}_{r,m}(r_0, z_{N+1}) \end{cases} \text{ for } 1 \leq j \leq N \quad (21b)$$

식 (20)과 (21a)로부터 $\boldsymbol{\Gamma}$ 를 소거하여, 지하수로 포화된 가로등방성 층상지반에서 Fourier 수 m 에 대한 전달경계의 동적강성 R_m 을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\bar{\mathbf{F}}_m = \mathbf{R}_m \bar{\boldsymbol{\Delta}}_m \quad (22a)$$

$$\mathbf{R}_m = r_0 \left\{ \mathbf{A}_{TB} \boldsymbol{\Psi}_m \mathbf{K}^2 + (\mathbf{D}_{TB} - \mathbf{E}_{TB} + m\mathbf{N}_{TB}) \boldsymbol{\Phi}_m \mathbf{K} - \left[\frac{m(m+1)}{2} \mathbf{L}_{TB} + m\mathbf{Q}_{TB} \right] \boldsymbol{\Psi}_m \right\} \mathbf{Y}_m^{-1} \quad (22b)$$

지하수로 포화된 가로등방성 층상지반의 원역의 거동은 개발된 전달경계를 사용하여 나타낼 수 있다.

6. 전달경계와 3차원 유한요소의 결합

$r < r_0$ 이고 $0 \leq z \leq H$ 인 지하수로 포화된 가로등방성 지반의 근역은 부록 5의 3차원 유한요소에 의하여 표현할 수 있다. 앞에서 유도된 Fourier 수 m 에 대한 원역의 전달경계를 Cartesian 좌표계에서 표현된 근역의 3차원 유한요소와 결합하기 위해서는 \mathbf{R}_m 을 Cartesian 좌표계에서 정의된 절점변위와 절점하중 사이의 관계로 변환하여야 한다.

$r=r_0$ 에 위치한 근역의 경계가 그림 1에서와 같이 유한요소로 분할되어 있다고 가정하자. 이 경계면에 위치한 j 번째 선절점 위의 한 점 (r_0, θ, z_j) 에서의 변위는 Fourier 급수에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\Delta_j = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{T}_{j,m}^S \bar{\Delta}_{j,m}^S + \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{T}_{j,m}^A \bar{\Delta}_{j,m}^A \quad (23)$$

여기서 Δ_j 는 (r_0, θ, z_j) 에서 흙과 간극수의 변위 성분으로 구성되는 벡터인데 식 (21)과 같은 방법으로 정의된다. $\bar{\Delta}_{j,m}^S$ 와 $\bar{\Delta}_{j,m}^A$ 은 식 (21)과 같은 방법으로 정의되는 Fourier 수 m 에 대한 대칭 모드와 역대칭 모드 벡터이다. $\mathbf{T}_{j,m}^S$ 와 $\mathbf{T}_{j,m}^A$ 는 다음과 같이 정의되는 4×4 또는 1×1 행렬이다.

$$\mathbf{T}_{j,m}^S = \begin{bmatrix} \cos(m\theta) & & & \\ & \cos(m\theta) & & \\ & & -\sin(m\theta) & \\ & & & \cos(m\theta) \end{bmatrix} \text{ for } 1 \leq j \leq N \quad (24a)$$

$$\mathbf{T}_{N+1,m}^S = \cos(m\theta) \quad (24b)$$

$$\mathbf{T}_{j,m}^A = \begin{bmatrix} \sin(m\theta) & & & \\ & \sin(m\theta) & & \\ & & \cos(m\theta) & \\ & & & \sin(m\theta) \end{bmatrix} \text{ for } 1 \leq j \leq N \quad (25a)$$

$$\mathbf{T}_{N+1,m}^A = \sin(m\theta) \quad (25b)$$

식 (23)에서 $\bar{\Delta}_{j,m}^S$ 와 $\bar{\Delta}_{j,m}^A$ 는 삼각함수의 직교성에 의해 다음과 같이 주어진다.

$$\bar{\Delta}_{j,m}^S = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{m0} \right) \int_0^{2\pi} \mathbf{T}_{j,m}^S \Delta_j d\theta \quad (26a)$$

$$\bar{\Delta}_{j,m}^A = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{m0} \right) \int_0^{2\pi} \mathbf{T}_{j,m}^A \Delta_j d\theta \quad (26b)$$

여기서 δ_{ij} 는 Kronecker delta이다. M 개의 절점이 있는 j 번째 선절점에서 Cartesian 좌표계에서의 변위 Δ_j^{xyz} 는 다음과 같이 해당하는 절점변위와 형상함수로 표현될 수 있다.

$$\Delta_j^{xyz} = \mathbf{N}_j \Delta_{j,e}^{xyz} \quad (27)$$

여기서 \mathbf{N}_j 도 식 (21)의 정의를 바탕으로 한 $4 \times 4M$ 또는 $1 \times M$ 형상함수 행렬이다. $\Delta_{j,e}^{xyz}$ 는 크기가 $4M$ 또는 M 인 j 번째 선절점의 절점변위 벡터이다. 식 (27)의 변위를 원통형 좌표계에서의 변위로 변환한다.

$$\Delta_j = \mathbf{T}_j \Delta_j^{xyz} = \mathbf{T}_j \mathbf{N}_j \Delta_{j,e}^{xyz} \quad (28)$$

여기서 \mathbf{T}_j 는 다음과 같이 정의되는 4×5 또는 1×2 행렬이다.

$$\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \text{ for } 1 \leq j \leq N \quad (29a)$$

$$\mathbf{T}_{N+1} = [\cos \theta \quad \sin \theta] \quad (29b)$$

식 (28)을 식 (26)에 대입하면 다음의 관계를 얻어질 수 있다.

$$\bar{\Delta}_{j,m}^S = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{m0} \right) \mathbf{S}_{j,m} \Delta_{j,e}^{xyz} \quad (30a)$$

$$\bar{\Delta}_{j,m}^A = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{m0} \right) \mathbf{A}_{j,m} \Delta_{j,e}^{xyz} \quad (30b)$$

여기서 행렬 $\mathbf{S}_{j,m}$ 과 $\mathbf{A}_{j,m}$ 은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{S}_{j,m} = \int_0^{2\pi} \mathbf{T}_{j,m}^S \mathbf{T}_j \mathbf{N}_j d\theta \quad (31a)$$

$$\mathbf{A}_{j,m} = \int_0^{2\pi} \mathbf{T}_{j,m}^A \mathbf{T}_j \mathbf{N}_j d\theta \quad (31b)$$

식 (30)은 다음과 같은 형태로 모든 자유도를 포함하는 식으로 확장할 수 있다.

$$\bar{\Delta}_m^S = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{m0} \right) \mathbf{S}_m \Delta_e^{xyz} \quad (32a)$$

$$\bar{\Delta}_m^A = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{m0} \right) \mathbf{A}_m \Delta_e^{xyz} \quad (32b)$$

다음으로 절점하중에 대한 관계를 유도하기 위해 가상일의 원리를 사용한다. 가상절점변위 $\delta \Delta_{j,e}^{xyz}$ 가 가해지는 동안 j 번째 선절점의 절점에 작용하는 절점하중에 의해 행해진 일은 다음과 같다.

$$\delta W_j = \left(\delta \Delta_{j,e}^{xyz} \right)^T \mathbf{F}_{j,e}^{xyz} \quad (33)$$

식 (23)과 같은 방법으로 j 번째 선절점의 한 점 (r_0, θ, z_j) 에서의 절점 선하중도 Fourier 급수로 전개될 수 있다.

$$\mathbf{F}_j = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{T}_{j,m}^S \bar{\mathbf{F}}_{j,m}^S + \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{T}_{j,m}^A \bar{\mathbf{F}}_{j,m}^A \quad (34)$$

식 (34)에서의 각 항의 정의는 식 (23)에서의 정의에 대응되는 의미를 가진다. 식 (23)과 (34)로부터 j 번째 선절점

에 정의된 가상일을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\delta W_j = (\delta \mathbf{\Lambda}_{j,e}^{xyz})^T \mathbf{F}_{j,e}^{xyz} = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m=0}^{\infty} [\delta \bar{\mathbf{\Lambda}}_{j,m}^S]^T (\mathbf{T}_{j,m}^S)^T \bar{\mathbf{F}}_{j,m}^S + \sum_{m=0}^{\infty} [\delta \bar{\mathbf{\Lambda}}_{j,m}^A]^T (\mathbf{T}_{j,m}^A)^T \bar{\mathbf{F}}_{j,m}^A \right) d\theta \quad (35)$$

식 (30)을 식 (35)에 대입하고 정리하면 다음의 관계를 구할 수 있다.

$$\mathbf{F}_{j,e}^{xyz} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{S}_{j,m}^T \bar{\mathbf{F}}_{j,m}^S + \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{A}_{j,m}^T \bar{\mathbf{F}}_{j,m}^A \quad (36)$$

식 (36)도 다음과 같은 형태로 모든 자유도를 포함하는 식으로 확장할 수 있다.

$$\mathbf{F}_e^{xyz} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{S}_m^T \bar{\mathbf{F}}_m^S + \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{A}_m^T \bar{\mathbf{F}}_m^A \quad (37)$$

$\bar{\mathbf{F}}_m^S$ 와 $\bar{\mathbf{F}}_m^A$ 는 식 (22a)와 같이 표현되므로 위의 식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\mathbf{F}_e^{xyz} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{S}_m^T \mathbf{R}_m \bar{\mathbf{\Lambda}}_m^S + \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{A}_m^T \mathbf{R}_m \bar{\mathbf{\Lambda}}_m^A \quad (38)$$

식 (32)를 식 (38)에 대입하면 다음과 같은 Cartesian 좌표계에서 전달경계의 동적강성을 구할 수 있고 이를 근역의 3차원 유한요소와 결합할 수 있게 된다.

$$\mathbf{F}_e^{xyz} = \mathbf{R}^{xyz} \mathbf{\Lambda}_e^{xyz} \quad (39a)$$

$$\mathbf{R}^{xyz} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{m0} \right) \mathbf{S}_m^T \mathbf{R}_m \mathbf{S}_m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{m0} \right) \mathbf{A}_m^T \mathbf{R}_m \mathbf{A}_m \quad (39b)$$

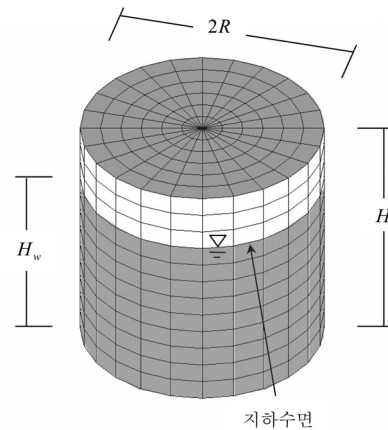
7. 검증 및 적용 예제

7.1 강체 원형 기초의 동적강성 비교

개발된 전달경계의 검증을 위하여 지하수로 포화된 등방성 층상지반에 놓인 $H=2R$ 인 강체 원형 기초의 동적강성을 계산하고 이를 기존의 Lee and Kim⁽¹³⁾의 결과와 비교하였다. 기초의 반지름 R 은 1m로 가정하였고, 지반은 지표면까지 지하수로 포화되어 있다고 가정하였다($H_w = H$). 지반과 간극수의 성질은 표 1의 ‘재료 A’와 같다. 지반의 근역은 3차원 유한요소를 사용하여 모형화하였는데, 8절점 brick 요소와 6절점 wedge 요소를 사용하였다(그림 2). 위에 주어진 재료 성질에 대하여, 가장 긴 요소의 크기는 고려하는 주파수 범위에서 가장 짧은 전단파의 파장의 1/6이하이다. 지반

〈표 1〉 지반과 간극수의 성질

	재료 A	재료 B
ρ_s	2640 kg / m ³	2640 kg / m ³
ρ_w	1000 kg / m ³	1000 kg / m ³
d_{11}	1.708 × 10 ⁸ Pa	1.526 × 10 ⁸ Pa
d_{12}	8.540 × 10 ⁷ Pa	6.713 × 10 ⁷ Pa
d_{13}	8.540 × 10 ⁷ Pa	7.327 × 10 ⁷ Pa
d_{55}	4.270 × 10 ⁷ Pa	2.196 × 10 ⁸ Pa
K_w	2.071 × 10 ⁹ Pa	2.071 × 10 ⁹ Pa
n	0.3	0.3
K_h	1.02 × 10 ⁻¹⁰ m ³ sec / kg	1.02 × 10 ⁻⁸ m ³ sec / kg
κ_v	1.02 × 10 ⁻¹⁰ m ³ sec / kg	1.02 × 10 ⁻¹⁰ m ³ sec / kg
α	0.999	0.999
β_s	0.05	0.05



〈그림 2〉 강체 원형 기초($H=2R$)에 대한 근역의 유한요소

의 원역은 개발된 전달경계를 사용하여 모형화하였고, 포함되는 Fourier 급수의 항의 수를 $m=0 \sim 1$, $m=0 \sim 2$, $m=0 \sim 3$ 으로 변화시켜 가며 그 수렴성을 조사하였다.

강체 기초의 동적강성을 계산하려면 강체 기초에 포함되지 않는 자유도에 대해서 응축(condensation)을 수행하여야 한다. 이때, 소거되는 자유도에 대한 동적강성의 역행렬을 구해야 하는데, 3차원 수치모형을 사용하면 이 행렬의 크기가 너무 커져 계산량이 기하급수적으로 증가하게 된다. 이와 같은 문제를 극복하기 위해, 이 연구에서는 병렬 sparse matrix solver인 PARDISO^{(29),(30)}를 사용하여 계산의 효율성을 높이고자 하였다.

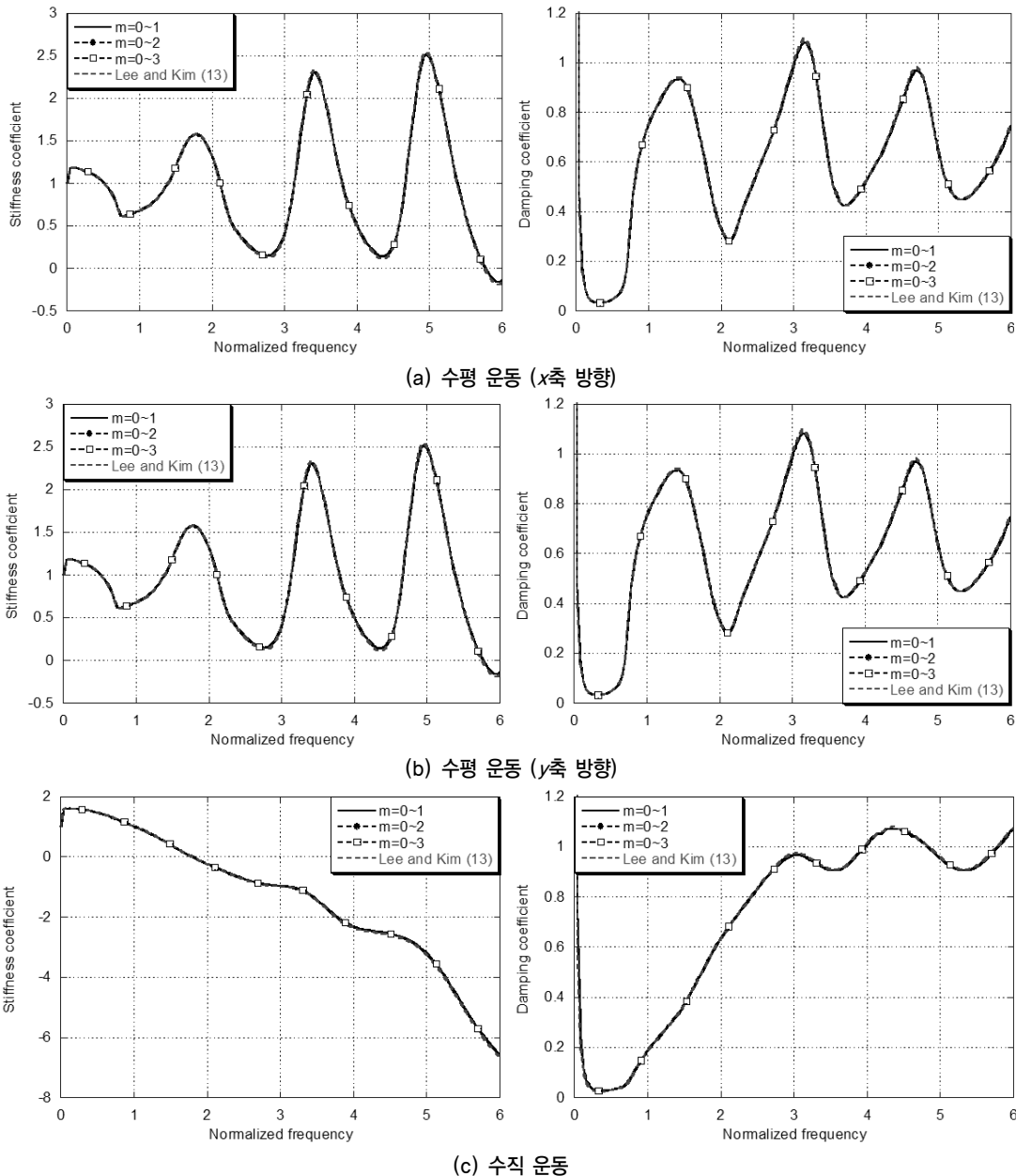
이상과 같은 방법으로 강체 원형 기초의 동적강성을 계산하였다. 동적강성은 정규화된 강성계수 k_0 와 감쇠계수 c_0 를 사용하여 표현할 수 있다.

$$K = K_0(k_0 + ia_0c_0)(1 + 2i\beta_s) \quad (40)$$

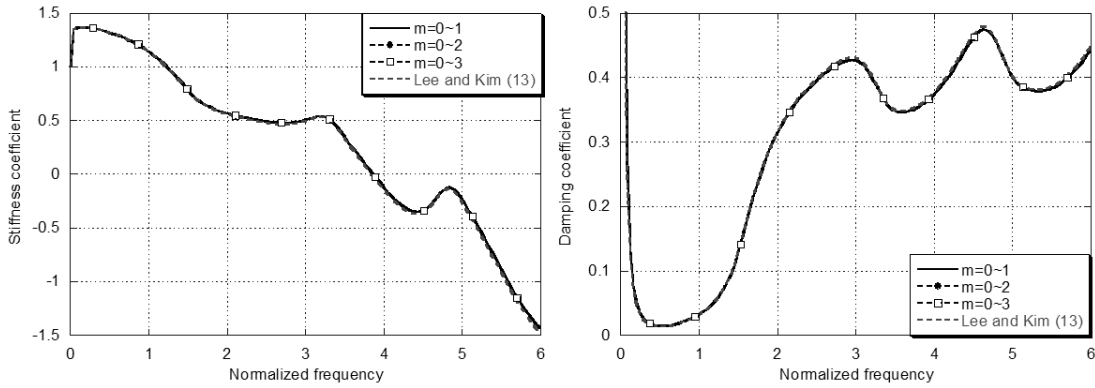
여기서 K_0 는 강체 원형 기초의 정적강성, $a_0 = \omega R/C_s$ 로 정의되는 정규화된 주파수, β_s 는 흙의 이력감쇠비이다. 정적 강성은 주파수를 $2\pi \times 10^7 C_s/R$ 의 아주 작은 값으로 놓고 계산하였다. 여기서 $C_s = \sqrt{\mu_s/(1-n)\rho_s}$ 는 지반의 전단파 속도이고 μ_s 는 등방성 지반의 Lamé 상수이다. 계산된 정적강성을 Lee and Kim⁽¹³⁾의 결과와 표 2에서 비교하였는데, 표에서 괄호 안의 숫자는 Lee and Kim의 결과에 대한 상대오차이다. 개발된 전달경계를 사용하여 강성계수와 감쇠계수를 계산하고 이를 Lee and Kim의 결과와 그림 3에 비교하였다. 표 2와 그림 3으로부터 개발된 전달경계가 지하수로

〈표 2〉 강체 원형 기초의 정적강성의 비교

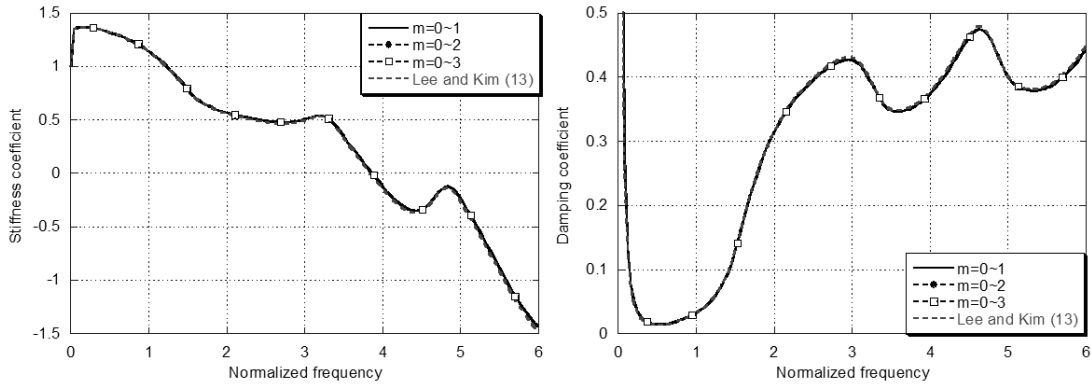
	본 연구			Lee and Kim ⁽¹³⁾
	m=0~1	m=0~2	m=0~3	
수평운동 (x축)	6.35d ₅₅ R (0.31%)	6.35d ₅₅ R (0.31%)	6.35d ₅₅ R (0.31%)	6.37d ₅₅ R
수평운동 (y축)	6.35d ₅₅ R (0.31%)	6.35d ₅₅ R (0.31%)	6.35d ₅₅ R (0.31%)	6.37d ₅₅ R
수직운동	10.35d ₅₅ R (0.58%)	10.35d ₅₅ R (0.58%)	10.35d ₅₅ R (0.58%)	10.41d ₅₅ R
Rocking 운동 (x축)	4.61d ₅₅ R ³ (1.50%)	4.61d ₅₅ R ³ (1.50%)	4.61d ₅₅ R ³ (1.50%)	4.68d ₅₅ R ³
Rocking 운동 (y축)	4.61d ₅₅ R ³ (1.50%)	4.61d ₅₅ R ³ (1.50%)	4.61d ₅₅ R ³ (1.50%)	4.68d ₅₅ R ³
비틀림 운동	5.73d ₅₅ R ³ (1.55%)	5.73d ₅₅ R ³ (1.55%)	5.73d ₅₅ R ³ (1.55%)	5.82d ₅₅ R ³



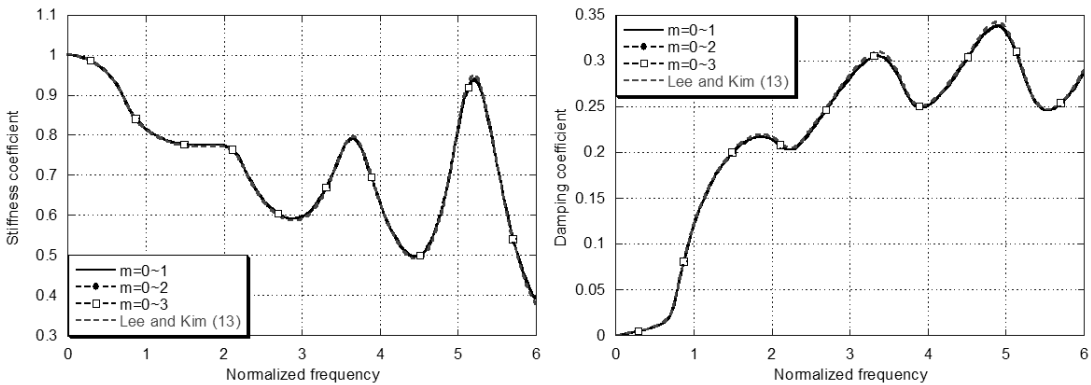
〈그림 3〉 강체 원형 기초의 동적강성의 비교



(d) Rocking 운동 (x축 방향)



(e) Rocking 운동 (y축 방향)



(f) 비틀림 운동

〈그림 3〉 강체 원형 기초의 동적강성의 비교(계속)

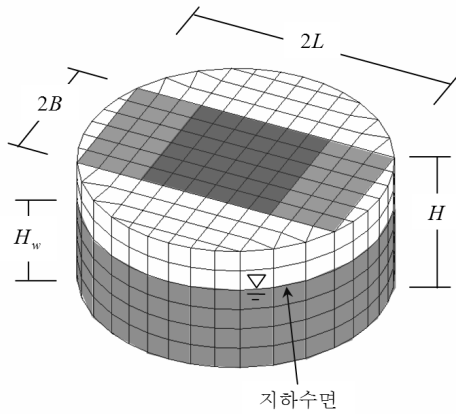
포화된 층상 지반에서의 3차원 거동을 정확하게 표현할 수 있음을 알 수 있다. 특히, 강체 원형 기초는 기하학적 형상이 축대칭 형상이므로, Fourier 급수의 $m=0\sim 1$ 인 항만 사용하여도 3차원 거동을 정확하게 표현할 수 있는데, 표 2와 그림 3의 결과에서도 이와 같은 현상을 관찰할 수 있다.

7.2 강체 정사각형 기초와 직사각형 기초의 동적강성 계산

개발된 전달경계를 좀 더 일반적인 기하학적 형상을 갖는 기초의 동적거동 해석에 적용하였다. 우선, 지하수로 포화된 등방성 층상지반에 놓인 $H=2B$ 인 강체 정사각형 기초의 동적강성을 계산하였다. 기초의 크기 B 는 $0.5m$ 로 가정하였고,

지반은 지표면까지 지하수로 포화되어 있다고 가정하였다 ($H_w=H$). 지반의 근역은 3차원 유한요소를 사용하여 그림 4와 같이 모형화하였고, 원역의 전달경계에 포함되는 Fourier 급수의 항의 수를 $m=0\sim 1$, $m=0\sim 2$, $m=0\sim 3$, $m=0\sim 4$, $m=0\sim 8$ 로 변화시켜가며 그 수렴성을 조사하였다. 다른 해석 조건은 강체 원형 기초의 경우와 똑같다.

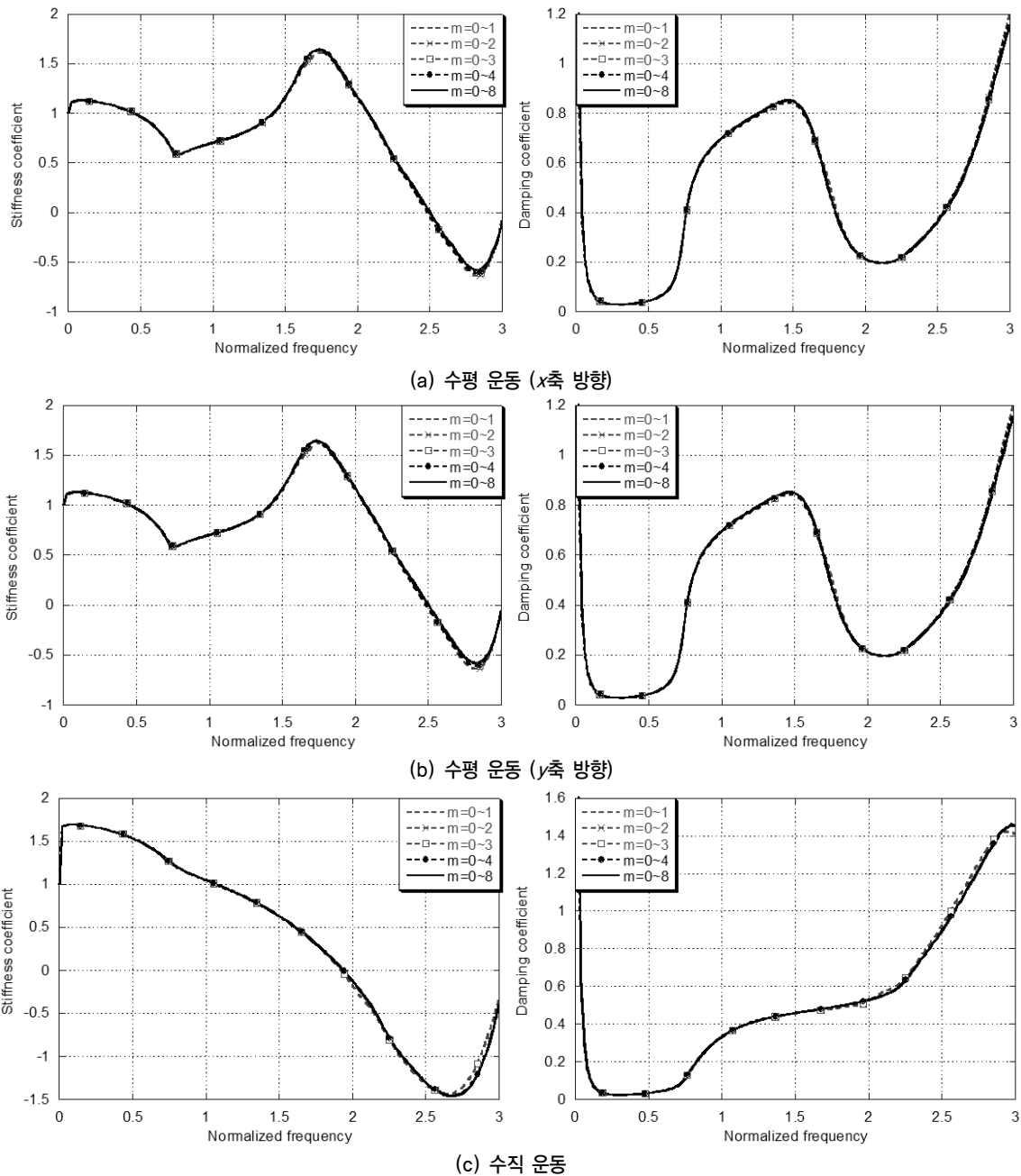
강체 정사각형 기초의 동적강성을 계산하여, 식 (40)과 같이 정규화된 강성계수 k_0 와 감쇠계수 c_0 를 구하였다. 단, 정규화된 주파수는 $a_0=\omega B/C_s$ 로 주어진다. 표 3에 동적강성이 주어지고, 그림 5는 강성계수와 감쇠계수를 보여주고 있다. 그림 5(f)에서 강체 정사각형 기초의 비틀림 운동은



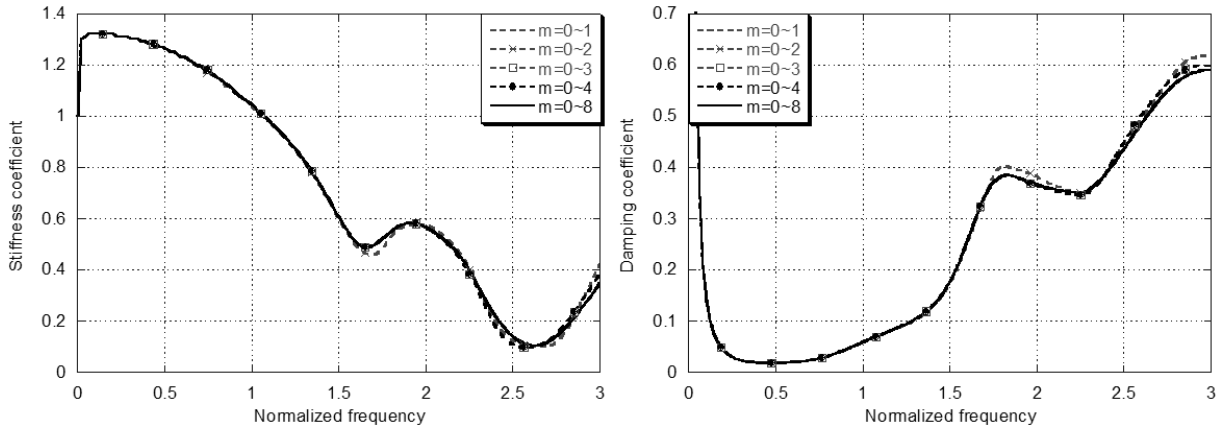
〈그림 4〉 강체 정사각형 기초($H=2B$)와 직사각형 기초($H=L=2B$)에 대한 근역의 유한요소

$m=4$ 인 Fourier 급수의 항의 영향을 많이 받음을 확인할 수 있다. Lin and Tassoulas⁽⁵⁾에서는 정사각형 기초에 대해 $m=0\sim 1$ 인 Fourier 급수의 항만 고려하여도 충분하다고 하였는데, 이는 $a_0 > 1.5$ 인 고주파수 영역에 대해서는 계산을 하지 않았기 때문이다

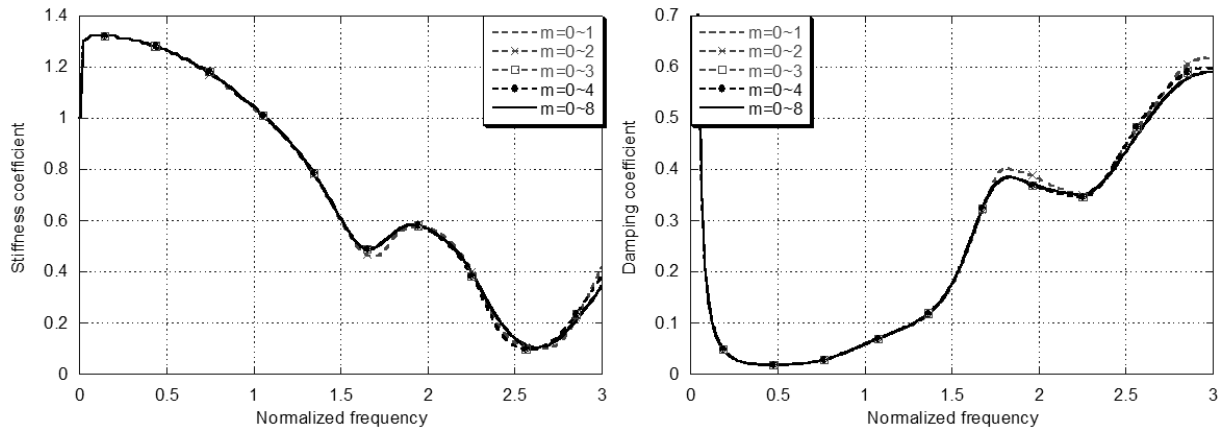
그림 3과 비교하여 보았을 때, 정사각형 기초와 원형 기초의 동적거동의 가장 큰 차이를 비틀림 운동에서 살펴볼 수 있다. 원형 기초의 경우에는 비틀림 운동에 의해 Rayleigh 파가 생기지 않으므로 흙과 지하수의 상대적인 운동 차이로 인해 생기는 저주파수 영역에서의 추가 감쇠와 같은 특성이 관찰되지 않았다. 하지만 정사각형 기초의 경우에는 그 기



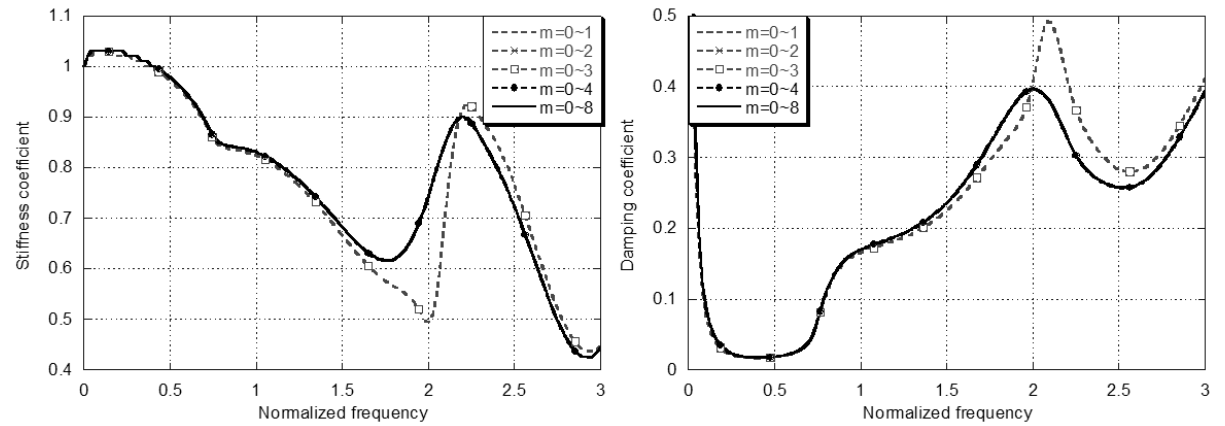
〈그림 5〉 강체 정사각형 기초의 동적강성



(d) Rocking 운동 (x축 방향)



(e) Rocking 운동 (y축 방향)



(f) 비틀림 운동

〈그림 5〉 강체 정사각형 기초의 동적강성(계속)

하학적 특성으로 인해 비틀림 운동에 의해서도 Rayleigh 파가 발생하게 되고 이로 인해 동적강성이 영향을 받음을 그림 5(f)에서 확인할 수 있다.

다음으로, 지하수로 포화된 등방성 층상지반에 놓인 $H=L=2B$ 인 강체 직사각형 기초의 동적강성을 계산하였다. 역시, 기초의 크기 B 는 $0.5m$ 로 가정하였고, 지반은 지표면까지 지하수로 포화되어 있다고 가정하였다($H_w=H$). 지반의 근역은 3차원 유한요소를 사용하여 그림 4와 같이 모형화하였고, 원역의 전달경계에 포함되는 Fourier 급수의 항의 수

를 $m=0\sim 4$, $m=0\sim 6$, $m=0\sim 8$ 로 변화시켜가며 그 수렴성을 조사하였다. 다른 해석 조건은 강체 정사각형 기초의 경우와 똑같다.

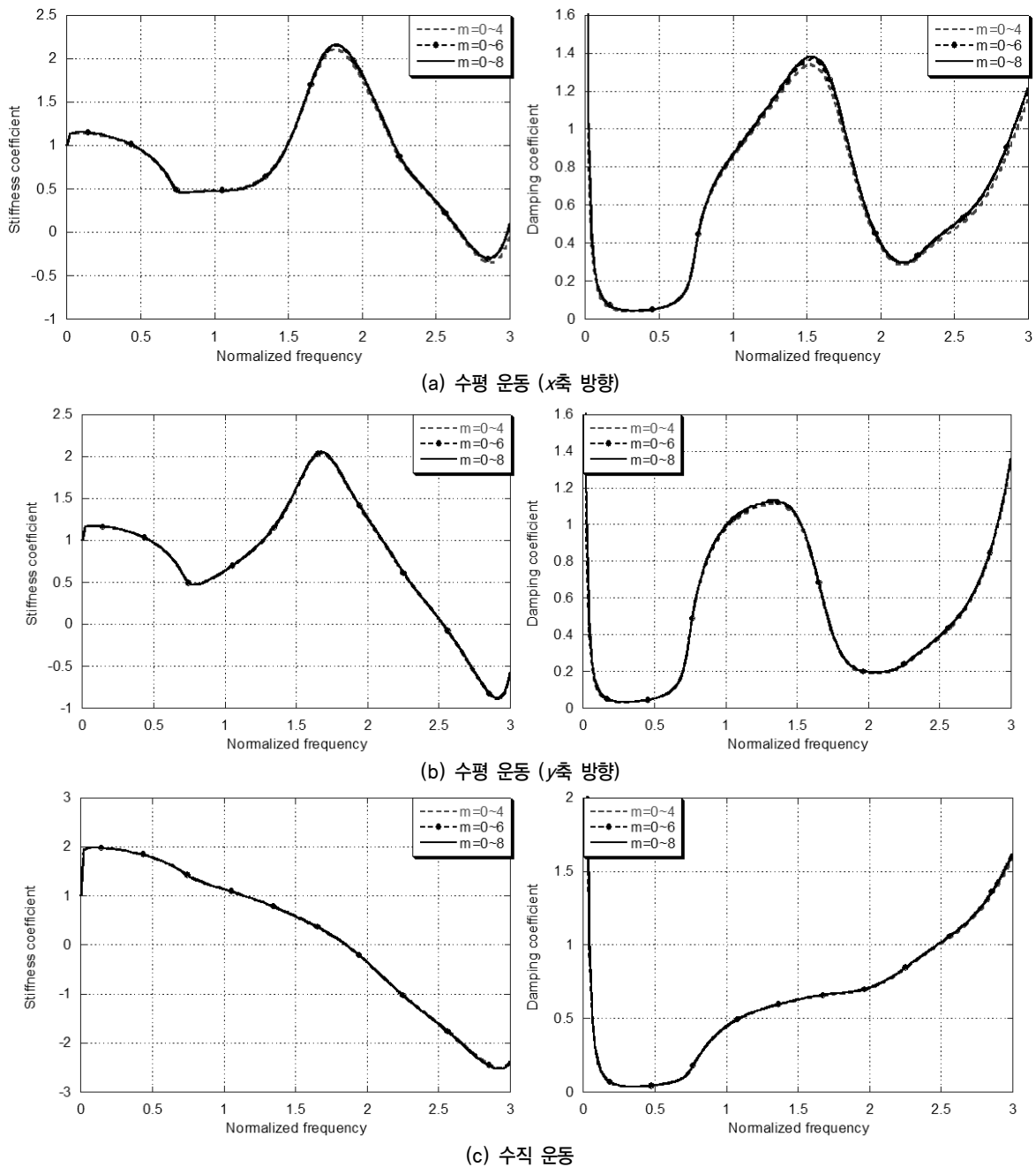
강체 직사각형 기초의 동적강성을 계산하여, 정규화된 강성계수 k_0 와 감쇠계수 c_0 를 구하였다. 표 4에 정적강성이 주어져 있고, 그림 6은 강성계수와 감쇠계수를 보여주고 있다. 그림 6에서 확인할 수 있듯이, 직사각형 기초의 경우에도 고주파수 영역에서는 충분한 수의 Fourier 급수의 항을 사용하여야 한다는 것을 알 수 있다. 즉, 임의의 형상을 가

〈표 3〉 강제 정사각형 기초의 정적강성

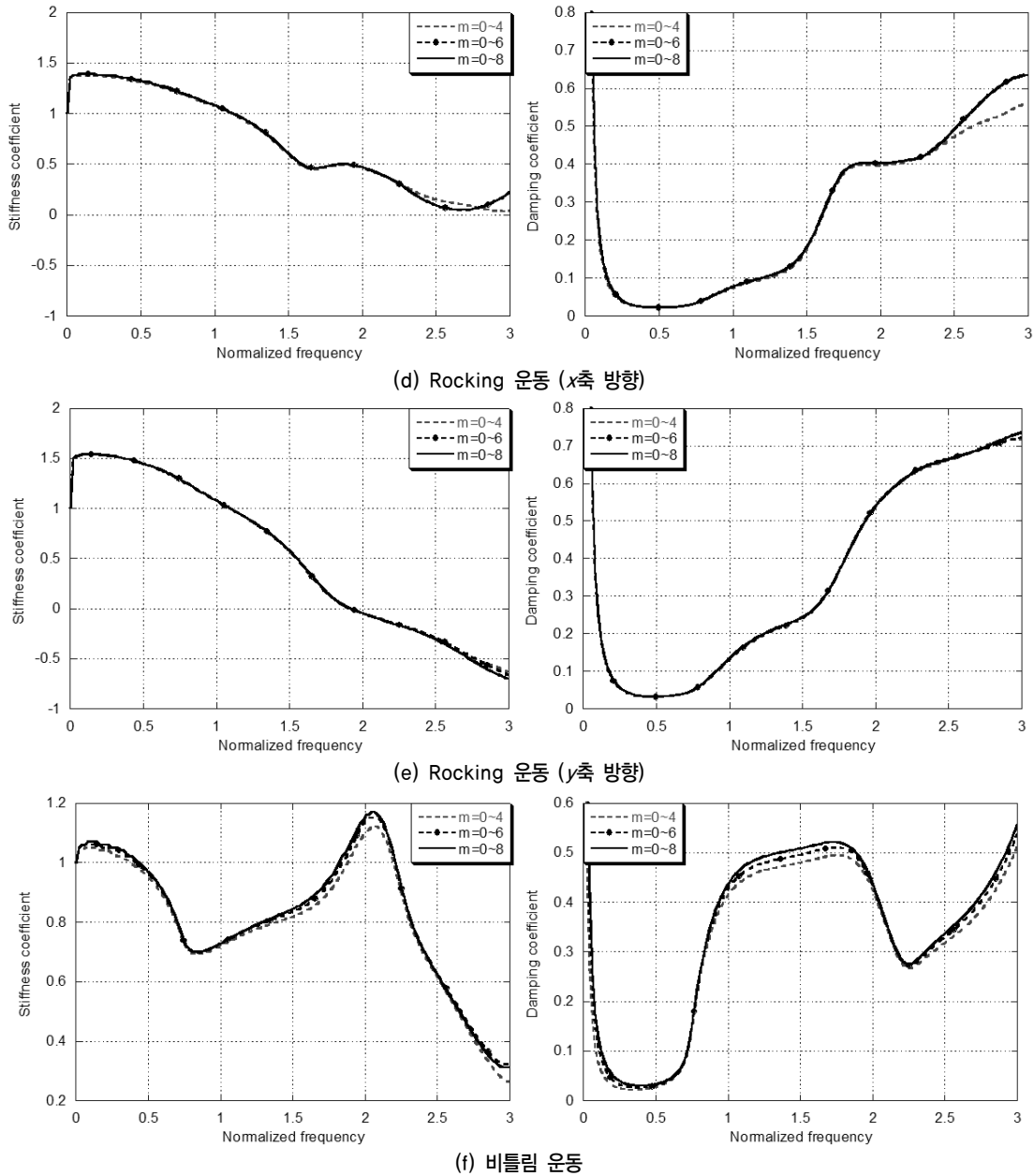
	$m=0\sim 1$	$m=0\sim 2$	$m=0\sim 3$	$m=0\sim 4$	$m=0\sim 8$
수평운동 (x축)	$8.56\mu_s B$	$8.56\mu_s B$	$8.57\mu_s B$	$8.57\mu_s B$	$8.58\mu_s B$
수평운동 (y축)	$8.56\mu_s B$	$8.56\mu_s B$	$8.57\mu_s B$	$8.57\mu_s B$	$8.58\mu_s B$
수직운동	$14.14\mu_s B$	$14.14\mu_s B$	$14.14\mu_s B$	$14.16\mu_s B$	$14.16\mu_s B$
Rocking 운동 (x축)	$8.70\mu_s B^3$	$8.70\mu_s B^3$	$8.72\mu_s B^3$	$8.72\mu_s B^3$	$8.72\mu_s B^3$
Rocking 운동 (y축)	$8.70\mu_s B^3$	$8.70\mu_s B^3$	$8.72\mu_s B^3$	$8.72\mu_s B^3$	$8.72\mu_s B^3$
비틀림 운동	$11.13\mu_s B^3$	$11.13\mu_s B^3$	$11.13\mu_s B^3$	$11.21\mu_s B^3$	$11.21\mu_s B^3$

〈표 4〉 강제 직사각형 기초의 정적강성

	$m=0\sim 4$	$m=0\sim 6$	$m=0\sim 8$
수평운동 (x축)	$13.18\mu_s B$	$13.24\mu_s B$	$13.34\mu_s B$
수평운동 (y축)	$14.37\mu_s B$	$14.43\mu_s B$	$14.53\mu_s B$
수직운동	$24.55\mu_s B$	$24.68\mu_s B$	$24.88\mu_s B$
Rocking 운동 (x축)	$14.54\mu_s B^3$	$14.97\mu_s B^3$	$14.99\mu_s B^3$
Rocking 운동 (y축)	$44.22\mu_s B^3$	$44.27\mu_s B^3$	$45.18\mu_s B^3$
비틀림 운동	$36.41\mu_s B^3$	$37.18\mu_s B^3$	$37.78\mu_s B^3$



〈그림 6〉 강제 직사각형 기초의 동적강성



〈그림 6〉 강체 직사각형 기초의 동적강성(계속)

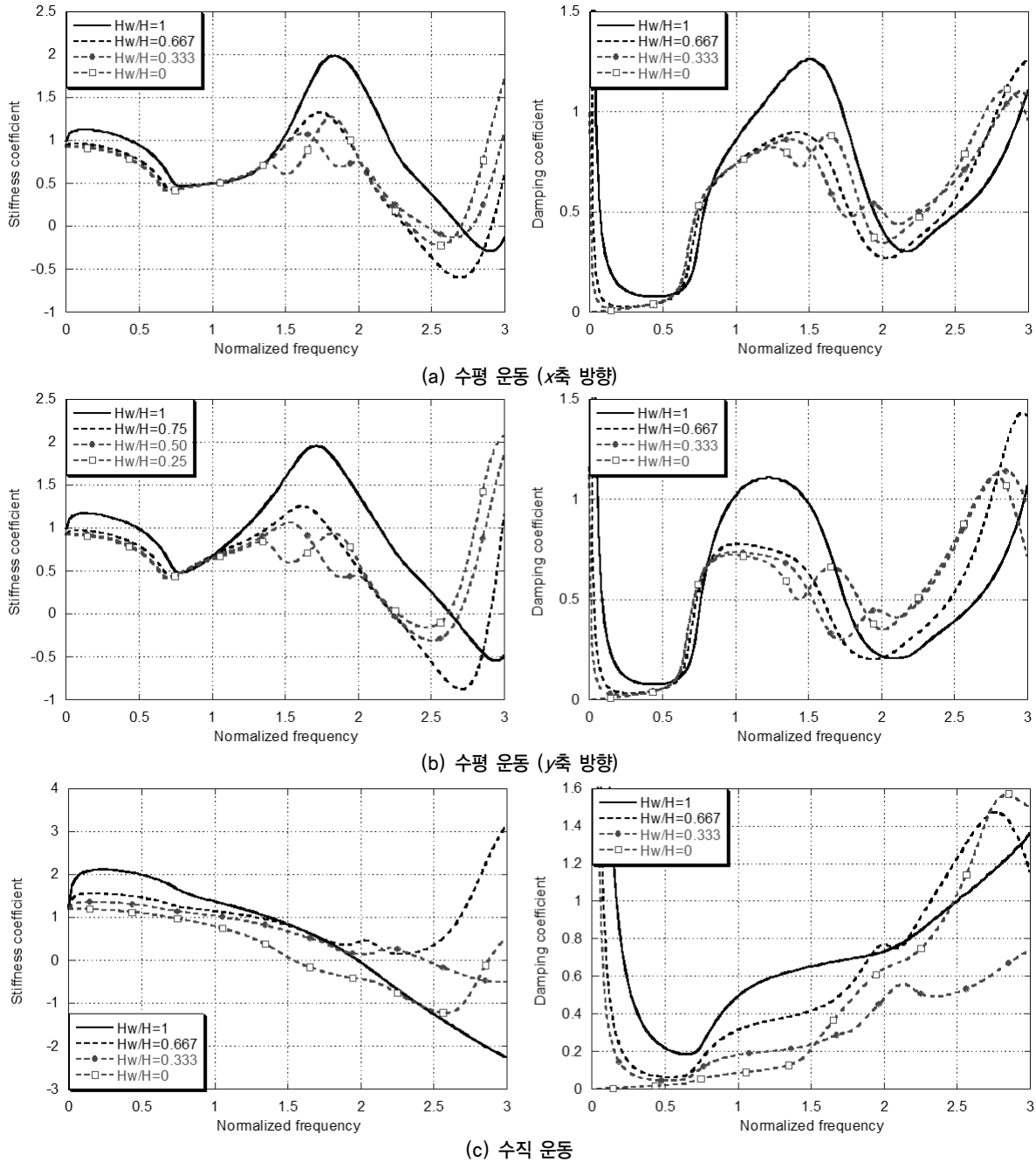
지는 기초의 동적거동에 대해, 고주파수 영역에서 정확한 결과를 얻기 위해서는 충분한 수의 Fourier 급수의 항을 사용하여야 한다.

7.3 가로등방성 층상지반에서의 지하수위의 영향

개발된 전달경계의 좀 더 일반적인 경우로의 적용을 위하여, 가로등방성 층상지반에 놓인 강체 직사각형 기초의 동적강성에 대한 지하수위의 영향을 조사하였다. $H_w/H=1, 0.667, 0.333, 0$ 의 4가지 경우를 조사하였다. $H_w/H=0$ 은 지반이 간극수가 없는 건조한 경우를 의미한다. 지반과 간극수의 성질은 표 1의 ‘재료 B’와 같은데, 이것은 $E_v/E_h=1.5,$

$\kappa_v/\kappa_h = 0.01$ 에 해당하는 성질이다. 원역의 전달경계에 포함되는 Fourier 급수는 $m=0\sim 8$ 인 항이고, 다른 해석 조건은 앞의 강체 직사각형 기초의 경우와 똑같다.

강체 직사각형 기초의 동적강성을 계산하여, 정규화된 강성계수 k_0 와 감쇠계수 c_0 를 구하였다. 이때, 정규화를 위한 정적강성은 표 3에 주어진 등방성 층상지반에 놓인 강체 직사각형 기초의 정적강성을 사용하였다. 계산된 강성계수와 감쇠계수를 그림 7에서 확인할 수 있는데, 기초의 동적강성이 지하수위에 따라 크게 영향을 받음을 알 수 있다. 특히, 지반이 지표면까지 완전히 지하수로 포화되어 있을 경우에는 다른 경우와 그 거동의 차이가 많이 남을 확인할 수 있다. 이러한 현상은 저주파수 성분이 중요한 지반-구조물 상



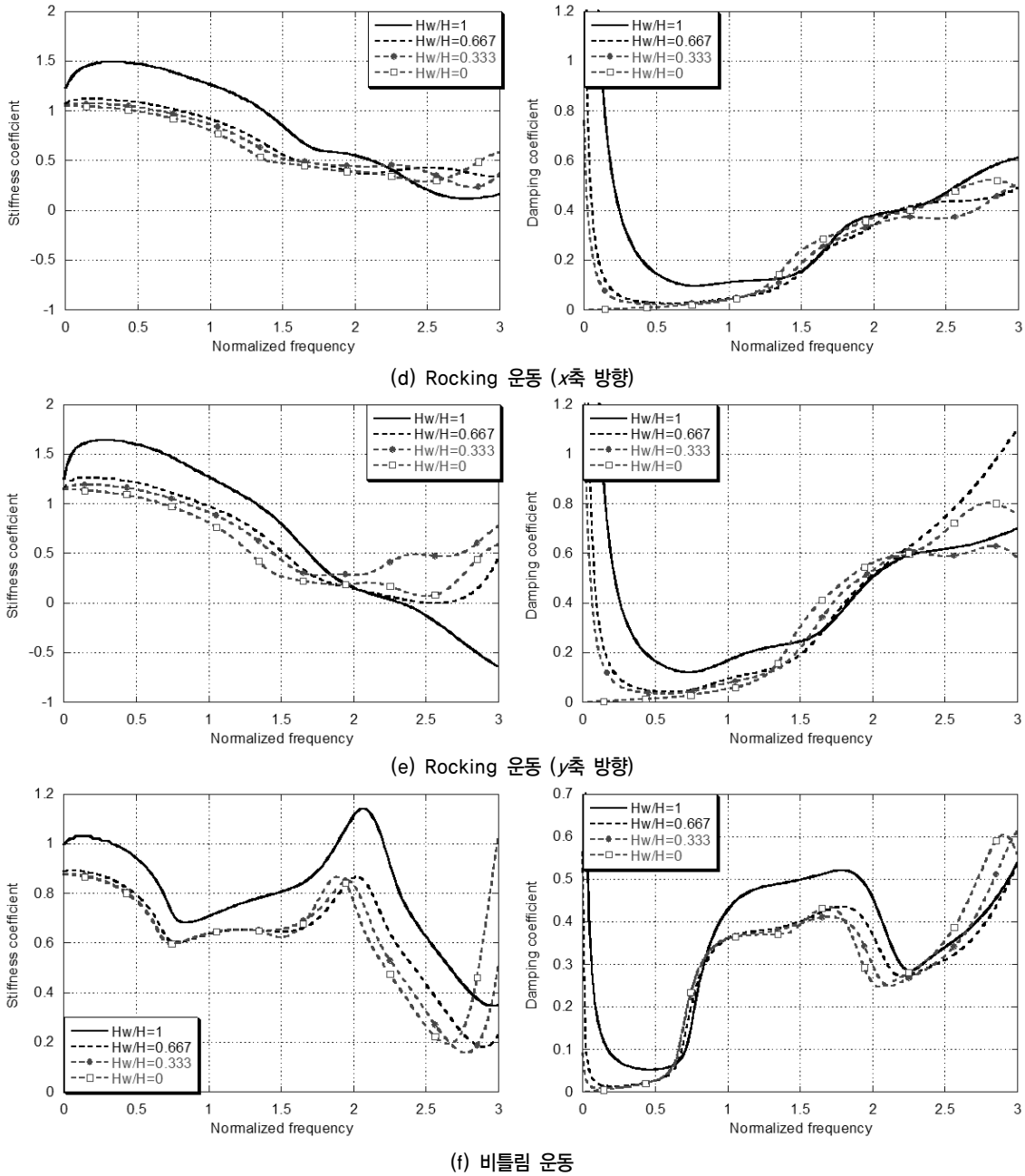
〈그림 7〉 강체 직사각형 기초의 동적거동에 대한 지하수위의 영향

호작용 뿐만이 아니라 고주파수 성분이 중요한 기계진동과 같은 문제에도 중요한 의미를 가질 수 있으므로, 지반이 지하수로 포화되어 있을 경우에는 이를 정확히 고려하여야 할 필요가 있을 것이다.

8. 결론

이 연구에서는 $u-w$ 정식화에 근거하여 일반적인 3차원 문제에 적용할 수 있는 지하수로 포화된 가로등방성 층상지반에서의 3차원 전달경계를 개발하였다. 지반 영역에서의

동적거동을 Fourier 급수로 전개하고, 각 항에 대한 동적강성을 $u-w$ 정식화에 근거하여 유도하였다. 이때 Rayleigh 파 모드와 Love 파 모드의 선형중첩을 통하여 지반에서의 동적거동을 표현하였다. 그리고 이를 Cartesian 좌표계에서 표현된 지반 근역의 3차원 유한요소와 결합할 수 있도록 변형하여 일반적인 3차원 문제에도 적용할 수 있는 방법을 개발하였다. 개발된 방법을 강체 원형 기초의 동적거동 해석에 적용하고 기존의 해석 결과와 비교하여, 이 연구에서 개발된 전달경계가 정확함을 확인하였다. 또한 다양한 형태의 강체 기초 동적거동 해석에 개발된 전달경계를 적용하였고,



〈그림 7〉 강제 직사각형 기초의 동적거동에 대한 지하수위의 영향(계속)

지하수로 포화된 가로등방성 층상지반에서 지하수위에 따라 강제 기초 동적거동의 변화 양상을 조사하여, 이 연구에서 개발된 방법의 활용성을 입증하였다. 이상의 결과로부터 개발된 전달경계가 지하수로 포화된 가로등방성 층상지반에서의 일반적인 3차원 지반-구조물 상호작용 해석에도 효과적으로 적용할 수 있음을 확인하였다. 현재 이 연구에서 지반의 거동은 선형으로 가정하였지만, 지반의 비선형 거동을 고려하여 과도한 과잉간극수압의 발현으로 인한 반무한 지반에서의 액상화 해석에 개발된 전달경계를 적용 가능하고, 이를 통해 액상화 해석 시 반무한지반으로의 에너지 방사를 엄밀히 고려하는 것이 가능할 것이다.

감사의 글

본 연구는 2003년도 산업자원부 전력산업연구개발사업 전력선행기술과 한국원자력연구원의 ‘연구로계통공학 기술 연구’ 과제에 의하여 이루어진 연구로서, 관계부처에 감사드립니다.

참고 문헌

1. Waas, G., Linear two-dimensional analysis of soil dynamics problems in semi-infinite layered media, Ph.D. Dissertation, University of California, 1972.
2. Kausel, E., *Forced vibrations of circular foundations on*

- layered media, Research Report R74-11, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1974.
3. Tassoulas, J.L., *Elements for the numerical analysis of wave motion in layered media*, Research Report R81-2, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1981.
 4. Werkle, H., "Dynamic finite element analysis of three-dimensional soil models with a transmitting element," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 14, 41-60, 1986.
 5. Lin, H.-T., and Tassoulas, J.L., "A hybrid method for three-dimensional problems of dynamics of foundations," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 14, 61-74, 1986.
 6. Kim, J.K., Koh, H.M., Kwon, K.J., and Yi, J.S., "A three-dimensional transmitting boundary formulated in Cartesian coordinate system for the dynamics of non-axisymmetric foundations," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 29, 1257-1546, 2000.
 7. Andrade, P.W., Implementation of second-order absorbing boundary conditions in frequency-domain computations, PhD dissertation, The University of Texas at Austin, 1999.
 8. Nogami, T., and Kazama, M., "Dynamic response analysis of submerged soil by thin layer element method," *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 11, 17-26, 1992.
 9. Nogami, T., and Kazama, M., "Thin layer element method for dynamic soil-structure interaction analysis of axis-symmetric structure in submerged soil," *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 16, 337-351, 1997.
 10. Bougacha, S., Tassoulas, J.L., and Roësset, J.M., "Analysis of foundations on fluid-filled poroelastic stratum," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 119, No. 8, 1632-1648, 1993.
 11. Bougacha, S., Tassoulas, J.L., and Roësset, J.M., "Dynamic stiffness of foundations on fluid-filled poroelastic stratum," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 119, No. 8, 1649-1662, 1993.
 12. 이진호, 지하수로 포화된 가로등방성 층상지반에서의 동적 지반-구조물 상호작용 해석을 위한 원통형 및 직교 좌표계에서의 3차원 전달경계, 공학박사학위논문, 서울대학교, 2007.
 13. Lee, J.H., and Kim, J.K., "Transmitting boundary for water-saturated transversely isotropic strata based on the u-U formulation," *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 29, 809-823, 2009.
 14. Kim, J.K., and Lee, J.H., "Earthquake Response of Liquid Tanks Installed in Saturated Transversely Isotropic Soil," *Computational Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, Taylor & Francis, 479-492, 2008.
 15. Lysmer, J., and Kulemeyer, R.L., "Finite Dynamic Model for Infinite Media," *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 95, 859-877, 1969.
 16. White, W., Valliapan, S., and Lee, I.K., "Unified Boundary for Finite Dynamic Model," *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 103, 949-964, 1977.
 17. Dominguez, J., *Boundary Elements in Dynamics*, Computational Mechanics Publications, 1993.
 18. Medina, F., and Penzien, J., "Infinite Elements for Elastodynamics," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 10, 699-709, 1982.
 19. Medina, F., and Taylor, R.L., "Finite Element Techniques for Problems of Unbounded Domains," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, 1209-1226, 1983.
 20. Yun, C.-B., Kim, J.-M., and Hyun, C.-H., "Axisymmetric Elastodynamic Infinite Elements for Multi-Layered Half-Space," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, 3723-3743, 1995.
 21. Tzong, T.-J., Gupta, S., and Penzien, J., *Two-Dimensional Hybrid Modelling of Soil-Structure Interaction*, Report No. UCB/EERC-81/11, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, California, 1981.
 22. Tzong, T.-J., and Penzien, J., *Hybrid Modelling of Soil-Structure Interaction in Layered Media*, Report No. UCB/EERC-83/22, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, California, 1983.
 23. Biot, M.A., "Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. low-frequency range," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 28, No. 2, 168-178, 1956.
 24. Zienkiewicz, O.C., Chan, A.H.C., Pastor, M., Schrefler, B.A., and Shiomi, T., *Computational geomechanics with special reference to earthquake engineering*, John Wiley & Sons, 1999.
 25. Zienkiewicz, O.C., and Shiomi, T., "Dynamic behavior of saturated porous media; the generalized Biot Formulation and its numerical solution," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 8, 71-96, 1984.
 26. Lewis, R.W., and Schrefler, B.A., *The finite element methods in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media*, John Wiley & Sons, 1998.
 27. Arduino, P., and Macari, E.J., "Implementation of porous media formulation for geomaterials," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 127, No. 2, 157-166, 2001.
 28. Mei, C.C., and Foda, M.A., "Wave-induced response in a fluid-filled poro-elastic solid with a free surface - a boundary layer theory," *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, Vol. 66, 597-631, 1981.
 29. Schenk, O., and Gärtner, K., "Solving Unsymmetric Sparse Systems of Linear Equations with PARDISO," *Journal of Future Generation Computer Systems*, Vol. 20, No. 3, 475-487, 2004.
 30. Schenk, O., and Gärtner, K., "On fast factorization pivoting methods for symmetric indefinite systems," *Elec. Trans. Numer. Anal.*, Vol. 23, 158-179, 2006.
 31. Chen, W.-F., and Saleeb, A.F., *Constitutive equations for engineering materials, volume 1: elasticity and modeling*, Elsevier, 1994.

부록 1. 가로등방성 매질의 구성방정식

식 (5)에 가로등방성 매질에 대한 \mathbf{D} 의 표현을 대입함으로써 다음의 구성방정식을 얻을 수 있다.⁽³¹⁾

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_h} & -\frac{\nu_{hh}}{E_h} & -\frac{\nu_{hv}}{E_v} \\ -\frac{\nu_{hh}}{E_h} & \frac{1}{E_h} & -\frac{\nu_{hv}}{E_v} \\ -\frac{\nu_{hv}}{E_v} & -\frac{\nu_{hv}}{E_v} & \frac{1}{E_v} \\ & & & \frac{1}{G_h} \\ & & & & \frac{1}{G_v} \\ & & & & & \frac{1}{G_v} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_h \\ \alpha_h \\ \alpha_v \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} p \quad (\text{A1})$$

$$= \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{11} & d_{13} \\ d_{13} & d_{13} & d_{33} \\ & & & d_{44} \\ & & & & d_{55} \\ & & & & & & d_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_h \\ \alpha_h \\ \alpha_v \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} p$$

여기서 E_h 와 E_v 는 각각 등방성 평면 내에서의 이에 수직 한 방향으로의 Young의 계수, G_h 와 G_v 는 각각 등방성 평면 내에서의 이에 수직한 방향으로의 전단 계수이다. ν_{hh} 와 ν_{hv} 는 각각 등방성 평면 내에서의 이에 수직한 방향으로의 응력에 의해 발생하는 등방성 평면 내에서의 횡방향 변형율의 감소를 의미하는 포아송비이다. $G_h = 0.5E_h/(1+\nu_{hh})$, 즉 $d_{44} = 0.5(d_{11}-d_{12})$ 이다. 식 (A1)으로부터, 4차 tensor \mathbf{D} 는 다음과 같이 정의된다.

$$D_{1111} = D_{2222} = d_{11} \quad (\text{A2a})$$

$$D_{1122} = D_{2211} = d_{12} \quad (\text{A2b})$$

$$D_{1133} = D_{3311} = D_{2233} = D_{3322} = d_{13} \quad (\text{A2c})$$

$$D_{3333} = d_{33} \quad (\text{A2d})$$

$$D_{1212} = D_{2112} = D_{1221} = D_{2121} = d_{44} = \frac{1}{2}(d_{11} - d_{12}) \quad (\text{A2e})$$

$$D_{2323} = D_{3223} = D_{2332} = D_{3232} = D_{1313} = D_{3113} = D_{1331} = D_{3131} = d_{55} \quad (\text{A2f})$$

그렇지 않으면 $D_{ijkl} = 0$

부록 2. Rayleigh 파 모드에 대한 요소 행렬

$$\mathbf{A}_j^i = \frac{h_j}{6} \begin{bmatrix} 2d_{11}^i & 0 & 0 & 0 & d_{11}^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2d_{11}^i & 0 & 0 & 0 & d_{11}^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{11}^i & 0 & 0 & 0 & 2d_{11}^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{11}^i & 0 & 0 & 0 & 2d_{11}^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{Q^j/h_j}{6} \begin{bmatrix} 2\alpha_1^i \alpha_1^i & 0 & 2\alpha_1^i & 0 & \alpha_1^i \alpha_1^i & 0 & \alpha_1^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\alpha_1^i & 0 & 2 & 0 & \alpha_1^i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1^i \alpha_1^i & 0 & \alpha_1^i & 0 & 2\alpha_1^i \alpha_1^i & 0 & 2\alpha_1^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1^i & 0 & 1 & 0 & 2\alpha_1^i & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A3})$$

여기서 윗첨자 j 는 j 번째 요소를 의미하고, h_j 는 j 번째 요소의 두께이다.

$$\mathbf{B}_R^j = \begin{bmatrix} 0 & \frac{d_{55}^j - d_{13}^j}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{d_{55}^j + d_{13}^j}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{d_{55}^j - d_{13}^j}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{d_{55}^j + d_{13}^j}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d_{55}^j + d_{13}^j}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{d_{55}^j - d_{13}^j}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{d_{55}^j + d_{13}^j}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{d_{55}^j - d_{13}^j}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A4})$$

$$+ \frac{Q^j}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_1^i \alpha_1^i & 0 & -\alpha_1^i & 0 & \alpha_1^i \alpha_1^i & 0 & \alpha_1^i \\ \alpha_1^i \alpha_1^i & 0 & \alpha_1^i & 0 & \alpha_1^i \alpha_1^i & 0 & \alpha_1^i & 0 \\ 0 & -\alpha_1^i & 0 & -1 & 0 & \alpha_1^i & 0 & 1 \\ \alpha_1^i & 0 & 1 & 0 & \alpha_1^i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha_1^i \alpha_1^i & 0 & -\alpha_1^i & 0 & \alpha_1^i \alpha_1^i & 0 & \alpha_1^i \\ -\alpha_1^i \alpha_1^i & 0 & -\alpha_1^i & 0 & -\alpha_1^i \alpha_1^i & 0 & -\alpha_1^i & 0 \\ 0 & -\alpha_1^i & 0 & -1 & 0 & \alpha_1^i & 0 & 1 \\ -\alpha_1^i & 0 & -1 & 0 & -\alpha_1^i & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_R^j = \frac{1}{h_j} \begin{bmatrix} d_{55}^j & 0 & 0 & 0 & -d_{55}^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{55}^j & 0 & 0 & 0 & -d_{55}^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_{55}^j & 0 & 0 & 0 & d_{55}^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_{55}^j & 0 & 0 & 0 & d_{55}^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{Q^j/h_j}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1^i \alpha_1^i & 0 & \alpha_1^i & 0 & -\alpha_1^i \alpha_1^i & 0 & -\alpha_1^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1^i & 0 & 1 & 0 & -\alpha_1^i & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1^i \alpha_1^i & 0 & -\alpha_1^i & 0 & \alpha_1^i \alpha_1^i & 0 & \alpha_1^i \\ 0 & -\alpha_1^i & 0 & -1 & 0 & \alpha_1^i & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha_1^i & 0 & -1 & 0 & -\alpha_1^i & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A5})$$

$$\mathbf{M}_R^j = \frac{h_j}{6} \begin{bmatrix} 2\rho_w^j & 0 & 2\rho_w^j & 0 & \rho_w^j & 0 & \rho_w^j & 0 \\ 0 & 2\rho_w^j & 0 & 2\rho_w^j & 0 & \rho_w^j & 0 & \rho_w^j \\ 2\rho_w^j & 0 & 2\frac{\rho_w^j}{n} & 0 & \rho_w^j & 0 & \frac{\rho_w^j}{n} & 0 \\ 0 & 2\rho_w^j & 0 & 2\frac{\rho_w^j}{n} & 0 & \rho_w^j & 0 & \frac{\rho_w^j}{n} \\ \rho_w^j & 0 & \rho_w^j & 0 & 2\rho_w^j & 0 & 2\rho_w^j & 0 \\ 0 & \rho_w^j & 0 & \rho_w^j & 0 & 2\rho_w^j & 0 & 2\rho_w^j \\ \rho_w^j & 0 & \frac{\rho_w^j}{n} & 0 & 2\rho_w^j & 0 & 2\frac{\rho_w^j}{n} & 0 \\ 0 & \rho_w^j & 0 & \frac{\rho_w^j}{n} & 0 & 2\rho_w^j & 0 & 2\frac{\rho_w^j}{n} \end{bmatrix} \quad (\text{A6})$$

$$\mathbf{C}_R^j = \frac{h_j}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2f_1^j & 0 & 0 & 0 & f_1^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2f_3^j & 0 & 0 & 0 & f_3^j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_1^j & 0 & 0 & 0 & 2f_1^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_3^j & 0 & 0 & 0 & 2f_3^j \end{bmatrix} \quad (\text{A7})$$

부록 3. Love 파 모드에 대한 요소 행렬

$$\mathbf{A}_L^j = \frac{h_j}{6} \begin{bmatrix} 2d_{44}^j & 0 & d_{44}^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{44}^j & 0 & 2d_{44}^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A8})$$

$$\mathbf{G}_L^j = \frac{1}{h_j} \begin{bmatrix} d_{55}^j & 0 & -d_{55}^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_{55}^j & 0 & d_{55}^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A9})$$

$$\mathbf{M}_L^j = \frac{h_j}{6} \begin{bmatrix} 2\rho^j & 0 & \rho^j & 0 \\ 0 & 2\rho_w^j & 0 & \rho_w^j \\ \rho^j & 0 & 2\rho^j & 0 \\ 0 & \rho_w^j & 0 & 2\rho_w^j \end{bmatrix} \quad (\text{A10})$$

$$\mathbf{C}_L^j = \frac{h_j}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2f_1^j & 0 & f_1^j \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_1^j & 0 & 2f_1^j \end{bmatrix} \quad (\text{A11})$$

부록 4. 전달경계에 대한 요소 행렬

$$\mathbf{A}_{TB}^j = \frac{h_j}{6} \begin{bmatrix} 2d_{11}^j & 0 & 0 & 0 & d_{11}^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2d_{66}^j & 0 & 0 & 0 & d_{66}^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2d_{44}^j & 0 & 0 & 0 & d_{44}^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{11}^j & 0 & 0 & 0 & 2d_{11}^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{66}^j & 0 & 0 & 0 & 2d_{66}^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{44}^j & 0 & 0 & 0 & 2d_{44}^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{Q^j h_j}{6} \begin{bmatrix} 2\alpha_1^j \alpha_1^j & 0 & 0 & 2\alpha_1^j & \alpha_1^j \alpha_1^j & 0 & 0 & \alpha_1^j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\alpha_1^j & 0 & 0 & 2 & \alpha_1^j & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1^j \alpha_1^j & 0 & 0 & \alpha_1^j & 2\alpha_1^j \alpha_1^j & 0 & 0 & 2\alpha_1^j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1^j & 0 & 0 & 1 & 2\alpha_1^j & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{A12})$$

$$\mathbf{D}_{TB}^j = \begin{bmatrix} 0 & \frac{d_{11}^j}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{d_{11}^j}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{d_{66}^j}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{d_{66}^j}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_{11}^j}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{d_{11}^j}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{d_{66}^j}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{d_{66}^j}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{Q^j}{2} \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1^j \alpha_1^j & 0 & \alpha_1^j & 0 & -\alpha_1^j \alpha_1^j & 0 & -\alpha_1^j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1^j & 0 & 1 & 0 & -\alpha_1^j & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha_1^j \alpha_1^j & \alpha_1^j & 0 & -\alpha_1^j \alpha_1^j & 0 & -\alpha_1^j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1^j & 0 & 1 & 0 & -\alpha_1^j & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A13})$$

$$\mathbf{E}_{TB}^j = \frac{1}{3} \frac{d_{44}^j h_j}{r_0} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A14})$$

$$\mathbf{N}_{TB}^j = \frac{1}{6} \frac{h_j}{r_0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4d_{44}^j & 0 & 0 & 0 & 2d_{44}^j & 0 \\ 0 & 2d_{55}^j & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55}^j & 0 \\ 4d_{44}^j & 0 & 0 & 0 & 2d_{44}^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2d_{44}^j & 0 & 0 & 0 & 4d_{44}^j & 0 \\ 0 & d_{55}^j & 0 & 0 & 0 & 2d_{55}^j & 0 & 0 \\ 2d_{44}^j & 0 & 0 & 0 & 4d_{44}^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A15})$$

$$\mathbf{L}_{TB}^j = \frac{2}{3} \frac{d_{44}^j h_j}{r_0^2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A16})$$

$$\mathbf{Q}_{TB}^j = \frac{1}{r_0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{d_{55}^j}{2} & 0 & -\frac{d_{55}^j}{2} & 0 & -\frac{d_{55}^j}{2} & 0 & \frac{d_{55}^j}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{d_{55}^j}{2} & 0 & -\frac{d_{55}^j}{2} & 0 & -\frac{d_{55}^j}{2} & 0 & \frac{d_{55}^j}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A17})$$

부록 5. 지하수로 포화된 가로등방성 매질에 대한 유한요소 정식화

u - w 정식화에 의한 지하수로 포화된 가로등방성 매질의 지배방정식은 식 (8)과 같고, 경계조건은 식 (6), (7)과 같다. Galerkin 방법을 이용하여 이산화된 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sw} \\ \mathbf{M}_{ws} & \mathbf{M}_{ww} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{w}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{ww} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} + \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sw} \\ \mathbf{K}_{ws} & \mathbf{K}_{ww} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_s \\ \mathbf{f}_w \end{Bmatrix} \quad (\text{A18})$$

$$\mathbf{M}_{ss} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}_s^T \mathbf{N}_s d\Omega \quad (\text{A19a})$$

$$\mathbf{M}_{ww} = \int_{\Omega} \frac{\rho_w}{n} \mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w d\Omega \quad (\text{A19b})$$

$$\mathbf{M}_{sw} = \mathbf{M}_{ws}^T = \int_{\Omega} \rho_w \mathbf{N}_s^T \mathbf{N}_w d\Omega \quad (\text{A19c})$$

$$\mathbf{C}_{ww} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_w^T \mathbf{f} \mathbf{N}_w d\Omega \quad (\text{A20})$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T : \mathbf{D} : \mathbf{B} d\Omega \quad (\text{A21a})$$

$$\mathbf{K}_{ss} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_s^T \mathbf{Q} \mathbf{B}_s d\Omega \quad (\text{A21b})$$

$$\mathbf{K}_{ww} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_w^T \mathbf{Q} \mathbf{B}_w d\Omega \quad (\text{A21c})$$

$$\mathbf{K}_{sw} = \mathbf{K}_{ws}^T = \int_{\Omega} \mathbf{B}_s^T \mathbf{Q} \mathbf{B}_w d\Omega \quad (\text{A21d})$$

$$\mathbf{f}_s = \int_{\Gamma_f} \mathbf{N}_s^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n d\Gamma \quad (\text{A22a})$$

$$\mathbf{f}_w = - \int_{\Gamma_p} \mathbf{N}_w^T \tilde{\nu} p d\Gamma \quad (\text{A22b})$$

여기서 \mathbf{N}_s 와 \mathbf{N}_w 는 각각 흡과 간극수의 변위에 대한 형상 함수이다. \mathbf{B} , \mathbf{B}_s , \mathbf{B}_w 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{N}_s \quad (\text{A23a})$$

$$\mathbf{B}_s = \boldsymbol{\alpha} \nabla \cdot \mathbf{N}_s \quad (\text{A23b})$$

$$\mathbf{B}_w = \nabla \cdot \mathbf{N}_w \quad (\text{A23c})$$

식 (A21b), (A21c), (A21d)의 강성행렬은 감차적분(reduced integration)을 사용하여 계산하여야 한다.