

웨이블릿 기법을 이용한 인덱스 펀드 구성에 관한 연구*

조희연**

〈목 차〉

I. 서론	3.1 인덱스 펀드의 개념 및 구성방법
II. 웨이블릿 이론	3.2 웨이블릿을 이용한 척도별 베타의 추정 및 인덱스 펀드 구성
2.1 웨이블릿 변환	IV. 결 론
2.2 경제 및 금융시장에 대한 기존 웨이블릿 연구	참고문헌
III. 웨이블릿을 이용한 베타의 추정 및 최적 인덱스 펀드 구성	<Abstract>

I. 서론

본 연구는 최근에 금융시계열에 다양하게 적용되고 있는 웨이블릿 기법을 이용한 최적 인덱스 펀드의 구성 전략에 대해 다룬다. 인덱스 펀드란 증권시장의 장기적 성장 추세를 전제로 하여 목표지수의 움직임에 연동되게 포트폴리오를 구성하여 운용함으로써 목표지수와 유사한 수익을 실현하고자 하는 소극적 포트폴리오 (passive portfolio) 운용기법이다.

인덱스 펀드가 투자자들에게 인기를 끄는 이유는 펀드 매니저의 개인 역량에 따라 운용되는 적극적 포트폴리오(active portfolio)에 비해 장기적 관점에서 볼 때 우수한 운용 성과를

보이고 있으며 또한 시스템에 따라 운용되기 때문에 유명 펀드 매니저를 고용할 필요가 없어 운용 수수료를 대폭 낮출 수 있기 때문이다. 펀드의 위험 측면에서도 인덱스 펀드는 지수를 따라가기 때문에 자금을 시장전체에 폭넓게 투자하게 되어 예상을 바탕으로 특정부분에 집중적으로 투자하는 적극적 펀드보다 위험을 분산시키는 효과가 크다. 또한, 지수선물이나 지수옵션 등 지수관련 파생금융상품들이 최근 들어 많이 거래되고 있는데 이들 지수관련 파생금융상품의 위험 헤징(hedging)이나 복합 전략 구사 시 인덱스 펀드가 필요하게 된다.

인덱스 펀드 구성의 목표는 선정된 지수와 유사한 성과를 내도록 포트폴리오를 구성하는

* 본 연구는 울산대학교 학술연구비 지원에 의해 수행되었음.

** 울산대학교 경영정보학과 교수, hycho@ulsan.ac.kr

것이다. 유사한 성과를 내기 위한 가장 좋은 방법은 인덱스 펀드와 목표지수의 구성 종목과 구성 비율을 일치시키는 것이지만 이는 현실적으로 가능하지 않거나 가능해도 많은 비용을 발생시키게 되어 비현실적이다. 따라서 적은 종목을 가지고 어떻게 하면 목표지수를 효과적으로 복제하느냐 하는 것이 인덱스 펀드 구성의 핵심 문제이다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 인덱스 펀드의 여러 특성(가격대별 비중, 업종별 비중, 규모별 비중 등)이 목표지수의 특성들과 일치되도록 구성하는 휴리스틱 기법이나 과거의 추적오차를 최소화시키는 구성 비율을 구하는 최적화 기법들이 기존에 많이 사용되어 왔다. 그러나 이러한 기존의 방법들은 인덱스 펀드의 실제 운용 시 상당한 추적오차(tracking error)를 발생시켜 인덱스 펀드를 활용한 위험해징이나 제반 전략 구사에 여러 문제점을 노출하였다. 따라서 목표지수와 인덱스 펀드의 추적오차를 줄이도록 인덱스 펀드를 구성하는 것은 이론적 관점에서 뿐만 아니라 실무적 관점에서도 상당히 중요한 문제라 할 수 있다.

이러한 필요성에 의거하여 본 연구에서는 웨이블릿(wavelet) 기법을 이용하여 목표지수와 인덱스 펀드의 추적오차를 줄이는 새로운 방법을 제시하고자 한다. 웨이블릿 기법은 1983년 Morlet에 의해 소개된 이후 신호를 분석하고 해석하는데 효과적인 수학적 도구로 알려져, 순수 수학분야(조화해석학, 선형대수)로부터 여러 응용분야(전자공학, 컴퓨터공학, 지구과학)에 이르기까지 폭 넓게 연구되어 왔다. 웨이블릿 변환은 푸리에(fourier) 변환에 기반을 둔 기존의 신호처리 알고리즘에 비해 속

도가 빠르고 시간과 주파수영역에서 신호의 국소화를 효율적으로 구현하기 때문에, 최근 영상 압축, 레이더신호, 생체신호, 지진연구, 경제 시계열, 금융 시계열 등 다양한 분야에 응용되고 있다.

주식시장의 경우 하루 내에 자신의 모든 거래를 청산하고 다음 거래일까지 포지션을 가져가지 않는 일중거래자(intraday trader)로부터 연기금과 같은 장기 투자자까지 다양한 투자기간을 갖는 이질적인 거래자들이 존재하며 이들은 그들 자신만의 고유한 거래 규칙을 갖고 있다. 그러나 주식 수익률 시계열에는 이들 거래자들의 거래행동의 합만이 나타나게 된다. 따라서 다양한 시간척도에서 이루어지는 주체들의 의사결정과 행동에 대한 분석 및 집계자료에 숨어있는 정보를 다양한 척도에서 추출하는 기법이 필요한데 이를 가능케 하는 것이 웨이블릿 기법이다.

본 연구에서는 웨이블릿 기법에 대한 간단한 소개와 효과적인 인덱스 펀드 구성에 웨이블릿 기법의 적용 가능성을 살펴보고자 한다. 즉, 웨이블릿 기법을 이용하여 주가지수를 단일 수치의 시계열로만 보지 않고 시간 척도별(단기, 중기, 장기신호 등)로 분해하여 필요한 척도의 시계열을 구한 후 선택된 시계열에 대해 목표지수와 인덱스 펀드의 특성 치들을 일치시킴으로써 인덱스 펀드 구성의 성과를 높이고자 한다.

II. 웨이블릿 이론

주식수익률과 같은 시계열을 분석하기 위해

기준에 사용한 방식은 다양한 주기와 진폭을 가진 사인과 코사인 함수로 신호를 분해하는 푸리에 변환이 주를 이루었다. 그러나 푸리에 변환의 가장 큰 단점은 그것이 주파수 분해(frequency resolution)만을 가질 뿐 어떤 시간 분해(time resolution)도 가지지 않는다는 것이다. 이것은 비록 우리가 하나의 신호 속에 존재하는 모든 주파수들을 결정할 수 있을지라도 우리는 그것들이 존재하는 시점을 알지 못한다는 것이다. 푸리에 변환의 이러한 문제점을 극복하고자 제시된 방식이 단기 푸리에 변환방식이다. 단기 푸리에 변환방식은 특정 주파수의 시간영역에서의 정보를 얻기 위해 푸리에 변환을 전체 시간영역에서가 아니라 일정너비의 창(window)에 대해서만 수행하는 것이다. 그러나 이러한 단기 푸리에 변환방식은 창의 너비가 고정되어 있으므로 고정된 창의 너비 내에 포함되지 못하는 특정 주파수는 포착할 수 없다는 단점이 있다. 웨이블릿 분석은 기본적으로 단기 푸리에 변환의 이러한 한계를 극복하기 위해 제기된 기법이다. 웨이블릿 변환에서는 적절히 주어진 기본함수를 팽창 또는 수축으로 척도 구성(scaling)하고 평행이동한 결과로 생긴 함수들을 빌딩블록으로 사

용하기 때문에 분석영역이 시간-주파수 수축에 대해 유연하다. 즉, 웨이블릿 변환은 고정된 너비의 창이 아니라 주파수에 따라 다른 너비의 창을 유연하게 적용함으로써 다양한 주파수의 시간영역에서 정보를 포착할 수 있다는 장점이 있다. <그림 1>은 주파수와 시간영역에서 푸리에 변환과 단기 푸리에 변환, 웨이블릿 기법의 차이를 나타낸다.

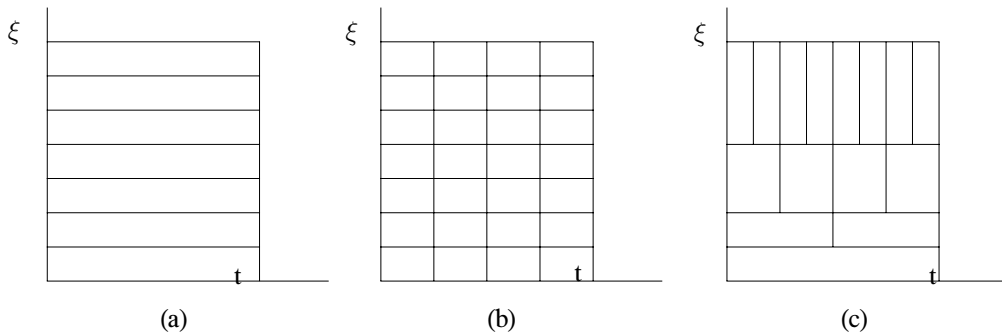
주파수라는 용어가 주로 푸리에 변환을 위하여 사용되기 때문에 웨이블릿들의 경우에는 시간-주파수 표현 대신에 시간-스케일 표현(time-scale representations)을 사용하기도 한다. 고 스케일은 큰 사진이며 반면에 저 스케일은 세부(details)를 보여준다. 그러나 본 연구에서는 보다 일반화된 표현방식인 시간-주파수 용어를 사용한다.

2.1 웨이블릿 변환(wavelet transform)

푸리에 변환은 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi t} dt \dots\dots\dots (1)$$

식 (1)과 같은 푸리에 변환은 주어진 함수



<그림 1> (a) 푸리에 변환, (b) 단기 푸리에변환, (c) 웨이블릿 변환에 의한 시간(t)-주파수(ξ) 분석영역

또는 신호 $f(t)$ 의 주파수에 대해서는 완전한 정보를 제공하지만 그 신호가 발생한 시간에 대해서는 아무런 정보를 가지고 있지 않다. 즉, 푸리에 변환은 시간과 주파수에 대해 신호를 동시에 국소화할 수 없다는 단점이 있다. 시간-주파수 국소화를 구현하기 위하여 단기푸리에 변환을 사용할 수 있지만 보다 효율적인 방법이 연속 웨이블릿 변환이다.

우리의 분석대상이 되는 신호가 $f(t)$ 일 때 모 웨이블릿(mother wavelet) 함수를 $\psi(t)$ 라고 정의하자. 모 웨이블릿이란 다른 웨이블릿 함수들이 이로부터 이전과 팽창(척도조정)을 통해서 파생된다는 의미이다. 이전과 척도조정을 위한 요인을 각각 τ 와 s 라고 하면 모 웨이블릿 함수 $\psi(t)$ 는 τ 에 의해 이전되고 s 에 의해 팽창 또는 축소된다. 따라서 개별 웨이블릿들은 모 웨이블릿 함수 $\psi(t)$ 를 다음과 같이 조정된 형태로 표현된다.

$$\psi_{s,\tau} = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \dots\dots\dots (2)$$

변환을 위한 개별 웨이블릿이 식 (2)와 같이 표현 되었을 때 분석 대상이 되는 신호 $f(t)$ 에 대한 연속 웨이블릿 변환 W_f 는 다음과 같이 정의될 수 있다.

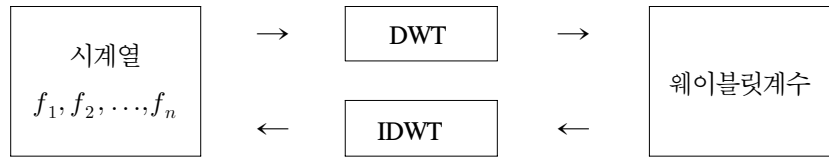
$$W_f(s,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt \dots\dots\dots (3)$$

식 (3)에서 원래 신호 $f(t)$ 의 연속 변환된 신호 W_f 는 이전요인(τ)과 척도조정요인(s)의 함수가 된다. 이러한 식의 의미는 원래 신호 $f(t)$ 를 웨이블릿 함수 $\psi_{s,\tau}(t)$ 에 대해 투영시

키는 것이므로 웨이블릿 계수 값은 τ 시점에서 신호 $f(t)$ 의 모양이 웨이블릿 함수와 유사한 경우 크게 나타나고, 모양이 다를 경우 작게 나타난다. 이와 같이 웨이블릿 함수를 분석하고자 하는 신호에 투영함으로써, 원래 신호 속에 존재하는 복잡한 구조를 단순화 시킬 수 있는데 이를 신호의 분해라 한다. 또한 다음 식과 같은 역 웨이블릿 변환을 통하여 원래의 신호를 복원할 수 있는데 이를 신호의 종합이라 한다.

$$f(t) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_f(s,\tau) \psi_{s,\tau}(t) d\tau ds \dots\dots\dots (4)$$

식 (3)은 결국 1차원 신호를 2차원적인 시간-척도의 결합표현으로 매핑하게 되어 데이터의 수를 크게 증가 시키게 된다. 즉, 연속 웨이블릿 변환에서는 모든 s 의 증분과 τ 의 증분에 대하여 웨이블릿 계수를 구하게 되나 현실적으로 s 와 τ 의 모든 증분자료에 대하여 분석을 수행할 필요는 없다. 이러한 자료 과잉 문제를 해결하기 위해서 제시된 것이 이산 웨이블릿 변환(Discrete Wavelet Transform : DWT) 이다. 이산 웨이블릿 변환은 연속적인 이전과 척도조정요인을 가지고 웨이블릿 계수를 계산하는 대신에 오직 이산적인 시간과 척도에서만 웨이블릿 계수를 계산하는 방법이다. 이를 위한 간단한 방법은 시간-척도 평면에서 이전과 척도조정요인을 샘플링하는 것이다. 비율을 균등하게 적용하여 샘플링하는 것이 직관적인 방법이지만 웨이블릿의 경우에는 척도조정요인이 샘플링 비율을 줄이는데 사용될 수 있다. 왜냐하면 큰 척도조정요인 값을 갖는 저 주파



<그림 2> 이산 웨이블릿 분석을 이용한 시계열 변환 및 복원

수(고 스케일)는 시계열 전체에서 나타나므로 샘플의 수가 많이 필요하지 않기 때문이다. 따라서 척도조정요인 값이 증가함에 따라 샘플 수가 줄어들게 된다. 이러한 방식을 사용하면 연속 웨이블릿 변환의 자료과잉 문제를 막고 관리가능한 점에서만 웨이블릿 계수를 계산할 수 있게 된다.

DWT를 이용하여 원 시계열을 분해하고 이를 역 이산 웨이블릿 변환(IDWT)를 통하여 원 시계열로 복원하는 과정은 <그림 2>와 같다.

<그림 2>에서 각 척도별로 DWT에 의해 얻어지는 웨이블릿 계수는 일종의 필터 역할을 한다. 웨이블릿에 의한 필터링은 시계열을 근사웨이블릿(A)과 상세웨이블릿(D)으로 분해하여 해석할 수 있도록 한다. 상세 웨이블릿(D)은 시계열의 고 주파수(저 스케일) 부분을 포착하기 위한 필터이고, 근사 웨이블릿(A)은 저 주파수(고 스케일)부분을 포착하기 위한 것이다.

2.2 경제 및 금융시장에 대한 기존 웨이블릿 연구

금융시장 연구에 인공지능(노태협·이택

호·한인구, 2005), 유전자 알고리즘(김현수, 1994; 조희연, 2003), 전문가 시스템(황화진·권효성, 1998), 사례기반추론(노태협·유명환·한인구, 2005) 등 다양한 정보기술들이 활용되어 왔다. 웨이블릿 기법역시 경제 및 금융시장 연구에 다양하게 사용되어 왔는데 대표적 연구들을 살펴보면 다음과 같다. Ramsey and Lampart(1988a, 1988b)는 웨이블릿 기법을 사용하여 고빈도, 저빈도 등 다양한 척도에서 경제 변수들 사이의 관계를 분석함으로써 기존에 밝혀 내지 못한 유의적 관계나 인과관계를 새로이 밝혀 낼 수 있었다. 그들의 연구 결과(1988a)에 따르면 소득과 소비의 관계는 척도 의존적이어서 낮은 척도에서는 양의 선형관계를 갖지만 척도가 높아짐에 따라 회귀계수가 0에 가까워짐을 보였다.¹⁾

그들(1988b)은 또한 경기순환이론을 웨이블릿 기법을 이용하여 분석하였는데 분석결과 경기순환이론도 척도 의존적이라는 것을 보였다. 주요 경기순환이론에는 통화론자와 실물적 경기변동이론이 있는데 통화론자들은 당국의 통화 공급량 변화가 경기변동을 유발한다고 주장하는 반면 실물적 경기변동이론에서는 실질 경제활동의 변화가 통화량의 변화를 유발

1) 프리드먼의 항상소득 가설에 따르면 가계의 소득은 일시적인 소득과 장기간 지속되는 항상소득으로 나눌 수 있는데 소비는 일시적인 소득보다는 항상소득에 따라 결정된다는 것이다. 그러나 Ramsey and Lampart는 소득을 일시소득과 항상소득으로 나누는 대신에 시간 척도로 나누어서 소비와의 관계성을 파악하였다.

한다는 역의 인과관계성을 주장한다. 웨이블릿 기법을 이용한 실증분석 결과 고빈도에서는 GDP가 통화량을 Granger Cause하는 반면 중간단계의 척도에서는 통화량이 GDP를 Granger Cause하는 것으로 나타났다. 즉, 고빈도에서는 실물적 경기변동이론의 관점이 지지되지만 저 빈도에서는 통화론자의 관점이 지지된다는 것이다.

Gencay 등(2001)은 웨이블릿을 이용하여 주식시장의 체계적 위험을 나타내는 베타가 척도에 따라서 다른 값을 갖는다는 것을 보임으로써 포트폴리오 구성이나 투자의사결정에 기존의 OLS에 의한 베타 값이 아니라 자신의 거래빈도에 따른 척도별 베타를 사용해야 한다고 주장하였다.²⁾ 그들은 6개의 개별 주식(코카콜라, GE, GM, IBM, P&G, Sears)에 대해 척도별로 베타 값을 구한 결과 각 척도에서 계산된 베타의 값이 모든 자료를 집계화한 일별 수익률에서 계산된 베타의 값과 상당히 다르다는 것을 보였다. 구체적으로 Sears주식을 제외한 나머지 5개 주식에서는 고빈도에서 높은 베타 값이 나타나고 저빈도로 갈수록 낮은 베타 값이 나타났다. 이것은 이들 5개 주식이 고빈도로 갈수록 위험이 커지기 때문에 단기 투자자가 장기 투자자에 비해 높은 위험에 처한다는 것을 의미한다. 그러나 Sears주식의 경우 4-8일의 시간척도를 제외하고는 척도가 증가함에 따라 베타 값이 커지기 때문에 Sears주식에 대한 장기 투자자는 특별히 유의해야 함을 나타낸다. Goffe(1994)은 비정상적인 시계열에서

웨이블릿을 이용한 필터링이 매우 유용한 방식임을 제기 하였고, Yamada(2005)는 일본 주식시장에서 베타의 척도의존성을 밝혔다. 조하현, 이승국(2004)도 한국 주식시장에서 베타의 척도의존성을 연구했는데 그들은 삼성전자, 포스코, SK텔레콤, 한전, 현대차 등 11개 종목에 대해 db(5)를 모 소파동함수로 선택하고 척도 수준을 6으로 해서 Gencay 등(2001)과 유사한 방법으로 분석하였다. 분석결과 국내 주식시장에서도 베타 값은 척도에 따라서 달라짐이 나타났으나 Gencay 등의 결과와 비교해 볼 때 척도의존성의 강도는 상당히 약하게 나타났다.

이궁희(1998)는 웨이블릿 기법과 ARIMA모형, 스펙트럴 분석 중 어느 것이 회사채 유통 수익률 예측에 효과적인가를 분석하였다. 그의 연구에 따르면 웨이블릿을 이용한 모형이 회사채 수익률 예측에 가장 높은 예측력을 나타내었다. 한편, 이한식(2001)은 웨이블릿을 이용하여 미국 주식시장과 국내 주식시장과의 연관성을 분석하였는데 분석결과, 미국 주식시장과 한국 주식시장의 연관성은 시간척도에 따라 다르게 나타난다는 사실을 보여 주었다. 김상배(2007)도 웨이블릿을 이용하여 국내 선물과 현물의 관계성을 분석하였는데 분석결과 척도가 증가함에 따라 두 시장사이의 상관관계가 증가함을 보여주었다. 즉, 단기간에는 선물과 현물 시장은 새로운 정보의 유입에 같은 방향으로 반응하는 정도가 낮으나 장기로 갈수록 두 시장이 같은 방향으로 반응하는 정도가 높아진다는 것을 의미한다.

2) CAPM 이론에 따르면 자산의 총 위험은 비체계적 위험과 체계적 위험으로 나눌 수 있는데 비체계적 위험은 자산고유의 위험으로 분산투자로 제거할 수 있는 위험이고 체계적 위험은 분산투자로 제거할 수 없는 위험을 나타내며 베타로 측정된다.

Ⅲ. 웨이블릿을 이용한 베타의 추정 및 최적 인덱스 펀드 구성

3.1 인덱스 펀드의 개념 및 구성방법

본 연구에서 다루는 문제는 크게 두 가지인데 첫 번째는 재무 분야의 인덱스 펀드 구성에 관한 문제이고 두 번째는 정보학 분야의 웨이블릿 기법 적용에 관한 문제이다. 이 두 문제에 대한 개별적인 연구는 상당히 많이 이루어져 왔으나 두 부분을 결합하여 문제를 해결하고자 하는 시도는 없었다. 따라서 본 연구에서는 두 분야의 연구를 결합함으로써 인덱스 펀드 구성에 대한 새로운 방법을 제시하고자 한다.

인덱스 펀드란 주식시장의 장기적 성장추세에 맞춰 펀드의 수익률을 주가지수 수익률 변동과 연동시킴으로써 주가지수 수익률만큼 펀드의 수익률을 실현시키고자 하는 소극적 펀드 구성 기법을 말한다. 인덱스 펀드의 목표가 되는 주요 국내 주가지수에는 거래소 시장의 KOSPI, KOSPI200, KRX100지수와 코스닥 시장의 KOSDAQ지수, KOSTAR지수 등이 있다. 인덱스 펀드를 주가지수와 동일한 종목과 비중으로 구성하면 인덱스 펀드는 주가지수와 완전히 똑같은 수익률을 갖게 되지만 주가지수는 수많은 종목으로 구성되어 있기 때문에 인덱스 펀드를 주가지수에 속한 모든 종목으로 구성하는 것은 현실적으로 가능하지 않을 수도 있고 비용측면에서도 비효율적이다. 따라서 인덱스 펀드 구성의 목표는 어떻게 하면 유동성이 큰 한정된 종목들로 선정된 주가지수와 동일한 성과를 내도록 포트폴리오를 구성하느냐 하는 것이다.

주가지수의 구성종목 중 일부를 선택하여 인덱스 펀드를 구성하는 부분 복제법은 크게 두 가지로 나눌 수 있는데, 첫 번째 방법은 휴리스틱 방법인 층화 추출법이고 두 번째 방법은 최적화 기법이다. 층화 추출법은 업종이나 규모, 가격 등의 차원에 따라 나눈 각 셀에 목표 주가지수에 속한 종목들을 소속시키고 각 소속 셀에서의 비중을 계산한 다음 이 비중을 이용하여 인덱스 펀드를 구성하는 방식이다. 이러한 층화 추출법은 구성과 운용이 쉽다는 장점은 있지만 구성된 인덱스 펀드가 최적 해라는 보장이 없다. 따라서 Rudd(1980), Roll(1992), Larsen & Resnick(1994) 등이 제시한 추적오차를 최소화하는 최적화 기법이 주로 사용된다. 최적화 모형의 제약조건으로는 다양한 조건들이 사용될 수 있으나 본 연구에서는 Rudd(1980) 등의 연구에서와 같이 목표 주가지수와 인덱스 펀드의 베타계수를 일치시키는 조건을 사용한다. 베타계수는 증권시장 전체의 움직임에 대한 개별 펀드의 동조화 정도를 나타내기 때문에 베타 계수가 같다는 것은 주가지수와 펀드가 같이 움직인다는 것을 의미한다. 즉, 베타계수는 증권시장 전체의 수익률 변동이 발생했을 때 이에 대해 개별주식 또는 펀드 수익률이 얼마나 민감하게 반응하는가를 측정하는 계수이다. 예를 들어, 증권시장 전체의 움직임을 나타내는 주가지수의 수익률이 1% 증가하거나 감소할 때에 어떤 주식 A의 수익률은 0.5% 증가하거나 감소한다면, 주식 A의 베타계수는 0.5가 된다. 이에 반해, 주식 B의 수익률은 2% 증가하거나 감소한다면 주식 B의 베타계수는 2가 된다. 개별 주식 혹은 펀드 i 의 베타계수는 다음 식 (5)과 같이 개별 주

식 혹은 펀드 i 와 시장 포트폴리오 M 의 공분산 σ_{iM} 을 시장 포트폴리오의 분산 σ_M^2 으로 나누어서 표준화한 값으로 정의된다.

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} = \frac{\rho_{iM}\sigma_i\sigma_M}{\sigma_M^2} \dots\dots\dots (5)$$

또한 베타계수는 식 (5)의 두 번째 공식과 같이 개별 주식 혹은 펀드 i 와 시장 포트폴리오 M 의 상관관계수 ρ_{iM} 에 의해 정의할 수도 있다. 상관관계수나 공분산은 두 포트폴리오가 얼마나 같이 움직이느냐를 측정하기 때문에 목표 주가지수와 인덱스 펀드의 베타 계수를 일치시키는 것은 목표 주가지수와 인덱스 펀드의 움직임을 같도록 만들어 주게 된다.

식 (5)를 통해 베타 값을 추정하고 사용할 때 해당 시계열이 동질적 주체에 의해서 발생된 시계열인 경우에는 문제가 없다. 그러나 주식 수익률 시계열의 경우는 일일거래자(day trader)로부터 3개월 이상의 거래주기를 갖는 장기투자자 등 다양한 주기를 갖는 투자자들이 모여서 형성된 시계열이다. 따라서 다양한 투자자의 거래행동의 집계자료인 주식 수익률 시계열은 여러 투자자의 특성이 혼재되어 뚜렷한 특성을 나타내지 못할 가능성이 크고 이로 인해 인덱스 펀드 구성 시 사용되는 베타의 유용성이 떨어질 수 있다. 본 연구에서는 위와 같은 문제를 해결하기 위해 투자 주기측면에서 이질적인 투자자들을 분해하고 분해된 개별 시계열에 대해서 규칙성을 찾고자 한다. 즉, 주식수익률 시계열을 시간 척도별로 분해하고 분해된 시계열 중 인덱스 펀드의 특성에 맞는 시계열을 선택하여 베타 값을 구한 후 인덱스

펀드의 베타 값과 목표 주가지수의 베타 값을 일치시킴으로써 두 포트폴리오의 움직임을 좀 더 동일하게 만들고자 한다.

3.2 웨이블릿을 이용한 척도별 베타의 추정 및 인덱스 펀드 구성

본 절에서는 과거 주식 시계열 자료를 사용하여 인덱스 펀드 구성에 있어 웨이블릿 기법이 어느 정도의 효과성을 가지고 있는지 검증한다. 목표가 되는 대상 주가지수로는 주식시장 전체를 나타내는 종합주가지수(KOSPI)를 선택하였고 이 목표 주가지수를 복제하기 위한 인덱스 펀드의 구성종목으로는 국내 주식 시장에 상장되어 있는 종목들 중에서 시가총액 비중 및 업종 등을 고려하여 삼성전자, 현대차, 포스코, 한전, 삼성물산, 신세계, SK텔레콤, 대한항공, 삼성증권, S오일 등 10개의 종목을 선정하였다. 또한 전체 표본기간은 1998년 8월 1일 부터 2008년 7월 31일까지의 10년간의 일별 주가지수로 관찰치수는 총 2482개였다. 이 전체 기간을 두 기간으로 나누어 첫 번째 기간은 베타를 추정하는 학습기간으로 사용하였고 두 번째 기간은 앞 기간에서 추정된 베타를 활용하여 모형의 유용성을 검증하는 검증기간으로 사용하였다. 또한 베타는 시간에 따라 불안정한 특성을 갖고 있기 때문에 본 연구에서는 64거래일(약 3개월)마다 포트폴리오를 재구성하여 모형의 유용성을 검증하였다. 예를 들어 첫 번째 포트폴리오 구성의 학습기간은 1998. 8. 1 ~ 2006. 6. 29일까지이고 검증기간은 2006. 6. 30 ~ 2006. 10. 4일까지의 64거래일이다. 두 번째 포트폴리오 구성기간은

1998. 10. 21 ~ 2006. 10. 4일까지이고 검증기간은 2006. 10. 5 ~ 2007. 1. 9일까지의 64거래일이다. 이와 같은 방식으로 하여 8번째 포트폴리오의 재구성에 대한 학습기간은 2000. 5. 1 ~ 2008. 4. 25일까지이고 검증기간은 2008. 4. 26 ~ 2008. 7. 31일까지의 64거래일이다.

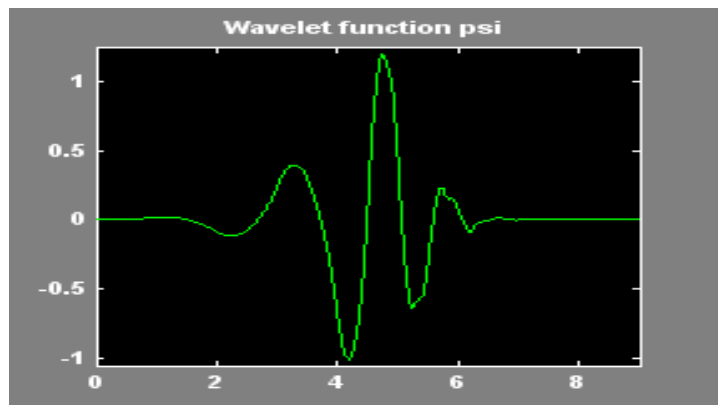
본 절에서는 우선 학습기간의 자료에 대해 웨이블릿과 기존의 기간별 방식을 이용하여 베타 값을 어떻게 추정할 것인가 설명하고 다음으로는 추정된 베타 값들을 이용하여 인덱스 펀드를 위한 최적 모형을 구축한 후 검증기간동안에 두 모형의 성과를 비교 한다.

3.2.1 웨이블릿을 이용한 척도별 베타 값의 추정

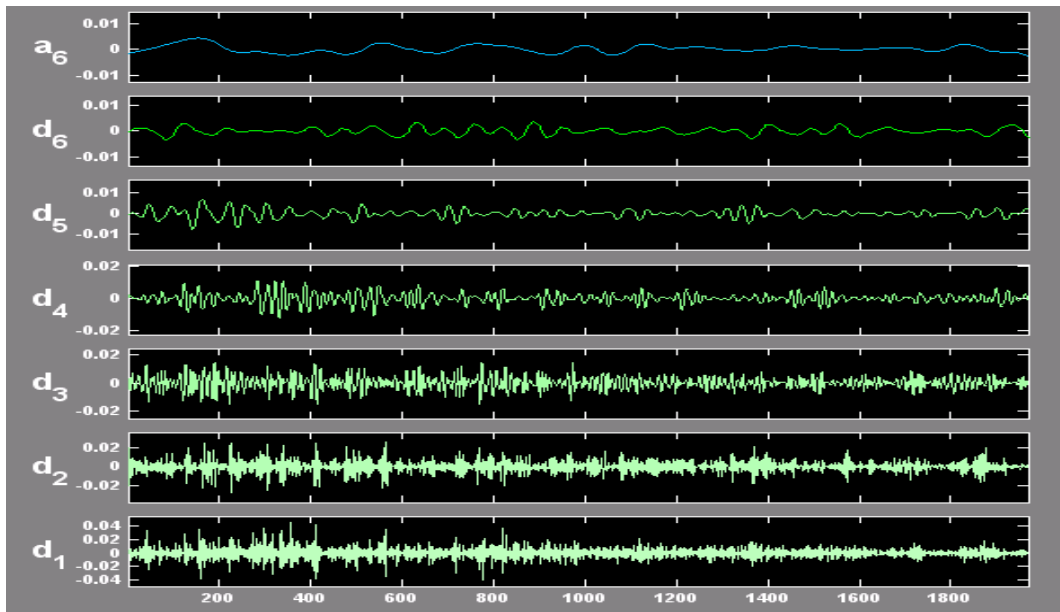
특정 시계열에 웨이블릿 분해를 적용하기 위해서는 적절한 모 웨이블릿을 선택해야 한다. 대표적 모 웨이블릿으로는 Haar가 제시한 단계함수(step function)에 바탕을 둔 웨이블릿, Daubechies가 제시한 웨이블릿, Chui와 Wang이 제시한 스플라인(spline)함수에 바탕을 둔 웨이블릿 등이 있다.

모 웨이블릿 함수의 선택에 대한 일반적인 기준이 존재하지 않으므로 본 실증분석에서는 기존 주식수익률 시계열에 대한 실증분석 시 많이 사용된 Daubechies 함수를 모 웨이블릿 함수로 선택하였다.

Daubechies의 모 웨이블릿 함수에는 10가지 종류가 있는데 본 연구에서는 이중에서 db(5)를 사용하였다. db(5)를 선택한 이유는 <그림 3>에서 볼 수 있듯이 함수의 형태가 주가 수익률 자료의 특성인 비대칭성과 헤드 앤드 숄더(Head & Shoulder)모양 등을 적절하게 표현할 수 있다고 판단되기 때문이다. Gencay 등(2001)과 조하현, 이승국(2004)도 주식수익률 시계열 분석에 모 웨이블릿 함수로 Daubechies함수 중 db(5)를 사용하였다. 모 웨이블릿 함수를 선택한 후에 결정해야 할 모수는 수익률 시계열을 어느 수준까지 분해할 것인가를 나타내는 척도 분해수준이다. Gencay 등(2001)은 7단계로 설정했지만 조하현, 이승국(2004)의 연구에 따르면 국내 주식시장의 시계열에는 6단계가 보다 적절한 수준으로 나타났다. 따라서 본 연구에서도 척도 분해수준을



<그림 3> Daubechies의 db(5) 웨이블릿 함수



<그림 4> 삼성전자 수익률에 대한 웨이블릿 분해

6단계로 설정하였다.³⁾

<그림 4>는 웨이블릿 모함수를 Daubechies의 db(5)로 하고 척도분해수준을 6단계로 설정해서 삼성전자의 주식 수익률을 분해한 결과이다. 첫 번째 그림은 근사 웨이블릿(A)으로 수익률 변동에 대해 상대적으로 평탄한 형태

를 보여 주고 있으며, 두 번째부터는 고 빈도 특성을 나타내는 상세 웨이블릿(d6 - d1)의 그래프이다. d1은 가장 낮은 척도의 웨이블릿 필터로 2-4일의 주기를 갖는 진동을 파악하기 위한 것이고 d6은 가장 높은 척도의 웨이블릿 필터로 64-128일의 주기를 갖는 진동을 파악하

<표 1> 웨이블릿 분해를 이용한 베타 추정치

척도	포스코	삼성전자	현대차	한전	삼성물산
d1(2-4일)	0.85311	1.30236	1.06076	0.84049	1.24649
d2(4-8일)	0.77919	1.28119	1.05997	0.79957	1.14762
d3(8-16일)	0.74518	1.25594	1.30295	0.57611	1.17923
d4(16-32일)	0.72954	1.01491	1.10680	0.51375	1.52610
d5(32-64일)	1.01326	1.12664	1.03798	0.81154	1.36167
d6(64-128일)	0.86846	0.88139	1.06757	0.53157	1.48744
평균	0.83146	1.14374	1.10600	0.67884	1.32476
분산	0.01109	0.02847	0.00981	0.02356	0.02541

3) 본 연구는 MATLAB6.5를 이용해 주가시계열에 대한 웨이블릿 분석을 실시하였다.

척도	신세계	SK텔레콤	대한항공	삼성증권	S오일
d1(2-4일)	0.83935	1.07153	1.13193	1.28804	0.62162
d2(4-8일)	0.82164	1.06084	1.09319	1.26672	0.56543
d3(8-16일)	0.81266	1.04998	1.17121	1.54092	0.58550
d4(16-32일)	1.04116	0.76019	1.38007	1.53973	0.45024
d5(32-64일)	1.06113	0.70683	1.48459	1.45354	0.62484
d6(64-128일)	0.96380	0.80786	1.33613	1.59352	0.67647
평균	0.92329	0.90954	1.26619	1.44708	0.58735
분산	0.01283	0.02852	0.02451	0.01934	0.00596

기 위한 것이다.

2일부터 128일에 해당되는 6가지 시간척도에 대해 주가지수와 개별종목들의 수익률을 분해한 후 식 (5)를 이용하여 각 척도별로 추정된 베타가 <표 1>에 나타나 있다.

<표 1>을 볼 때 시장 주도주 중 삼성전자, 현대차, 삼성물산, 대한항공, 삼성증권 등은 베타의 평균값이 1보다 크기 때문에 종합 주가지수보다 위험성이 크다는 것을 알 수 있고 나머지 종목들의 경우는 베타의 평균값이 1보다 작아 종합 주가지수보다 낮은 위험을 나타내고 있다. 또한 전체적으로 베타 값은 척도에 의존하나 일정한 방향으로 증가 하거나 감소하는 특성은 나타나고 있지 않다. 다만, 삼성전자, 한전의 경우 대체적으로 척도 수준이 높아질수록 베타 값이 감소하는 특성을 나타내고 있는데 이러한 특성은 이들 종목의 경우 거래빈도가 높은 단기 투자자들이 거래빈도가 낮은 장기 투자자들에 비해 상대적으로 높은 위험에 처한다는 것을 나타낸다. 이에 반해 대한항공, 삼성증권 등의 경우는 대체적으로 척도 수준이 높아질수록(저 빈도일수록) 베타 값이 증가함을 알 수 있다. 이는 이들 종목의 경우 거래빈도가 높은 단기 투자자들에 비해 상대

적으로 거래빈도가 낮은 장기 투자자들에게 체계적 위험이 높음을 보여주는 것이다.

이와 같이 베타 값은 종목에 따라 다를 뿐만 아니라 척도별로도 변화함을 볼 수 있는데 이는 베타를 투자지표로 사용하는 경우 일별자료에 따른 일반적 베타 추정치가 아니라 자신들의 거래 빈도에 해당하는 베타 값을 사용하여 한다는 것을 의미한다. 기존에는 일일투자가나 장기투자자인 연기금이 개별종목에 대해 같은 위험으로 평가하였으나 웨이블릿 기법을 사용하면 그들 거래주기에 따른 다른 베타 값을 산출할 수 있기 때문에 각 투자자의 특성에 맞는 종목을 선택할 수 있다.

3.2.2 기존 방법을 이용한 기간별 베타 값의 추정

3.1.1의 웨이블릿을 이용한 척도별 베타 값의 추정에 4, 8, 16, 32, 64, 128일의 시간 간격을 사용했기 때문에 기존방법을 이용한 베타 값의 추정에서도 이와 동일한 시간 간격을 사용한다. 본 연구에서는 로그 수익률을 사용하였기 때문에 주간 수익률은 그 주간 일별수익률을 합하면 계산되는 수익률의 가산성이 성립한다.

<표 2> 기간별 분해를 이용한 베타 추정치

시간간격	포스코	삼성전자	현대차	한전	삼성물산
4일	0.77142	1.17638	1.13756	0.57945	1.32305
8일	0.81244	1.11257	1.10668	0.58279	1.30768
16일	0.76925	1.10770	1.10976	0.60336	1.38911
32일	0.86398	1.05735	1.15163	0.61745	1.63247
64일	1.12711	1.00794	1.38246	0.40612	1.58033
128일	0.94275	0.95943	0.90852	0.68939	1.59721
평균	0.88116	1.07023	1.13277	0.57976	1.47164
분산	0.01877	0.00616	0.02285	0.00883	0.02184

시간간격	신세계	SK텔레콤	대한항공	삼성증권	S오일
4일	0.94590	0.93472	1.31422	1.49279	0.60233
8일	0.98772	0.87648	1.34729	1.51565	0.55919
16일	0.84859	0.84462	1.32885	1.50141	0.48186
32일	1.04173	0.86438	1.37246	1.49267	0.40434
64일	1.24298	0.67855	1.38601	1.72720	0.21301
128일	1.21925	0.78555	1.52814	1.66599	0.70257
평균	1.04770	0.83071	1.37950	1.56595	0.49388
분산	0.02424	0.00789	0.00601	0.01069	0.02933

예를 들어 4일 간격의 수익률을 계산하기 위해서는 4일간의 일별수익률을 합하여 계산하면 된다. 이와 같은 방식으로 나머지 기간에 대해서도 수익률을 계산한 후 식 (5)를 이용하여 베타 값을 계산하였는데 이에 대한 결과가 <표 2>에 나타나 있다.

웨이블릿을 이용하여 주식 수익률 시계열을 직교적으로 분해한 <표 1>과 단순히 기간에 따라서 분해한 <표 2>를 비교해 보면 다음과 같은 점을 발견할 수 있다. 첫째, 평균 베타 값을 볼 때 웨이블릿을 이용해 분해한 경우 10개

사의 평균 베타 값은 1.022로 단순 기간에 따라 분해한 경우의 평균 베타 값 1.045와 유사한 값을 나타내고 있어 웨이블릿에 의한 분해가 평균 베타 값을 증가시키거나 감소시킨다고 볼 수는 없다. 둘째, 베타 값의 분산 측면에서 볼 때는 웨이블릿을 이용해 분해한 경우 10개사의 베타 값에 대한 분산의 평균은 1.90%로 단순 기간에 따라 분해했을 때 베타 값에 대한 분산의 평균 1.57%보다 훨씬 크게 나타남을 볼 수 있다. 이는 기간별 분해 방식이 주식 시계열을 분해할 때 직교적으로 분해하지

않아 각 기간별 시계열에 여러 주기의 특성이 혼재 되어 나타나게 되고 이는 각 주기의 특성을 상쇄시켜 버리기 때문에 생각된다.

3.2.3 두 방법을 비교하기 위한 인덱스 펀드 모형의 구성

인덱스 펀드의 성과는 목표지수를 얼마나 잘 복제하느냐에 달려있다. 앞서도 언급했듯이 베타 값은 두 포트폴리오의 상관관계, 즉 같이 움직이는 정도를 측정하기 때문에 인덱스 펀드의 베타 값과 목표지수의 베타 값을 일

치시키는 다수의 모형들이 제시되었다. 본 연구에서는 이들 모형 중에서 Rudd(1980)가 제시한 최적화 기법인 이차계획법(Quadratic Programming)을 사용한다. 본 모형은 학습기간 동안에 인덱스 펀드의 베타 값과 목표지수의 베타 값을 일치시키는 제약조건하에서 추적오차를 최소화시키는 각 종목별 비중(x_i)을 구하는 모형이다. t 시점의 인덱스 펀드 수익률은 $\sum_{i=1}^{10} r_{i,t} x_i$ 이므로 학습기간 동안의 추적오차는 다음과 같이 정의 된다.

$$\text{추적오차}(TE) = \sum_{t=1}^T \left(\sum_{i=1}^{10} r_{i,t} x_i - R_t \right)^2 \dots\dots\dots (6)$$

- x_i = 인덱스 펀드의 i 주식비중,
- $r_{i,t}$ = i 주식의 t 시점에서의 수익률,
- R_t = t 시점의 목표지수의 수익률,
- T = 학습기간 동안의 자료수.

식 (6)을 이차계획법의 목적함수 형태로 바꾸면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} TE &= \sum_{t=1}^T \left(\sum_{i=1}^{10} r_{i,t} x_i - R_t \right)^2 \dots\dots\dots (7) \\ &= \sum_{t=1}^T \left(\sum_{i=1}^{10} r_{i,t}^2 x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=i+1}^{10} r_{i,t} r_{j,t} x_i x_j - 2 R_t \sum_{i=1}^{10} r_{i,t} x_i + R_t^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{10} \left(\sum_{t=1}^T r_{i,t}^2 \right) x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=i+1}^{10} \left(\sum_{t=1}^T r_{i,t} r_{j,t} \right) x_i x_j - 2 \sum_{i=1}^{10} \left(\sum_{t=1}^T R_t r_{i,t} \right) x_i + \sum_{t=1}^T R_t^2 \end{aligned}$$

본 모형의 제약조건은 인덱스 펀드의 베타 값과 목표지수의 베타 값을 일치시키는 것인데 베타 값은 척도별로 여러 개가 산출됨을 앞에서 보았다. 여러 척도의 베타 값 중에서

어느 베타 값을 사용할 것인가는 거래주기를 나타내는 포트폴리오의 재구성 문제와 관련 된다 볼 수 있다. 웨이블릿 기법의 장점은 투자자의 거래주기에 맞는 베타 값을 산출하고

이를 이용하여 각 투자자의 특성에 적합한 종목
 목을 선택할 수 있는데 있기 때문이다. Rudd의
 경우는 3개월마다 포트폴리오를 재구성하였는
 데 본 연구에서도 64거래일(약 3개월)마다 포
 트폴리오를 재구성하는 것으로 가정하였다. 따

라서 제약조건에서 사용하는 베타 값은 64일
 의 주기를 나타내는 척도 5의 베타 값이 된다.
 위에서 유도한 목적 식과 제약조건을 정리하
 면 식 (8)과 같은 이차 계획법이 된다.

$$Min Z = \sum_{i=1}^{10} \left(\sum_{t=1}^T r_{i,t}^2 \right) x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=i+1}^{10} \left(\sum_{t=1}^T r_{i,t} r_{j,t} \right) x_i x_j - 2 \sum_{i=1}^{10} \left(\sum_{t=1}^T R_t r_{i,t} \right) x_i$$

s.t

$$\sum_{i=1}^{10} \beta_{i5} x_i = \beta_{M5} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, (i = 1, 2, \dots, 10)$$

단, β_{i5} 는 i 번째 종목의 5번째 척도수준하에서의 베타 값,
 β_{M5} 는 목표 주가지수의 5번째 척도수준하에서의 베타 값.

위의 웨이블릿을 이용한 분해 모형에 비교
 대상이 되는 단순분해 모형도 식 (8)과 같으나
 베타 값을 계산할 때 3.2.2에서와 같이 단순분
 해방식을 사용하여 주기가 64일인 베타 값을
 계산한다.

3.2.4 모형의 검증

웨이블릿을 이용한 모형의 유용성을 검증하
 기 위하여 다음과 같은 세 과정을 거친다. 첫
 째는 베타 값의 추정단계로 본 연구는 총 8번
 의 포트폴리오 재구성을 하기 때문에 8개의 학
 습기간과 8개의 검증기간이 발생한다. 8개의
 학습기간에 대해 웨이블릿과 일반 기간분해방
 식을 이용해 64거래일의 주기별 시계열을 분
 해하고 회귀분석을 이용해 이에 대한 베타 값

을 추정한다. 둘째는 첫 번째 단계에서 추정된
 베타 값과 최적모형인 식 (8)을 이용하여 학습
 기간 동안에 추적오차를 최소화 시키는 포트
 폴리오의 종목비중을 계산한다. 셋째는 두 번
 째 단계에서 계산된 포트폴리오의 최적비중을
 이용하여 8개의 검증기간에 대해 두 모형의 성
 과를 비교한다.

(1) 베타 값의 추정

64거래일 주기의 베타 값을 추정하기 위하
 여 웨이블릿을 이용하여 척도별로 분해하고
 그중에서 척도 5의 시계열을 구했는데 베타 값
 을 계산하기 전에 우선 분해된 척도 5의 시계
 열이 안정적인지를 판단할 필요가 있다.

<표 3> 척도 5의 시계열에 대한 ADF 단위근 검정

재구성회차	포스코	삼성전자	현대차	한전	삼성물산
1번째	-4.207*	-4.353*	-4.600*	-3.404*	-4.695*
2번째	-4.304*	-4.446*	-4.446*	-3.883*	-5.305*
3번째	-4.928*	-4.411*	-4.014*	-4.923*	-6.227*
4번째	-4.986*	-4.268*	-4.381*	-3.783*	-6.513*
5번째	-5.099*	-4.235*	-4.234*	-3.889*	-5.727*
6번째	-4.516*	-4.698*	-4.070*	-3.517*	-5.010*
7번째	-5.314*	-4.622*	-4.121*	-3.349*	-4.315*
8번째	-5.385*	-4.319*	-4.341*	-3.373*	-5.248*

재구성회차	신세계	SK텔레콤	대한항공	삼성증권	S오일	KOSPI지수
1번째	-3.871*	-3.240*	-3.517*	-4.496*	-4.230*	-4.000*
2번째	-3.923*	-3.438*	-3.685*	-4.905*	-4.260*	-4.445*
3번째	-3.958*	-3.560*	-3.964*	-4.540*	-4.784*	-5.057*
4번째	-4.091*	-4.039*	-3.692*	-4.782*	-4.277*	-4.477*
5번째	-3.827*	-3.395*	-4.061*	-4.732*	-4.202*	-4.551*
6번째	-3.579*	-3.532*	-3.565*	-4.790*	-4.137*	-4.306*
7번째	-3.477*	-3.110*	-3.281*	-4.912*	-4.282*	-4.565*
8번째	-4.120*	-2.925*	-3.761*	-5.255*	-4.884*	-5.640*

주: *는 5%유의수준 하에서 유의함

분해된 시계열자료가 불안정적인 경우 시계열자료를 이용한 회귀분석은 허구적 회귀(spurious regression) 현상을 초래할 수 있기 때문이다. 이를 검토하기 위한 ADF (Augmented Dickey-Fuller) 단위근 검정결과가 <표 3>에 나타나 있다. <표 3>을 보면 모든 종목에서 웨이

블릿 계수가 5% 유의수준 하에서 안정적인 것으로 나타났다.

분해된 시계열이 안정적인 것을 확인했기 때문에 이에 대해 회귀분석을 이용하여 각 재구성 회차별, 종목별 베타 값을 구하면 <표 4>와 같다.

<표 4> 웨이블릿 분해에 따른 베타계수

재구성회차	포스코	삼성전자	현대차	한전	삼성물산
1번째	1.013(9.55*)	1.127(10.61*)	1.038(7.14*)	0.812(8.60*)	1.362(12.17*)
2번째	1.06(10.18*)	1.144(10.95)	1.144(10.95*)	0.828(8.54*)	1.364(12.36*)
3번째	1.03(9.54*)	1.167(11.48*)	1.044(6.84*)	0.902(8.53*)	1.351(11.24*)
4번째	1.037(9.01*)	1.141(10.5*)	1.072(7.84*)	0.783(7.60*)	1.515(10.86*)
5번째	1.236(7.45*)	1.249(10.87*)	1.142(7.99*)	0.765(6.60*)	1.585(8.61*)
6번째	1.085(8.72*)	0.764(5.45*)	0.903(6.13*)	0.639(6.17*)	1.564(9.49*)
7번째	0.838(6.43*)	0.939(7.79*)	0.973(5.42*)	0.609(5.98*)	1.462(9.89*)
8번째	0.957(8.18*)	0.864(5.52*)	0.780(5.10*)	0.535(4.65*)	1.327(9.36*)
평균	1.032158	1.049299	1.012118	0.733951	1.441353
분산	0.012683	0.029276	0.01523	0.015845	0.010729
재구성회차	신세계	SK텔레콤	대한항공	삼성증권	S오일
1번째	1.061(6.14*)	0.707(5.02*)	1.485(6.80*)	1.454(11.13*)	0.625(3.38*)
2번째	0.993(5.88*)	0.669(4.87*)	1.532(6.84*)	1.482(11.12*)	0.773(4.29*)
3번째	0.929(5.26*)	0.593(4.36*)	1.509(6.39*)	1.350(10.20*)	0.793(4.28*)
4번째	0.835(4.40*)	0.622(4.10*)	1.497(5.98*)	1.537(11.57*)	0.710(3.71*)
5번째	0.943(5.73*)	0.621(4.00*)	1.077(4.15*)	1.453(10.67*)	0.723(3.60*)
6번째	0.798(5.22*)	0.720(4.80*)	1.268(5.16*)	1.528(11.71*)	0.754(3.96*)
7번째	0.833(5.14*)	0.389(2.30*)	1.49(6.46*)	1.718(10.18*)	0.712(3.30*)
8번째	0.818(5.12*)	0.654(4.18*)	1.343(6.95*)	1.478(11.48*)	0.804(4.08*)
평균	0.901201	0.621785	1.399993	1.500079	0.736654
분산	0.009015	0.010717	0.025511	0.011079	0.003344

주: 괄호 안은 t 통계량임, *는 5%유의수준 하에서 유의함

<표 4>를 보면 각 종목의 베타 값은 재구성 회차별로 변화함을 볼 수 있다. 따라서 <표 1>에서 보았듯이 베타 값은 한 시점에서 척도별로 변화할 뿐만 아니라 시간에 따라서도 변화한다는 것을 알 수 있다. 베타가 시간 의존적으로 나타나는 이유는 기본적으로 해당기업의 주가가 전체 주식시장에서 차지하는 비중과 기업의 재무상태, 영업성과 등이 시간에 걸쳐 상이하기 때문으로 보여지며 이런 이유로 베타

값이 시간에 따라 불안정해 질 수 있다(조하현, 이승국, 2004). 기존의 연구에서도 CAPM의 베타 값이 시간 의존성을 가진다는 사실은 많이 알려져 있고 이러한 사실은 본 연구에서도 나타나고 있다.

또한 일반 기간 분해방식을 이용해 주식수익률 자료를 64거래일의 주기별 시계열로 분해하고 회귀분석을 이용해 각 재구성 회차별 베타 값을 구한 결과가 <표 5>에 나타나 있다.

<표 5> 단순 기간 분해에 따른 베타계수

재구성회차	포스코	삼성전자	현대차	한전	삼성물산
1번째	0.888(5.70*)	1.104(6.97*)	0.991(4.77*)	0.487(3.93*)	1.503(9.41*)
2번째	0.897(5.80*)	1.111(7.09*)	1.111(7.09*)	0.483(4.29*)	1.526(10.62*)
3번째	1.115(7.33*)	1.128(6.36*)	1.161(5.28*)	0.46(3.64*)	1.428(9.09*)
4번째	1.07(6.70*)	1.174(6.50*)	1.249(5.70*)	0.431(3.14*)	1.408(8.77*)
5번째	1.00(6.22*)	1.052(5.59*)	1.201(5.07*)	0.355(2.45*)	1.295(8.65*)
6번째	1.052(6.52*)	1.086(5.87*)	1.159(4.88*)	0.309(2.16*)	1.348(8.58*)
7번째	1.076(6.94*)	1.039(6.05*)	1.193(5.66*)	0.312(2.18*)	1.391(9.23*)
8번째	0.982(6.60*)	1.097(6.64*)	1.046(4.90*)	0.342(2.35*)	1.400(9.07*)
평균	1.009881	1.098846	1.138714	0.397442	1.412399
분산	0.007039	0.001812	0.007295	0.005791	0.005669

재구성회차	신세계	SK텔레콤	대한항공	삼성증권	S오일
1번째	1.171(6.87*)	0.824(3.11*)	1.496(5.22*)	1.833(7.43*)	0.420(1.82)
2번째	1.157(6.83*)	0.819(3.12*)	1.532(5.57*)	1.833(7.53*)	0.427(1.87)
3번째	1.009(5.56*)	0.974(3.37*)	1.434(4.67*)	1.525(6.23*)	0.420(1.62)
4번째	1.002(5.38*)	0.889(3.08*)	1.463(4.64*)	1.526(6.04*)	0.362(1.38)
5번째	0.874(4.81*)	0.829(2.75*)	1.351(4.22*)	1.459(5.62*)	0.302(1.12)
6번째	0.743(3.82*)	0.808(2.63*)	1.272(4.06*)	1.358(5.58*)	0.209(0.78)
7번째	0.789(4.35*)	0.708(4.28*)	1.358(5.56*)	1.400(5.88*)	0.264(1.13)
8번째	0.800(4.26*)	0.725(4.28*)	1.532(7.07*)	1.348(5.68*)	0.429(1.80)
평균	0.943168	0.821956	1.429969	1.53517	0.354096
분산	0.027804	0.007159	0.008979	0.038285	0.007354

주: 괄호 안은 t 통계량임, *는 5%유의수준 하에서 유의함

<표 4>와 <표 5>를 비교해 보면 시간변화에 따른 두 분해방법의 차이를 파악할 수 있다. 첫째, 평균 베타 값을 볼 때 웨이블릿을 이용해 분해한 경우 10개사의 평균 베타 값은 1.043으로 단순 기간에 따라 분해한 경우의 평

균 베타 값 1.014와 유사한 값을 나타내고 있다. 둘째, 베타 값의 분산 측면에서 볼 때는 웨이블릿을 이용해 분해한 경우 10개사의 베타 값에 대한 분산의 평균은 1.43%로 단순 기간에 따라 분해했을 때 베타 값에 대한 분산의

평균 1.17%보다 크게 나타남을 볼 수 있다. 이는 웨이블릿에 의한 분해가 특정 주기의 특성을 좀 더 뚜렷하게 나타나도록 하기 때문에 베타 값의 분산이 커진 것으로 생각된다. 이러한 특성은 베타 값의 t값으로도 파악할 수 있는데 웨이블릿을 이용해 분해한 경우 베타 계수의 t값 평균은 7.30으로 단순 기간에 따라 분해했을 때 베타 계수의 t값 평균인 5.18보다 훨씬 크게 나타난다. 이는 웨이블릿을 이용해 시계열을 분해하면 단순 기간에 따라 분해하는 것보다 베타 계수의 유의성을 크게 증가시킬 수 있다는 것을 의미한다.

(2) 최적 포트폴리오 구성

두 번째 단계에서는 각 재구성 회차별로 (1) 단계에서 추정된 종목들의 베타 값과 최적모형인 식 (8)을 이용하여 학습기간 동안 추적오차를 최소화 시키는 포트폴리오의 종목비중을 계산한다.⁴⁾

이때 베타 값의 사용은 통계적으로 유의한 값을 갖는 베타 값만을 사용하였다. 웨이블릿에 의해 계산된 베타 값인 <표 4>와 기간별 자료에 의해 계산된 베타 값인 <표 5>를 이용해 식 (8)에 대한 최적 해를 구한 결과가 <표 6>과 <표 7>에 나타나 있다.

<표 6> 웨이블릿 분해에 따른 인덱스 펀드 최적비중

재구성 회차	포스코	삼성 전자	현대차	한전	삼성 물산	신세계	SK 텔레콤	대한 항공	삼성 증권	S오일
1번째	0.334	0.000	0.000	0.202	0.031	0.175	0.000	0.126	0.000	0.132
2번째	0.342	0.000	0.000	0.241	0.002	0.114	0.000	0.115	0.003	0.183
3번째	0.257	0.000	0.000	0.339	0.009	0.076	0.000	0.131	0.000	0.188
4번째	0.274	0.000	0.000	0.291	0.103	0.035	0.000	0.096	0.019	0.181
5번째	0.364	0.000	0.000	0.271	0.068	0.092	0.000	0.000	0.000	0.205
6번째	0.291	0.000	0.000	0.215	0.175	0.026	0.000	0.021	0.027	0.246
7번째	0.096	0.000	0.000	0.262	0.059	0.064	0.000	0.125	0.153	0.242
8번째	0.250	0.000	0.000	0.110	0.077	0.058	0.000	0.139	0.105	0.262

<표 6>과 <표 7>을 비교해 보면 웨이블릿 분해에 따른 인덱스 펀드의 최적 해는 기존의 기간별 분해 방법에 바탕을 둔 인덱스 펀드의 최적해와 다른 값을 갖는다는 것을 볼 수 있다.

두 분해방법은 투자 종목에 있어서는 신세계나 S오일 외에 큰 차이가 없으나 종목의 투자 비중에서는 상당한 차이를 보이고 있다.⁵⁾ 따라서 검증기간에 두 가지 방법에 의한 최적

4) 식 (8)의 이차계획법에 대한 최적 해는 MATLAB6.5의 Optimization Toolbox중 이차계획법을 푸는 함수인 quadprog함수를 이용해 구하였다.
 5) <표 6>과 <표 7>을 볼 때 시장 주도주인 삼성전자나 현대차의 비중이 상당히 낮게 나타나 현실성이 떨어지는 문제점이 있다. 따라서 인덱스 펀드의 최적 비중을 구하는 식 (6)에 유통성에 대한 제약조건을 추가 시키면 본 모형의 현실성을 제고시킬 수 있을 것으로 기대된다.

<표 7> 단순 기간 분해에 따른 인덱스 펀드 최적비중

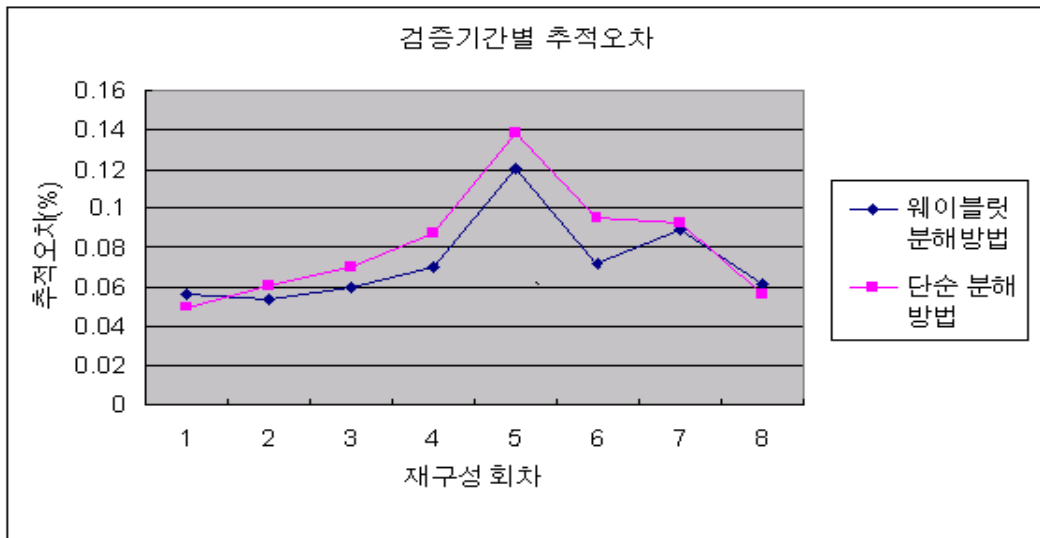
재구성 회차	포스코	삼성 전자	현대차	한전	삼성 물산	신세계	SK 텔레콤	대한 항공	삼성 증권	S오일
1번째	0.357	0.000	0.000	0.196	0.031	0.258	0.033	0.052	0.073	0.000
2번째	0.347	0.000	0.000	0.220	0.033	0.247	0.021	0.047	0.087	0.000
3번째	0.463	0.000	0.000	0.179	0.031	0.202	0.059	0.060	0.008	0.000
4번째	0.424	0.000	0.025	0.173	0.041	0.201	0.032	0.093	0.011	0.000
5번째	0.424	0.000	0.072	0.066	0.023	0.180	0.082	0.112	0.041	0.000
6번째	0.426	0.000	0.109	0.074	0.095	0.108	0.095	0.092	0.000	0.000
7번째	0.427	0.000	0.118	0.134	0.074	0.113	0.026	0.109	0.000	0.000
8번째	0.324	0.000	0.062	0.134	0.085	0.115	0.085	0.196	0.000	0.000

해들로 인덱스 펀드를 구성했을 때 그 성과차이가 발생할 것이라는 것을 예상할 수 있다.

(3) 성과비교

세 번째 단계에서는 (2) 단계에서 구한 두 가지 분해방법의 최적 해를 이용해서 검증기간에 두 개의 인덱스 펀드를 구성하고 그 성과

를 비교한다. 우선 두 대안의 성과를 비교하기 위한 척도를 정의해야 하는데 인덱스 펀드의 성과는 목표지수와의 차이가 얼마나 발생하는냐로 측정되기 때문에 식 (6)에서 정의한 추적오차를 검증기간동안 계산하여 사용한다. 8번의 검증기간동안 두 분해방법에 따른 추적오차를 계산한 결과가 <그림 5>에 나타나 있다.



<그림 5> 검증기간동안의 재구성 회차별 추적오차

<그림 5>를 보면 1회차와 8회차를 제외한 나머지 6개 회차에서 웨이블릿에 의한 분해방법이 단순 분해방법보다 적은 추적오차를 나타내고 있다. 8개 검증기간의 추적오차를 모두 합한 총 추적오차를 구해보아도 웨이블릿에 의한 분해방법은 0.5832%로 단순 분해방법의 0.6504% 보다 약 10퍼센트 정도 낮은 값을 나타낸다. 이는 웨이블릿을 이용하여 수익률을 직교적으로 분해한 후 베타를 구하면 각 주기별 수익률이 갖는 특성을 좀 더 정확하게 추출해 낼 수 있으며 인덱스 펀드 구성에 있어 웨이블릿에 의한 분해가 효과적으로 사용될 수 있음을 의미한다.

IV. 결론

웨이블릿 기법의 중요한 특성은 시계열을 시간 척도에 대하여 직교적으로 분해할 수 있다는 것이다. 주식시장의 경우 여러 시장참가자들이 존재하는데 이들은 투자주기 측면에서 매일 거래를 수행하는 일일 거래자로부터 연단위로 거래를 하는 장기투자가 까지 다양하다. 따라서 웨이블릿 분석을 이용하여 주식 수익률의 시계열을 거래 빈도에 있어 이질적인 투자자 집단별로 분해하여 분석하면 주식 수익률의 동태적 특성에 대한 이해를 높일 수 있을 것으로 기대된다.

본 연구에서는 웨이블릿 기법의 이러한 특성을 이용해 효과적인 인덱스 펀드 구성방법에 대해 다루었다. 인덱스 펀드는 적은 수의 종목으로 특정 목표지수를 효과적으로 복제해야 하므로 인덱스 펀드는 목표지수와 유사한

동태적 특성을 갖고 있어야 한다. 이를 위하여 본 연구에서는 인덱스 펀드와 목표지수의 과거 수익률 시계열을 웨이블릿을 이용하여 분해하고 분해된 자료로부터 필요한 거래주기의 베타 값을 구한 다음 인덱스 펀드와 목표지수의 베타 값을 일치시킴으로서 인덱스 펀드의 성과를 높이고자 하였다.

본 연구에서 제시된 웨이블릿 모형의 효과성을 검증하기 위하여 지난 10년간의 종합주가지수와 주요 종목 주가자료를 활용한 실증 분석을 실행한 결과 다음과 같은 결과들을 확인할 수 있었다.

첫째, 주식수익률의 체계적 위험을 나타내는 베타는 척도에 따라 상당히 다른 값을 가지는 것으로 나타났다. 기존에는 위험을 나타내는 척도로 하나의 베타만을 사용하였는데 웨이블릿을 이용하여 시계열을 척도별로 나누고 이에 따른 다양한 베타를 구하면 투자가는 자신들의 거래 빈도에 해당하는 베타 값을 사용할 수 있게 된다. 즉, 기존에는 일일투자거나 장기투자자인 연기금이 개별종목에 대해 같은 위험으로 평가하였으나 웨이블릿 기법을 사용하면 그들 거래주기에 따른 베타 값을 산출할 수 있기 때문에 그들에게 적합한 맞춤형 포트폴리오를 효과적으로 구성할 수 있다.

둘째, 웨이블릿을 이용하여 구한 베타 값과 단순히 기간에 따라 분해해서 구한 베타 값을 비교해 보면 웨이블릿을 사용했을 경우에 베타 값의 변동성이 커짐을 볼 수 있었다. 이는 기존 방식이 주식 시계열을 분해할 때 직교적으로 분해하지 않아 여러 주기의 특성이 혼재되어 나타나게 되고 이는 주기별 차이를 감소시키는 원인이 되게 된다. 따라서 웨이블릿을

이용하면 각 주기별 수익률이 갖는 특성을 좀 더 정확하게 추출해 낼 수 있다.

셋째, 웨이블릿을 이용하여 베타를 구한 후 이를 사용해 인덱스 펀드를 구성하면 기존의 기간별 베타를 구해서 인덱스 펀드를 구성하는 것 보다 추적오차를 감소시킬 수 있었다. 본 연구에서는 총 8번의 구간에서 두 전략을 비교하였는데 웨이블릿을 활용한 전략이 6개 구간에서 우수한 성과를 보였고 8개 구간의 추적오차를 모두 합한 총 추적오차에서도 약 10% 정도의 개선을 이룰 수 있었다. 이는 웨이블릿 기법을 이용한 시계열의 분해가 인덱스 펀드 구성에 효과적으로 사용될 수 있음을 의미한다.

본 연구에서는 약 3개월마다 포트폴리오를 재구성하는 것으로 가정하였으므로 이에 해당하는 척도 5의 베타 값만을 사용하였다. 그 외의 다양한 척도로 계산된 베타 값들을 복합적으로 사용하였을 경우에 인덱스 펀드 구성의 효과를 개선시킬 수 있을지 여부에 대한 추가적 연구가 필요할 것으로 사료된다.

금융시장에는 주식시장뿐만 아니라 선물, 옵션, 금리, 환율 등 다양한 시장이 존재한다. 이들 금융시장의 시계열은 주식 시장의 시계열과 유사한 특성을 갖고 있기 때문에 본 연구에서 확인된 웨이블릿 기법의 효과성은 이들 금융시장에서도 나타날 것으로 기대된다.

〈참고문헌〉

강현배, 김대경, 서진근, “웨이블릿 이론과 응용”, 대우학술총서, 아카넷, 2001.

김상배, “소파동분석을 이용한 우리나라 선물과 현물시장의 동태적 관계에 대한 연구”, 경영연구, 제22권, 제3호, 2007, pp. 97-117.

김현수, “Pattern Discovery by Genetic Algorithms in the Syntactic Pattern Based Chart Analysis for Stock Market”, 정보시스템연구, 제3권, 제1호, 1994, pp. 147-169.

노태협, 이택호, 한인구, “인공신경망-금융시계열 모형을 이용한 KOSPI 200 주가지수의 변동성 예측”, 경영학연구, 제34권, 제3호, 2005, pp. 683-713.

노태협, 유명환, 한인구, “리프집합이론과 사례 기반추론을 결합한 기업신용평가 모형”, 정보시스템연구, 제14권, 제1호, 2005, pp. 41-65.

이금희, “소파동을 이용한 회사채 유통수익률의 분해 및 예측”, 한국은행 경제분석, 제4권, 제3호, 1998, pp. 1-23.

조하현, 이승국, “Wavelet기법을 이용한 CAPM의 베타 추정에 관한 연구”, 재무연구, 제17권, 제1호, 2004, pp. 289-318.

조희연, 김영민, “유전자 알고리즘을 이용한 주식투자 수익률 향상에 관한 연구”, 정보시스템연구, 제12권, 제2호, 2003, pp. 1-20.

황하진, 권효성, “주식투자분석 자문을 위한 실시간 전문가시스템의 개발에 관한 연구”, 한국정보시스템학회 춘계공동 학술대회논문집, 1998, pp. 69-75.

Frino, A et al., “Index Design and Implications for Index Tracking,” *The Journal of Portfolio*

- Management*, Vol. 30, No. 1, 2004, pp. 89-95.
- Gencay, R., Selcuk, F., and Whitcher, B., *An Introduction to Wavelets and Other Filtering Methods in Finance and Economics*, Academic Press, 2001.
- Goffe, W. L., "Wavelets in macroeconomics: An introduction", *Computational Techniques for Econometrics and Economic Analysis*, Kluwer Academic Publishers, 1994, pp. 137-149.
- Lee, H. S., "Recent Advances in Wavelet Methods for Economic Time Series," *Journal of Economic Theory & Econometrics*, Vol. 7, 2001, pp. 43-65.
- King B., "Market and Industrial Factors in Stock Price Behavior," *Journal of Business*, Vol. 39, No. 1, 1966, pp. 139-190.
- Larsen, G., and B. Resnick. "Empirical Insights on Indexing," *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 25, No. 1, 1998, pp. 51-60.
- Ramsey, J., and Lampart, C., "The Decomposition of Economic Relationships by Time Scale using Wavelets: Expenditure and Income," *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, Vol. 3, 1988, pp. 23-42.
- Ramsey, J., and Lampart, C., "The Decomposition of Economic Relationships by Time Scale using Wavelets: Money and Income," *Macroeconomic Dynamics*, Vol. 2, 1988, pp. 49 - 71.
- Ramsey, J., and Zhang, Z., "The Analysis of Foreign Exchange Rates using Waveform Dictionaries," *Journal of Empirical Finance*, Vol 4, 1997, pp. 341 - 372.
- Roll, R., "A Mean/Variance Analysis of Tracking Error," *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 18, No. 4, 1992, pp. 13-22.
- Rudd, A., "Optimal Selection of Passive Portfolios," *Financial Management*, Spring, 1980, pp. 57-66.
- Yamada, H., "Wavelet-based Beta Estimation and Japanese Industrial Stock Prices," *Applied Economics Letters*, Vol. 12, No. 2, 2005, pp. 85-88.

조희연(He Youn Cho)



현재 울산대학교 경영정보학과 교수로 재직 중이다. 연세대학교 경영학과를 졸업하고 한국과학기술원에서 경영과학 석사와 박사학위를 취득하였다. 주요관심분야는 재무정보시스템, 금융공학, 파생금융상품의 가격결정 및 투자전략 등이다.

<Abstract>

A Study of Constructing Index Fund using Wavelet Analysis

He Youn Cho

An index fund is a collective investment scheme that aims to replicate the movements of an index of a specific financial market regardless of market conditions. An index fund is a popular investment alternative because it is much cheaper to run than an active fund and it performs better than actively managed funds.

This paper illustrates the usefulness of wavelet analysis in constructing an index fund. The wavelet analysis can decompose the time series data in frequency domain as well as in time domain. The major findings of this paper are as follows. First, the beta coefficient that represents the systematic risk has the scale dependent property. This result can provide important information to the investors with various investment time frequency. Investors can use the betas corresponding to their investment frequencies among the various scale betas estimated by wavelet analysis. Second, we can find the usefulness of wavelet analysis in constructing index fund because the wavelet technique gives less tracking error(difference between the index performance and the index fund performance) than the traditional constructing techniques.

The result of this study implies that the wavelet techniques can be an important analytic method to the other financial markets such as option market, futures market, bond markets and currency market.

Key Words: Wavelet, Index Fund, Beta

* 이 논문은 2009년 2월 12일 접수하여 2차 수정을 거쳐 2009년 9월 9일 게재 확정되었습니다.