확률론적 사면안정해석법과 몬테카를로법이란 무엇인지 설명바랍니다.

안태봉 우송대학교 철도건설환경공학과 교수 (공학박사, 토질 및 기초기술사 53회)

확률론적 분석기법은 해석조건이나 입력물성치의 불확실성을 고려하기 위하여 실시하며 일반적으로 많이 사용하는 방법으로 몬테카를로기법(Monte Carlo simulation)과 일계신뢰분석법(First Order Reliability Method)이 있다.

1. 몬테카를로기법 (Monte Carlo simulation)

몬테카를로기법이란, 시뮬레이션 테크닉의 일종으로, 구하고자 하는 수치의 확률적 분포를 반복 가능한 실험의 통계로부터 구하는 방법을 가리킨다. 확률변수에 의거한 방법이기 때문에, 1949년 Metropolis Uram이 모나코의 유명한 도박의 도시 Monte Carlo의 이름을 본따 명명하였다. 간단하면서도 유명한 예로, 몬테카를로법을 이용한 파이(Π)의 계산법이 있다. 먼저 정사각형 안에 한 꼭지점을 중심으로 사분원을 한개 그린다. 이때 정사각형의 전체 넓이를 1이라고 하면 원의 넓이는 $\Pi/4$ 가 된다. 이제 컴퓨터로 난수를 발생하여 무작위로 정사각형 내부에 점을 찍는다. 그리고 정사각형의 꼭지점과의 거리를 계산하여 점이 사분원의 내부에 있는지 외부에 있는지를 판단한다. 예를 들어 전체 10만 개의 점을 찍었다고 할 때 이 중 n개가 사분원의 내부에 있었다면 두 숫자의 비율, 즉 n/10만의 값은 넓이의 비인 $\Pi/4$에 근접하리라고 예측할 수 있다. 이 값을 더 많은 점을 찍어 실험할수록 정밀해진다. 이와 같이 많은 수의 실험을 바탕으로 통계 자료를 얻어 그 자료로부터 역산하여 어떤 특정한 수치나 확률분포를 구하는 방법을 몬테카를로법이라고 한다.

특성상 통계자료가 많을수록, 입력값의 분포가 고를수록 결과의 정밀성이 보장된다는 것을 알 수 있다. 때문에, 대부분 컴퓨터를 이용하여 분석이 행해진다. 몬테카를로법의 특징으로는, 우선 적용하기 쉽다는 점이 있다. 실제로 파이의 값을 정확히 구하기 위해서는 무한급수에 관한 지식과 오차범위에 관한 지식 등 다양한 배경 지식을 바탕으로 알고리즘을 만들어 그 값을 계산해야 하지만, 몬테 카를로 방법은 그런 모든 절차와 관계없이 짧은 컴퓨터 프로그

램 몇줄만으로 쉽게 수치를 얻을 수 있다.

몬테 카를로 방법을 통한 실험을 설계할 때는, 입력값의 확률분포와 실험의 수학적 모델링이 정확하지 않으면 몬테 카를로 방법은 무의미하다는 점에 주의하여야 하며, 난수의 분포가 분석에 큰 영향을 미치므로 필요한 난수의 범위와 분포에 따른 올바른 난수 생성 함수에도 주의를 기울여야 한다.

2. 사면안정에 적용하는 확률론

(1) 확률분포함수

확률분포함수 또는 누적확률분포함수는 확률변수나 확률과정 X가 임의의 값 x보다 작을 확률을 의미한다. 확률분포함수는 단조증가함수이고 0에서 1 사이이다.

$$F_X(x) = P[x \le X]$$

(2) 확률밀도함수 (Probabilistic density function)

확률밀도함수, $f_X(x)dx$는 다음과 같이 정의되고, $f_X(x)dx = P[x \le X \le x + dx]$아래와 같은 특성이 있다.

$$f_X(x)dx \ge 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1,$$

$$F_X(x) = P[x \le X] = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du,$$

$$f_X(x) = \frac{F_X(x)}{dx}$$

확률밀도함수는 이산확률변수에 대해서 probabilistic mass function이라고 하고 특별히 $P_x(X)$로 구분하여 표현하기도 한다.

(3) 평균과 분산 및 상관계수

확률변수 X의 함수인 g(x)의 기대값 E[g(x)]은 다음과 같다.

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx,$$

$g(x) = x^m$ 일 때의 기대값을 확률변수 X의 m차 모멘트라고 한다.

$$E[x^m] = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f_X(x)dx$$

확률변수 X의 평균은 1차 모멘트로

정의되며 $\mu_X = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$

분산(Variance)과 표준편차(standard deviation)은 다음과 같다.

분산: $Var[X] = E[(x - \mu_X)^2] = E[x^2] - \mu_x^2$

표준편차: $\sigma_X = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{E[x^2] - \mu_x^2}$

확률변수 X의 변동성에 대한 지표인 변동계수(COV: Coefficient of Variation)은 평균과 표준편차의 비로 정의된다.

$$\delta_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X}$$

3. 확률론적 안정성 평가법

지반은 내재적으로 분산성을 갖고 있다. 즉, 불확실성을 갖고 있는데 기존의 결정론적방법은 안전율을 확보해도 파괴되는 경우가 많다. 이에 반해 신뢰성이론에서는 파괴의 가능성을 고려하여 안정성평가를 수행한다.

이는 파괴의 가능성이 항상 존재한다는 사실을 인정하고 이를 정량화하여 해석에 포함시키는 것 이외에는 기존의 전통적인 방법과 같다.

안정성을 평가하는 데에는 이용하는 통계적 정보의 성격에 따라 Level III, Level II, 그리고 Level I으로 구분한다

① Level III 방법(Monte Carlo Simulation): 구조물의 파괴에 관계된 모든 확률변수들의 평균과 분산 및 결합확률밀도함수를 이용하여 한계상태식이 0보다 작을 확률, 즉 파괴확률을 상대적으로 정확하게 산정하는 방법

② Level II 방법(Moment method): 각 확률변수의 평균과 분산, 그리고 분포형태만을 이용하여 파괴확률에 대한 상대적인 지표인 신뢰도지수를 근사적으로 산정하는 방법

③ Level I 방법: 목표신뢰도지수로 표현된 안정성을 보장하기 위하여 각 확률변수에 대한 부분안전계수를 적용하여 설계단계에서 이용할 수 있도록 개발된 방법

(1) Level III (Monte Carlo Simulation): 몬테카를로 방법

파괴확률은 확률변수들을 $X=[X_1, X_2, \cdots X_n]$로 정의할 때 파괴를 정의하는 한계상태식

X로 주어지고 확률변수들의 결합밀도함수가 $f_X(x)$와 같을 때 다음과 같은 다중적분을 수행하여 구한다.

$$P_f = P(g(X)<0) = \iint_{g(x)<0} f_X(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)\,dx_1 dx_2 dx_3 \ldots dx_n$$

이 적분을 해석적으로 계산이 안되고 Monte Carlo Simulation Model(MCSM)을 이용하여 파괴확률을 구한다.

Monte Carlo Simulation Method는 확률변수들의 결합밀도함수를 이용하여 각 확률변수의 분포특성이 반영된 난수를 발생하여 충분한 수(N)의 확률변수의 표본집단을 생성한 다음, 생성된 각 확률변수의 값을 차례로 한계상태식에 대입하여 그 값이 0보다 클 경우는 안전, 0보다 작을 경우는 파괴로 판단한다. 그 결과 한계상태식이 0보다 작은 경우가 n_f번 관측되었다면 파괴확률 P_f는 다음과 같이 근사적으로 추정할 수 있다.

$$P_f = \frac{n_f}{N}$$

(2) Level II의 방법

Level III는 한계상태식을 정의하는 확률변수들의 결합밀도함수를 직접 적분하거나 모의실험(Simulation)을 한 결과를 이용하여 근사적으로 구조물의 파괴확률을 산정하는데 반해, Level II방법은 기본적으로 모든확률변수의 확률분포가 평균과, 분산, 또는 표준편차만에 의해 모든 통계적인 특성이 결정되는 정규분포라

는 가정을 전제로 하며, 파괴확률의 간접적인 지표인 신뢰도지수를 계산하는 방법이다.

정규분포 확률변수 X_i의 평균과 표준편차가 각각 μ_i, σ_i일 때, 다음과 같이 확률변수 X_i의 선형 합으로 정의되는 한계상태식 g를 생각하면

$$g = a_0 + a_1X_1 + \cdots a_nx_n,$$

이 때 한계상태식 g의 값을 새로운 확률변수 G라고 하면, 확률변수 G의 확률분포는 정규분포

$$\mu_G = a_o + \sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i$$

분산은

$$\sigma_G^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

이다.

한계상태식 g에 대한 파괴확률은 새롭게 정의된 정규분포확률 변수 G가 0보다 작을 확률이

$$P_f = P[G \le 0] = \Phi\left(\frac{0-\mu_G}{\sigma_G}\right) = \Phi\left(\frac{-\mu_G}{\sigma_G}\right)$$

와 같이 계산할 수 있다. 이 때 한계상태식의 표준편차에 대한 평균의 비를 신뢰도지수 (r

$$P_f = P[G \le 0] = \Phi\left(\frac{0-\mu_G}{\sigma_G}\right) = \Phi\left(\frac{-\mu_G}{\sigma_G}\right) = \Phi(-\beta)$$

신뢰도지수가 커질수록 파괴확률은 감소하므로, 신뢰도지수가 큰 값을 가질수록 구조물의 안정성은 증가한다.

4. 활동파괴면의 확률론적 탐색방법

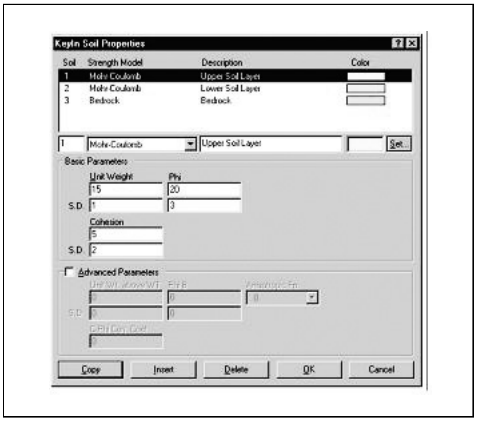
최소의 신뢰도지수를 갖는 임계단면을 확률론적 임계단면(probabilistic critical surface)이라고 하고 확률론적 임계단면은 각각의 가상파괴면에서 신뢰도지수를 구하고 그 중 최소의 신뢰지수를 갖는 면을 찾는 다음과 같은 최적화 문제로 정의할 수 있다.

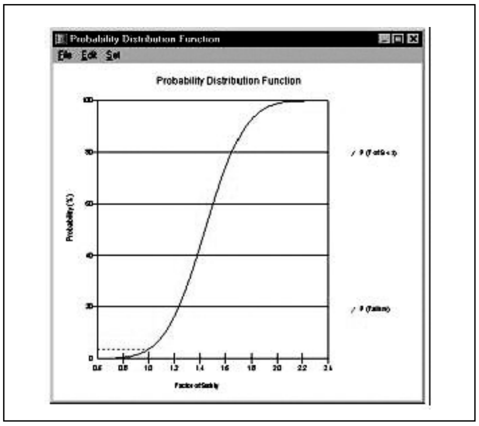
$$\beta_{min} = \min\beta(x_c, y_c, R_c,)$$

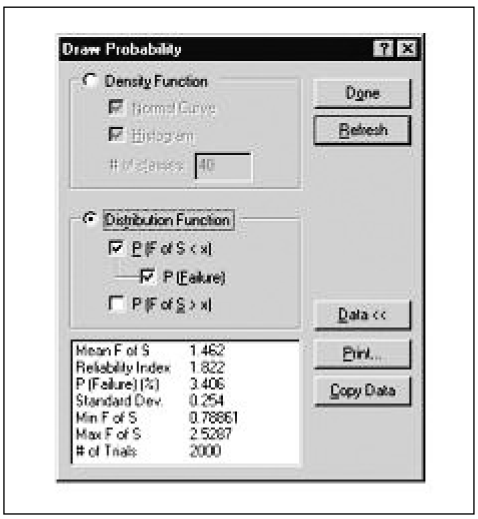
여기서 β는 목적함수인 가상파괴면에서의 신뢰도지수이다.

x_c, y_c, R = 원호파괴면의 중점 및 원호의 반지름

사면안정해석에 사용하는 강도정수 마찰각, 점착력 등의 강도정수가 오차가 있는 확률변수이다. 확률변수는 대체적으로 정규분포를 보인다. 이 정규분포의 문제점 (1) 강도정수는 음의 부호가 없으나 정규분포는 있음 (2) 강도정수는 유한하나 정규분포는 무한값을 포함 (3) 강도정수는 항상 대칭이 아니나 정규분포는 대칭임… 이런 단점을 보완하기 위하여 베타분포를 사용한다. 아래의 그림은 몬테카를로법을 사용하는 SLOPE/W 프로그램의 해석사례들의 입력변수와 결과들을 보여주고 있다.


KeyIn Soil Properties
Soil Strength Model Description Color
1 Mohr-Coulomb Upper Soil Layer
2 Mohr-Coulomb Lower Soil Layer
3 Bedrock Bedrock
1 Mohr-Coulomb Upper Soil Layer Set...
Basic Parameters
Unit Weight Phi
15 20
S.D. 1 3
Cohesion
5
S.D. 2
Advanced Parameters
Copy Insert Delete OK Cancel


Probability Distribution Function
File Edit Set
Probability Distribution Function
Probability (%)
P (Failure)
Factor of Safety


Draw Probability
Density Function
Normal Curve
Histogram
# of classes 40
Done
Refresh
Distribution Function
P (F of S < x)
P (Failure)
P (F of S > x)
Data <<
Print...
Copy Data
Mean F of S 1.462
Reliability Index 1.822
P (Failure) (%) 3.406
Standard Dev. 0.254
Min F of S 0.78861
Max F of S 2.5287
# of Trials 2000