

설계변수 표본에 근거한 구조시스템 모달 특성의 통계적 예측

김 용 우* · 유 흥 희†

(2009년 7월 15일 접수, 2009년 8월 25일 수정, 2009년 9월 5일 심사완료)

Statistical Estimation of Modal Characteristics of a Structural System Based on Design Variable Samples

Yong Woo Kim and Hong Hee Yoo

Key Words : Micro Cantilever Beam(마이크로 외팔보), Modal Analysis(모달 해석), Population Estimation(모집단 추정), Sample Survey(표본조사), AFM(원자간력 현미경)

Abstract

The design methods of mechanical systems are largely classified into deterministic methods and stochastic methods. In deterministic methods, design parameters are assumed to have fixed values. On the other hand, in stochastic methods, design parameters are assumed to be statistically distributed. When a stochastic method is employed, statistical characteristics of the populations of design variables are assumed to be known. However, very often, it is almost impossible or very expensive to obtain the statistical characteristics of the populations. Therefore a sample survey method is usually employed for stochastic methods. This paper describes the procedure of estimating the statistical characteristics of populations by employing sample data sets. An example of AFM micro cantilever beam is employed to show the effectiveness of the procedure.

1. 서 론

오래 전부터 인간은 시스템을 만들기 위해 여러 가지 설계방법들을 연구해왔다. 기존의 설계방법들은 시스템의 설계변수들을 어떻게 다루느냐에 따라 크게 결정론적 설계방법과 확률론적 설계방법으로 나뉜다. 결정론적인 설계방법은 시스템의 설계변수들이 분포를 가지지 않는다고 가정하고 시스템을 설계하고 해석하였다. 하지만 제조 시 발생하는 공차 및 시스템의 사용으로 인한 마모와 변형으로 인해 시스템 설계변수는 하나의 수치로

정해지지 않으며 통계적인 분포를 가지게 된다. 따라서 결정론적 설계방법으로는 시스템의 응답을 정확히 예측하기 어렵다. 이러한 문제점을 보완하기 위하여 최근에는 설계변수의 통계적인 분포를 고려한 확률론적 설계방법이 연구되고 있다. 확률론적 설계방법은 설계변수의 통계적인 분포를 고려하여 시스템 성능을 해석하고 설계에 적용하는 방법으로 현실적인 문제 해결을 위해 공학 설계 분야에서 활발한 연구가 이루어 지고 있다.

Hartenberg 등⁽¹⁾은 최초로 공차에 의한 링크기구의 오차를 고려하였고 Garrett 등⁽²⁾은 공차의 영향을 통계적으로 접근하여 알아보았다. 이 후에 Lee 등⁽³⁾은 해석적인 방법을 이용하여 효율적인 공차 해석을 수행하였다. 또한 전통적인 통계적 해석 방법으로는 몬테칼로 방법(monte carlo method)이 있다. 이는 통계적인 방법으로 구조적 신뢰성을 구하는 데 광범위하게 적용되었는데, 이 방법은 간단하고 정확하지만 그만큼 많은 해석 시간이 필요한 단점이 있다. 위와 같은 확률론적 방법들은 설계변수의 통계적 분포를 항상 정확히 알 수 있

[이 논문은 2009년도 동역학 및 제어부문 춘계학술대회(2009. 5. 21-22., BEXCO) 발표논문임]

† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계공학부

E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr

TEL : (02)2220-0446 FAX : (02)2293-5070

* 한양대학교 대학원 기계공학과

다는 가정에 근거하여 적용되었다. 이 방법은 결정론적 설계방법보다는 현실적이지만 설계변수 모집단들의 분포를 알고 있다는 가정에 근거하여 시스템을 해석하고 설계하기 때문에 그에 따르는 한계를 지닌다. 예를 들면 어느 공정에서 제작된 부품의 길이는 통계적인 분포를 가지게 되지만 그 분포가 이론적인 통계 모형과 정확하게 일치하지 않는 경우가 대부분이며 이것 또한 모든 부품 길이를 측정해 보아야만 모집단의 정확한 통계적 분포를 알아낼 수 있다. 설계변수 분포를 알기 위한 방법으로는 전수 조사와 표본 조사가 있지만 시간과 비용의 문제로 인하여 대부분 표본 조사를 실시하여 설계 변수들의 통계적 분포를 예측하게 된다. 따라서 표본의 정보를 이용하여 시스템 성능 모집단의 통계적인 분포를 예측하는 방법이 필요하다. 하지만 공학분야에서는 아직까지 설계변수 표본을 통해 모집단의 통계적인 분포를 예측하고 사용하는 연구는 매우 부족한 실정이다.

본 연구에서는 설계변수가 통계적 분포를 가지는 시스템에서 설계변수의 표본에 근거한 시스템의 응답을 예측하는 과정을 제안하였다. 이를 위해 먼저 설계자가 설계변수 모집단의 통계적 분포를 알고 있다고 가정했을 때 결과값의 통계적 분포를 민감도를 통해 해석적으로 구하는 방법에 대해서 소개하였다. 그리고 설계변수 표본의 정보만이 알려져 있는 경우 설계변수 표본에 근거하여 결과값의 모집단을 통계적으로 예측하는 과정을 제안하였다. 제안된 과정의 타당성을 검증하기 위해 간단한 시스템에 적용하여 그 결과를 확인하였고 실제 예제로써 마이크로 구조 시스템 중 NC-AFM (Non-Contact Atomic Force Microscopy)에 적용하여 NC-AFM의 성능에 영향을 미치는 AFM cantilever의 표본에 근거하여 NC-AFM의 Set point 및 측정 감도를 통계적으로 예측하였다.

2. 모집단의 통계적 예측 방법

2.1 설계변수의 모집단 분포를 알고 있는 경우

설계변수 모집단의 통계적 특성이 알려져 있는 경우, 설계변수들에 대한 시스템의 성능이 식 (1)과 같이 표현된다면 성능의 평균 및 분산은 식 (2, 3)과 같이 구해진다.⁽⁴⁾

$$Y = g(b_1, b_2, \dots, b_n) \quad (1)$$

$$E(Y) = g(\mu_{b_1}, \mu_{b_2}, \dots, \mu_{b_n}) \quad (2)$$

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial b_i} \right)^2 Var(b_i) \quad (3)$$

여기서 Y 는 시스템 성능을 나타내고 b_i 는 설계변수, μ_{b_i} 와 $Var(b_i)$ 는 설계변수의 평균과 분산, $E(Y)$ 와 $Var(Y)$ 는 시스템 성능의 평균, 분산을 각각 나타낸다. 설계변수 모집단의 평균과 분산을 알고 있다면 식 (2)와 (3)을 통해 시스템 성능의 평균과 분산을 구할 수 있다.

2.2 설계변수의 모집단 분포를 모르는 경우

설계변수 모집단의 통계적 분포의 정보가 알려져 있지 않고 단지 설계변수 표본의 정보만을 가지고 있다면 식 (2)와 식 (3)에서 μ_{b_i} 와 $Var(b_i)$ 을 정확하게 알 수 없다. 따라서 설계변수의 표본에서 얻을 수 있는 정보인 표본의 평균과 분산을 모집단의 평균과 분산이라고 가정하여 2.1 절의 과정을 수행하고 그 결과로 얻어지는 값을 $E^*(Y)$ 와 $Var^*(Y)$ 라고 하여 모집단의 평균과 분산인 $E(Y)$ 와 $Var(Y)$ 을 근사적으로 구한다. 이것은 표본으로부터 구한 값이므로 모집단의 통계량과 정확하게 일치하지 않는다. 따라서 신뢰도에 대한 정보를 포함할 수 있도록 구간추정을 적용하여 모집단의 분포를 추정할 수 있다. 이 과정이 Fig. 1에 간략하게 나타나 있다. 구간 추정에서 신뢰구간은 식 (4)와 식 (5)로 나타낼 수 있고 이것은 모집단의 평균과 분산이 신뢰구간 안에 $100(1-\alpha)\%$ 의 확률로 존재한다는 의미이다.⁽⁵⁾

$$\bar{X} - t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (4)$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2(n-1; \alpha/2)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2(n-1; 1-\alpha/2)} \quad (5)$$

여기서 μ, σ 는 관심 대상의 모집단의 평균과 표준 편차를 나타내고 \bar{X}, s 는 표본의 평균과 표준 편차를 나타낸다. n 은 표본의 크기, $t_{\alpha/2}$ 는 Student t 분포, $\chi^2(n-1; \alpha/2)$ 은 자유도가 $n-1$ 인 카이제곱 분포를 나타낸다. 식 (4)와 식 (5)에서 \bar{X} 는 $E^*(Y)$ 로 또 s^2 은 $Var^*(Y)$ 로 대체하면 성능의 구간추정을 구할 수 있다.

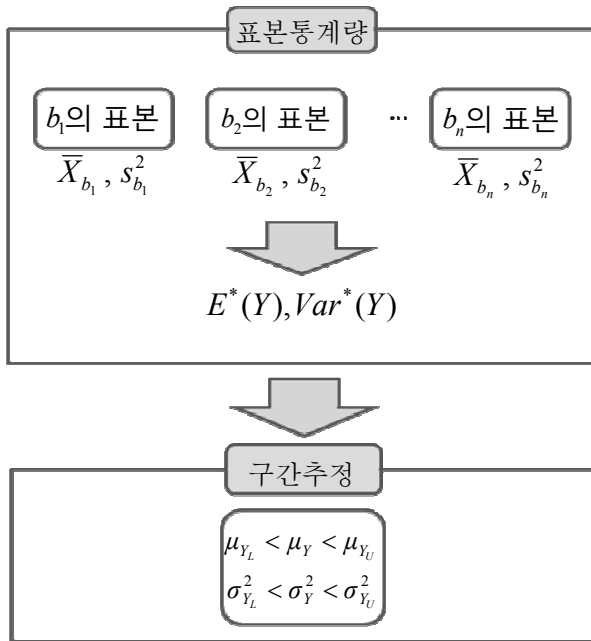


Fig. 1 Procedure of population estimation

3. 제안된 방법의 검증

3.1 1 자유도 MK 시스템의 고유진동수 예측

2 장에서 제안한 방법의 유효성을 검증해보기 위해서 Fig. 2 에 보는 바와 같이 간단한 1 자유도 시스템의 고유진동수를 예측해보았다. 시스템의 설계변수는 질량 m 과 스프링 강성 k 이고 성능인 고유진동수 ω_n 은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6)$$

주어진 조건은 $m \sim N(10, 0.1^2)$, $k \sim N(1000, 10^2)$ 이고 표본 크기는 100 이다. 그리고 ω_n 의 모집단 분포를 예측하기 위해서 제안된 과정을 적용하여 신뢰도 99%로 구간추정을 하였고 실제 모집단과 비교를 통해 제안된 과정을 검증하였다. 각 과정에서 얻어진 표본의 통계량 및 최종적으로 얻어진 ω_n 의 추정량을 Table 1 과 Table 2 에 정리하였다. 여기서 $\mu_L, \mu_U, \sigma_L^2, \sigma_U^2$ 은 각각 평균과 분산의 구간추정의 신뢰하한과 신뢰상한이다.

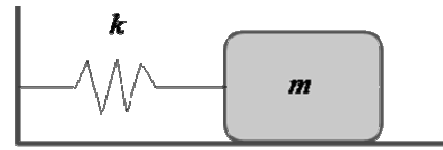


Fig. 2 1-DOF MK System

Table 1 Point estimators of design parameters

	\bar{X}	s^2
m	10.00936 [kg]	0.009576 [kg] ²
k	999.4493 [N/m]	100.0770 [N/m] ²

Table 2 interval estimators of the performance

	μ_L [rad/s]	μ_U [rad/s]	σ_L^2 [rad/s] ²	σ_U^2 [rad/s] ²
ω_n	9.9742	10.0109	0.00348	0.00727

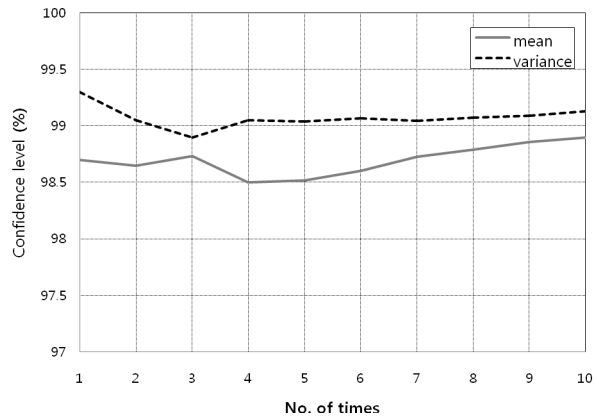


Fig. 3 Confidence level results obtained with the proposed method

이것은 ω_n 의 모집단의 평균과 분산이 각각 μ_L 과 μ_U, σ_L^2 과 σ_U^2 사이에 존재할 확률이 99%가 된다는 의미이다.

3.2 구간 추정 량의 신뢰도 검증

3.1 절에서 구한 구간 신뢰수준을 검증하기 위해 모집단과 비교하였다. 설계변수 모집단을 가지고 식 (6)을 이용해 ω_n 의 모집단을 구한 후 모집단의 통계적인 특성이 앞에서 구한 신뢰구간 안에 99% 확률로 포함되는지를 검증해보았다. 한번의 표본추출로 모집단의 통계적 특성이 신뢰구간에 포함되는지를 판단할 수 없기 때문에 99% 신뢰수준을 검증하기 위해서 1000 번의 표본 추출을 수행하여 결과를 확인하였다. 좀더 정확한 검증을 위해서 같은 방법으로 10 회를 실시하여 누적평균을 구한 결과를 Fig. 3에 나타내었고 평균과 분산 모두 신뢰도 99% 범위에 매우 근접한 결과를 보여주는 것을 확인할 수 있었다. 따라서 위 결과는 본 연구에서 제안한 방법의 유효성과 신뢰성을 보여주는 것이라고 판단된다.

4. NC-AFM의 설계문제

4.1 AFM의 측정방법

AFM은 원자간의 거리가 가까울 때 발생하는 반데르발스 힘의 원리를 이용하여서 시료 표면의 형상을 얻는 원자 현미경으로 시료가 도체가 아닌 경우에도 측정이 가능하므로 그 사용범위가 넓어 그에 관한 많은 연구가 진행되어 왔다. Fig. 4는 AFM의 구조와 작동원리를 이상화하여 보여주고 있다. AFM의 종류는 그 측정 방법에 따라서 크게 Contact mode 방식과 Non-contact mode 방식으로 나누어 진다. Fig. 5는 Contact mode 방식과 Non-contact mode 방식의 작동 범위를 원자간 거리에 대한 반데르발스 힘 그래프를 통해 보여주고 있다. Contact mode AFM은 AFM cantilever의 끝에 달린 탐침이 시료의 표면에 매우 접근하여 측정을 하고 시료 표면과 탐침 사이에 발생하는 원자간 척력을 이용하며 AFM cantilever의 굽힘 변화를 측정하여 시료표면을 형상화 한다. 이와 반면에 NC-AFM은 원자간 인력이 작용하는 거리에서 측정하며 인력 크기가 작아 AFM cantilever의 굽힘이 미세하므로 AFM cantilever 굽힘을 측정하는 대신 고유진동수 변화를 탐침과 표면 사이의 거리로 대응시켜 시료 표면을 형상화 한다. 따라서 NC-AFM에서는 AFM cantilever 고유진동수와 거리의 관계를 이용하여 거리를 구하게 되는데 그를 위하여 다음의 두 식이 이용된다.⁽⁶⁾

$$k_{eff} = k_0 - \frac{dF}{dz} \quad (7)$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{eff}}{m}} \quad (8)$$

여기서 k_0 와 k_{eff} 는 각각 AFM cantilever의 초기 스프링 상수와 변화된 스프링 상수를 나타내며 F 는 탐침과 시료 표면 사이에 작용하는 반데르발스 힘, z 는 탐침과 시료표면 사이 거리, f_n 은 AFM cantilever의 고유진동수를 나타낸다. 측정을 시작하면 탐침과 시료표면 사이의 거리가 가까워지고 식 (7)에서 보는 바와 같이 스프링상수 값이 변화하게 된다. 이는 고유진동수 변화를 야기하게 되므로 AFM cantilever 고유진동수의 변화를 측정하게 되면 식 (7)과 식 (8)을 이용하여 탐침과 시료 표면 사이의 거리를 계산할 수 있다. NC-AFM은 이 같은 과정으로 표면을 관찰하기 때문에 AFM cantilever 고유진동수나 스프링 강성이 측정 성능에 영향을 주므로⁽⁷⁾ 고유진동수와 스프링강성이 가지는 통계적 특성으로 NC-AFM의 성능범위를 예측하는 것이 가능하다.

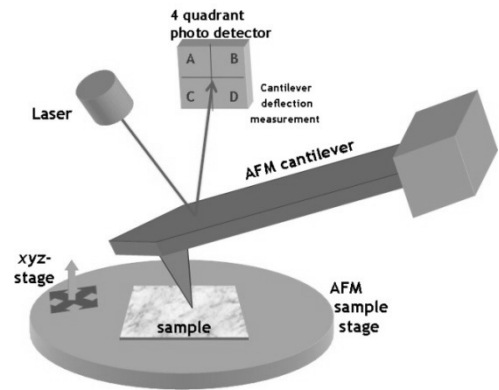


Fig. 4 Schematic diagram of an atomic force microscopy

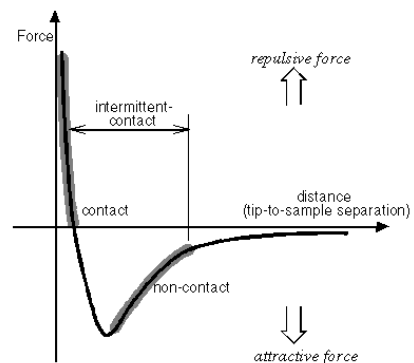


Fig. 5 Range of contact AFM and noncontact AFM

4.2 NC-AFM 의 Set point 및 측정감도

NC-AFM 을 사용하여 시료의 표면을 측정하기 위해서는 AFM cantilever 를 시료 표면 가까이 위치시켜야 한다. 이때 높이는 사용자가 임의로 정하게 되고 그 위치를 Set point 라고 한다. Set point 는 AFM cantilever 의 특성에 따라 정해질 수 있으며 이것은 NC-AFM 의 안정적 측정 및 측정 감도에도 영향을 미치게 되므로 측정을 시작하기 전에 Set point 의 범위를 결정하는 것이 필요하다. Fig. 6 은 Set point 를 보여주고 있다. 이 Set point 는 시스템이 문제없이 작동할 수 있도록 설정되어야 하며 따라서 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

$$k_{eff} = k_0 - \frac{dF}{dz} > 0 \tag{9}$$

$$z_{min} = z_0 - h_{max} - A \tag{10}$$

여기서 z_0 는 Set point 가 되고 z_{min} 은 탐침과 시료 표면 사이의 최소거리이다. 그리고 A 과 h_{max} 는 각각 cantilever 의 진폭과 측정하는 시료의 최대 높이가 된다. 식 (9) 는 NC-AFM 이 안정적으로 작동을 하기 위한 조건이 되며 식 (10) 에서 얻어지는 z_{min} 의 값이 식 (9) 에서 구한 값보다 커야 한다는 조건으로 z_0 의 최소값을 구할 수 있다.

측정감도 S 는 식 (7) 과 (8) 을 이용하여 다음과 같은 식으로 정의한다.⁽⁷⁾

$$S = \frac{1}{k_0} \frac{dF}{dz} \tag{11}$$

위 식들에서 보는 바같이 Set point 의 최소거리와 측정감도는 스프링 상수에 의해 결정이 되고 각각의 관계는 Fig. 7 과 Fig. 8 에 나타내었다.

4.3 AFM cantilever 의 성능구간 예측

NC-AFM 에 사용되는 cantilever 의 형상에는 여러 가지가 있으나 본 연구에서는 사각단면을 가진 외팔 보 형태를 사용하였다. NC-AFM 의 cantilever 모델은 Fig. 9 에 나타나 있고 cantilever 의 물성치 및 형상 치수의 평균값은 Table 3 에 정리하였다. 기존의 결정론적 설계 방법에 따르면 Table 3 의 데이터를 이용해 AFM cantilever 의 고유진동수와 스프링 상수의 평균값들을 구할 수 있다. 이 때 고유진동수와 스프링 상수를 구해보면 각각 139.8KHz, 17.188N/m 가 된다. 하지만 실제로 설계 변수는 통계적 분포를 가지는 확률변수이고 AFM cantilever 의 특성도 통계적 분포를 가지게 된다.

이 예제에서는 AFM cantilever 의 스프링 강성이 통계적 분포를 가질 때 스프링 강성의 표본에 근거하여 이 시스템의 성능 구간을 통계적으로 예측하였다. 설계변수는 스프링 강성이고 분포는 $k_0 \sim N(17.188, (1.7188)^2)$ 이다. 그리고 위와 같은 분포를 따르는 모집단을 100,000 개를 생성하고 크기가 50 인 표본을 추출하였고 제안된 방법을

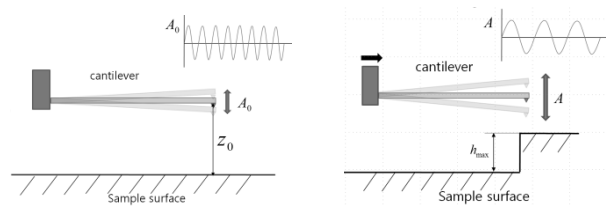


Fig. 6 Schematic diagram to explain the set point

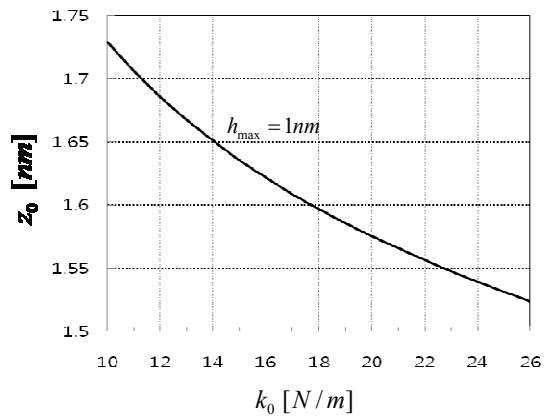


Fig. 7 Relationship between k_0 and the Set point

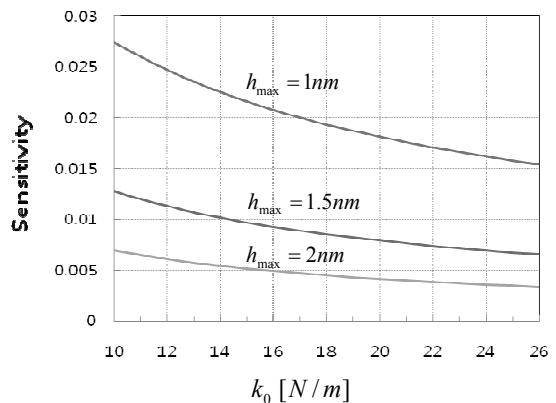


Fig. 8 Relationship between k_0 and the sensitivity

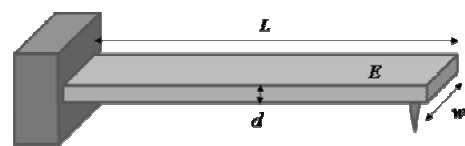


Fig. 9 AFM cantilever

Table 3 Numerical data of the AFM cantilever

Notation	Description	Numerical Data(mean)
L	Beam length	225 μm
E	Young's modulus	179GPa
d	Depth	5 μm
w	Width	35 μm
I	Moment of inertia	364.58 μm^4

Table 4 Estimation of the set point ($h_{\max} = 1\text{nm}$)

	μ_L [nm]	μ_U [nm]	σ_L^2 [nm] ²	σ_U^2 [nm] ²
z_0	1.60012	1.61312	0.000184	0.000528

※ confidence level: 99%

Table 5 Estimation of the sensitivity ($h_{\max} = 1\text{nm}$)

	μ_L	μ_U	σ_L^2	σ_U^2
S	0.019507	0.020261	6.2122x10 ⁻⁷	1.7835x10 ⁻⁷

※ confidence level: 99%

Table 6 Ranges of 3 sigma ($h_{\max} = 1\text{nm}$)

	The range of 3 σ (99.73%)
z_0	1.53116 < z_0 < 1.68208
S	0.015500 < S < 0.024268

적용하여 신뢰수준 99%로 AFM cantilever 의 Set point 와 측정감도의 범위를 예측하였다. Table 4 는 측정하는 시료의 최대높이가 1nm 일 때 Set point 의 최소값의 예측 결과를 보여주고 있고 Table 5 는 측정감도의 예측 결과를 보여주고 있다. 그리고 이 예측 결과를 가지고 3 σ 의 범위를 구한 결과를 Table 6 에 정리하였다.

5. 결론

본 논문에서는 설계변수들이 통계적인 분포를 가지고 있는 경우 설계변수의 표본만이 알려져 있을 때 설계변수 표본의 통계량을 이용하여 성능

값의 모집단을 통계적으로 예측하는 방법을 제안하였다. 그리고 예측된 성능 결과를 모집단과 비교를 통해 제안한 방법의 검증을 수행하였다. 또한 제안된 방법을 적용하여 NC-AFM 의 성능 범위를 AFM cantilever 의 표본에 근거하여 예측하고 그 결과를 확인하였다. 제안된 방법은 간단한 표본 검사를 통해 모집단의 통계적인 특성을 예측할 수 있기 때문에 설계 혹은 생산자가 적은 시간과 비용으로 시스템의 성능을 파악하는 것이 가능하다. 표본 조사의 특성상 표본의 크기나 추출 방법에 따라 예측하는 범위가 달라지지만 예측된 범위를 신뢰수준과 더불어 제시하기 때문에 시스템의 성능에 대한 매우 실제적인 정보가 될 수 있다.

후기

이 논문은 2009 년도 2 단계 두뇌한국 21 사업에 의하여 지원되었습니다.

참고문헌

- (1) Hartenberg, R. S. and Denavit, J., 1964, *Kinematic Synthesis of Linkages*, McGraw-Hill, New York.
- (2) Garret, R. E. and Hall, A. S., 1969, "Effect of Tolerance and Clearance in Linkage Design," *ASME Journal of Engineering for Industry*, Vol. 91, pp. 198~202.
- (3) Lee, S. J. and Gilmore, B. J., 1991, "The Determination of the Probabilistic Properties of Velocities and Accelerations in Kinematic Chains with Uncertainty," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 113, pp. 84~90.
- (4) Choi, D. H., 2005, "Statistical Tolerance Analysis and Modal Analysis of Multibody Systems," Hanyang University, Ph. D. Thesis.
- (5) Ronald E. Walpole, Raymond H. Myers, Sharon L Myers, Keying Ye, 2002, *Probability & Statistics for Engineers & Scientists*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, pp. 230~265.
- (6) Binning, G. and Quate, C. F., 1986, "Atomic Force Microscopy," *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 96, No. 9, pp. 930~933.
- (7) Park, J. K., Kwon, H. K. and Hong, S. W., 2004, "Vibration Characteristics and Performance of Cantilever for Non-contact Atomic Force Microscopy," *Transaction of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 14, No.6, pp. 495~502.
- (8) Sarid, D., 1997, *Exploring Scanning Probe Microscopy*, John Willy and Sons, Inc., New York, pp. 7~99.