韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 22집 제 3호, 2008. 9. 383-397

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 22, No. 3, Sep. 2008. 383-397

Lakatos의 증명 및 반박과 학생들의 수학적 사고의 비교에 관한 연구

유 현 승 (경성대학교 대학원)
이 병 수 (경성대학교)[1]

문제 해결에 있어서 수학적 사고의 필요성은 절대적이다. 이 논문에서는 먼저 기존의 수학적 사고에 대해 확인하고 Lakatos[2]의 증명과 반박의 과정을 통한 수학적 예에서 학생들이 어떻게 수학적 사고를 형성하는지를 살펴본다.

I. 서 론

합리적인 사고의 결정체인 수학은 학생들이 급진적으로 변화하고 다양해지는 현대 사회의 흐름에 발 맞춰 나갈 수 있도록 기본적인 사고력과 창의력 등을 배양하는데 있어서 꼭 필요한 학문이라 해도 과언이 아니다. 그러나 요즘 중·고등 학생들에게 "수학을 왜 배우느냐?"고 물으면 대부분 "대학입시를 위해서 배운다."라든지, 더 심한 경우는 "일상생활에서 가감승제만 할 줄 알면 되는데 이 어려운 수학을 왜 배우는지 모르겠다."라고 대답하는 학생도 있다.

많은 학생들이 수학을 배우는 목적을 잘 못 인식하고 있다. 그러다보니 문제를 푸는 데 있어서 해답을 구하는 것에만 그 의의를 두고 또 좀 더 쉬운 방법을 찾거나 공식만이 만사형통이 되는 양 영어 단어 외우듯이 외우고 있는 것이다. 물론 공식을 외우고 그 공식을 사용하여 문제를 푸는 방법이 무조건 나쁘다는 것만은 아니다. 다만 그 단원에서 반드시 알아야 할 내용이나 개념에 대한 이해가 충분히 된 다음에 공식을 사용한 문제 풀이를 하는 것이 옳은 방법이라 할 수 있겠다. 이러한 현상은 대학생들의 경우도 마찬가지이다. 교재에 나와 있는 정의나 정리를 외우고 정리의 증명을 이해하려고 할 때도 그러한 증명을 시도한 사람에 대해 왜 이러한 생각을 가지고 증명했을까보다는 어떻게 해서 다음 단계로 넘어가는지, 논리적으로 문제는 없는지에 대해서만 파악하려고 하고 있다. 수업의

* 2008년 8월 투고, 2008년 9월 심사 완료
* ZDM 분류 : C35
* MSC2000 분류 : 97C30
* 주제어 : 수학적 사고, 증명과 반박
1) 교신 저자
2) Imre Lakatos(1922.11.9.~1974.2.2.), 수학 철학자, 과학자. Lakatos와 관계되는 주요 단어 : Method of Proofs and Refutations, Methodology of Scientific Research Programme

형태도 학생들의 창의적인 사고 과정을 유도하는 방식이 아니라 수학적 사고의 결과인 수학적 지식을 전달하는 형태로 이루어지고 있다. 이러한 방식으로는 학생들의 사고력 발달에 도움을 줄 수 없기 때문에 학생들은 어떤 문제를 해결할 때 항상 "왜?"라는 질문을 스스로 해야 한다. 여기에서는 왜 이러한 방법으로 풀었는지 혹은, 다른 방법으로 풀거나 증명할 순 없는지, 만약에 다른 또 어떤 조건이 더해지거나 빠지면 원래의 명제가 어떻게 바뀔지 등에 대해 생각해 보아야 한다는 것이다. 그렇게 해야만 그 문제를 푼 사람이나 정리를 증명한 사람의 수학적 사고 방법을 조금이나마 이해를 할 수 있을 것이다.

1989년 미국 수학교사회(NCTM)에서 발행된 '학교수학의 교육과정과 평가의 표준(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics)' 에서는 앞으로 수학교육이 추구해야할 교육의 방향을 몇 가지 제시하고 있는데 그 중에 주목할 만할 사항 세 가지를 살펴보면 다음과 같다. 첫째, 학생들이 수학적으로 추리를 할 수 있도록 초 · 중 · 고를 통해 일관적으로 다양한 경험을 제공할 것을 요구해야 한다는 것이고 둘째, 특히 탐구하고 추측하며 검사하고 오류를 수정하면서 도전적인 문제를 해결할 수 있도록 하며, 마지막으로 수학에 대해 쓰고 말하고 토의하며, 수학적으로 추론하는 경험을 통해 수학적 사고 능력과 태도를 함양할 수 있도록 하자는 것이다. 미국 수학교사회가 제시한 수학교육의 방향은 수학적 소양과 수학적인 힘이 21세기의 자유민주주의 체제하의 정보산업사회를 이끌어 갈 학생들에게 얼마나 중요한지를 말해주며 그 위치를 짐작하게 해준다(우정호. 2007).

이 논문에서는 능동적인 문제 해결에 있어 절대적인 요소인 수학적 사고에 대해서 알아보고자 한다. Ⅱ장에서는 기존의 수학적 사고에 대한 의의를 확인해 보고 Ⅲ장에서는 Lakatos의 증명과 반박의 과정을 바탕으로 한 수학적 예로서 학생들이 수학적 사고를 어떻게 형성해 나가는지에 대해 살펴본다.

Ⅱ. 수학적 사고

수학적 지식은 어떻게 발달하는가? 즉, 학생들은 어떠한 메커니즘을 통해 몰랐던 사실을 알게 되는가? 이 질문에 대한 대답은 수학적 지식은 수학적 사고의 결과로서 수학적 사고력의 신장을 통한 수학적 지식의 발달이라고 할 수 있다. 높은 지식을 습득하는 것은 기존에 자신이 가지고 있던 지식이나 개념위에 새롭게 접하는 외적인 지식을 수학적 사고의 과정을 통해 내적인 지식으로 전이시킴으로써 가능하다. 즉, 인간은 새로운 지식을 접하는 것에 대해 처음에는 당황하지만 그 이후에 자신이 가지고 있는 지식에 동화시키거나 자신의 사고를 재조직함으로서 높은 지식의 수준으로 발전한다.

이번 장에서는 수학적 사고의 의미에 대한 여러 학자들의 의견을 알아보고 수학적 사고에서의 필수 요소인 수학적 창의성과 수학적 증명에 대해 살펴본다.

1. 수학적 사고의 의의

수학적 사고는 수학적 지식의 발달뿐만 아니라 인류 문화의 발달에서도 중요한 역할을 해왔다. 하지만 수학적 사고를 명쾌하게 정의하기는 어려울 뿐만 아니라 수학적 사고의 성격에 관한 내적 연구, 즉 그 성격은 무엇이고, 수학자들이 수학 활동을 함에 있어 어떻게 수학적 사고를 하며, 학생들에게 수학적 사고를 어떻게 유발시키고 발전시킬 수 있는지 등에 관한 연구는 별로 없다(류희찬・조완영・김인수, 2003). 이는 수학적 사고가 아주 복잡하고 광범위한 영역에서 이루어지는 정신 활동이기 때문이다.

수학적 사고의 의의에 대한 여러 학자들의 의견을 살펴보면, 강완, 백석윤(2000)은 수학적 사고란 “수학적 문제 상황을 해결하기 위한 사고”로서 수학적 사고를 수학의 각 내용 영역과 관련시켜 집합적 사고, 함수적 사고, 도형적 사고, 통계적 사고 등으로 말할 수도 있으나, 수학적 특정 내용과 관계없이 기능적 측면에서 구별할 때에는 논리적 사고, 추상화, 일반화, 연역적 사고, 귀납적 사고, 유비적 사고 등으로 구별할 수 있다고 하였다.

김응태・박한식・우정호(2007)에 의하면 수학적으로 사고한다는 것은 여러 가지 계산법이나 문제해결에 이르는 명확한 절차, 곧 알고리즘을 능숙하게 구사하고 이를 개발하는 것이며, 수학적 안목을 갖고 의미가 충실한 개념적 사고를 하면서 수학적 용어와 기호를 구사하는 것이며, 수학의 여러 가지 개념, 원리, 법칙 사이의 관련성을 파악하고 또한 수학적인 내용과 수학 외적인 상황의 관련성을 파악하여 문제를 수학적으로 해결한다는 것이다.

강시중(1998)은 수학적 사고가 수학만이 갖는 독특한 사고인지, 일반적 사고의 의미를 근원으로 한 수학적 사고인지에 대한 경계를 생각하지 않을 수 없으나, 수학은 타 교과와 다른 수학만이 지니는 특성이 있으므로 수학적 사고는 수학에서 행해지는 독특한 사고이며 동시에 일반적 의미를 갖는 사고의 범주에 포함된다고 하였고, 이용률・성현경(1994)은 수학적 지식이나 기능의 선정 및 그 활용 방향을 시사해 주는 힘이 있을 때 문제 해결이 가능한 것인데, 이러한 힘을 수학적인 사고 방법·태도라고 하였으며, 강문봉 외(2007)는 수학적 사고란 “수학의 지도를 통하여 그 육성, 정착을 기대하는 것이 바람직할 것으로 보이는 사고방법”이라고 하였다.

수학 학습과 관련이 깊은 사고의 개념으로서 인지적 사고와 메타 인지적 사고를 생각할 수 있다. 인지적 사고란 지식을 생성하거나 회상하여 적용하는 사고를 뜻하며 메타 인지적 사고란 인지적 사고 활동이 효율적으로 진행되도록 하기 위하여 인지적 사고활동을 관찰, 통제, 조정하는 사고를 뜻한다(강옥기・조현공・허난, 2005).

지하철 요금을 계산하는 예시를 통해 위의 개념들을 생각해보자.

(문제) 부산에서 사는 학생이 지하철을 이용하여 2구간 거리의 학교를 다닌다고 할 때 한 달에 교통비는 얼마가 들겠는가? (단 한 달은 4주로 생각하고 수업은 월요일부터 금요일까지 있다.)

(풀이) 부산의 교통카드를 이용한 지하철 요금은 1구간에 990원, 2구간은 1구간 요금에 180원이 추가된다.

따라서 한 달 교통비를 구하는 식은

$$\begin{aligned}(990+180)\times 2\times 5\times 4 &= 1170\times 2\times 5\times 4\\ &= 2340\times 5\times 4\\ &= 11700\times 4\\ &= 46800\end{aligned}$$

결국, 한 달 교통비는 46800원이다.

이렇게 실생활 문제를 수식화하여 문제를 해결하는 것은 인지적 사고에 해당한다.

또, 위의 계산식을 약간 변형하고 분배 법칙을 이용하여

$$\begin{aligned}\{(1000-10)+(200-20)\}\times 40 &= (1200\times 40)-(30\times 40)\\ &= 48000-1200\\ &= 46800\end{aligned}$$

으로 계산한다면 암산으로도 계산이 가능할 정도로 간단해지는데 이것은 메타 인지적 사고에 해당하는 것이다.

이와 같이 수학학습과 관련이 깊은 인지적 사고와 함께 분배 법칙을 통한 새로운 알고리즘을 능숙하게 구사한 메타 인지적 사고도 수학적 사고의 범주에 속한다고 할 수 있다.

부산 지하철 1개월 정액권(한 달 이내에 1구간, 2구간 관계없이 60회까지 이용 가능)은 45000원이므로 교통카드를 이용하는 것보다 좀 더 실용적이다. 이것은 앞에서 김응태 · 박한식 · 우정호(2007)가 언급한 '수학적인 내용과 수학 외적인 상황의 관련성을 파악하여 문제를 수학적으로 해결한다.'는 것에 대한 예로 볼 수 있다.

2. 수학적 사고의 과정

수학적 사고의 과정이라 함은, 수학학습에 있어 문제 상황을 찾아내는 창의적 활동에서부터 추측을 제시하고 정교화하며 논리적인 증명을 하는 것까지의 전 과정을 말한다(류희찬 · 조완영 · 김인수. 2003).[3] 수학적 사고는 학교에서 지도되는 수학적 내용뿐만 아니라, 이들 수학적 내용을 이해하고 지식으로 터득하는 과정에서 행하여지는 수학적인 활동과 깊은 관련이 있다고 하겠다. 수학적 사고력은 활동적, 실천적인 것으로서 종합적이고 체험적으로 파악할 수 있는 것이므로 이를 육성하기 위해서는 만들어진 수학적 지식을 교사의 관점에서 학생들에게 주입 · 전수시킬 것이 아니라 학생들 스스

3) 류희찬, 조완영, 김인수. 2003. P. 1에서 재인용

로 능동적·활동적 경험을 통해서 깨우칠 수 있는 기회와 환경을 만들어 주어야 할 것이다. 즉, 학생들을 수학자의 입장에 놓이도록 함으로써 자신의 지식과 경험을 이용하여 창의적으로 새로운 수학적 모델을 만들 수 있는 기회와 환경을 제공해야 할 것이다(남승인. 2000). 그러나 현재 대부분의 학교 수업의 형태를 보면, 학생들을 자발적인 수학적 사고의 활동 과정에 참여시키기 보다는 완성된 수학적 지식(잠정적으로 참이라 할 수 있는 이론)을 제시하는 식의 수업이 이루어지고 있다. 이론의 설명으로 시작해서 틀에 짜여진 계산법이나 알고리즘에 의해 학생들을 훈련시키는 수업 방식은 학생들이 수학적 사고의 특징인 창의성을 기르는 데 오히려 방해적인 요소일 뿐이다. 이러한 방식의 수업이 계속된다면 학생들은 점점 수학에 대한 흥미를 잃을 뿐만 아니라 실생활과는 동떨어진 전혀 의미 없는 학문으로 인식할 위험이 있다. 학생들의 관심이나 흥미를 이끌어내기 위해서는 선행학습과 관련하여 학생들이 능동적인 자세로 수업에 참여할 수 있도록 교사들이 적극적으로 지원해야 한다. 교사들은 학생들이 직접 추측을 제시하고, 그러한 추측에 대해 스스로가 증명을 하고, 또 제시된 추측이 거짓이라고 판단될 때 반례를 제시하는 반박 활동을 이끌어 냄으로서 수학적 사고를 신장시키도록 해야 한다. 그렇게 하면 학생들 스스로 뚜렷한 목적의식을 가지고 주어진 수학적 대상에 대한 끊임없는 의문을 통하여 비판적이고 합리적인 사고를 하게 될 것이다.

3. 수학적 창의성과 수학적 증명

수학적 창의성은 수학적 사고의 과정에서 아주 중요한 요소이다. 수학적 창의성이란 어떤 조건이 있을 때, 그 조건으로부터 어떤 결론을 얻어낼 수 있는지, 또 그 결론이 참임을 증명하기 위한 어떤 전략을 짜야하는지, 아니면 반대로 자신이 원하는 결론을 내기위해서는 어떤 조건이 필요한지 등에 관한 방법, 등 수학 문제를 창의적으로 해결할 수 있는 능력을 말한다. 즉 어떤 수학 문제 상황에서 자신이 가지고 있는 지식이나 사고 방법을 통해 다양한 아이디어를 산출하고 그 중 가장 적절한 아이디어를 선택하는 사고의 유연성과 사고의 확장성이 수학적 창의성의 요소가 될 것이다. 예를 들어 피타고라스의 정리를 증명하는 방법은 여러 가지가 있는데, 이를 증명한 수학자들은 자신들만의 독창적인 사고와 방법으로 증명하였기 때문에 창의적이라 볼 수 있다는 것이다.

증명은 수학적 체계에서 논리적 공리와 비논리적 공리를 주축으로 이루어지는 수학적 과정이다. 어떤 상황 속에서 개개인이 받아들이는 의미가 다르듯이 한 명제를 두고도 수학자들이나 학생들이 받아들이는 의미나 증명 방법도 다양할 것이다. 어쨌든 과거의 여러 수학자들의 정리에 관한 증명을 이해하려 한다든지, 자기 자신이 어떤 명제에 대해 증명하려 한다는 것에 관계없이 증명을 한다는 것은 고도의 수학적 사고를 요하는 단계이다. 물론 어떠한 조건하에서 정리를 추측하는 것도 수학적 사고의 한 과정으로서 수학적 사고를 신장시키는데 중요한 역할을 하지만, 그것을 증명하는 것이야말로 수학적 사고의 과정의 마무리 단계(물론 반례나 반박에 의해 새로이 정리를 추측하고 증명해야 할 수도 있지만)로서 가장 많은 정신적 활동을 요한다고 할 수 있다.

Ⅲ. 본 론

이번 장에서는 이미 잘 알려져 있는 Lakatos의 증명과 반박을 확인하고, 수학적 예를 통해 실제로 학생들이 기본 추측, 증명, 반박, 개선된 추측의 단계에서 어떻게 수학적 사고를 형성하는지 살펴본다.

1. Lakatos의 증명과 반박(Proofs and Refutations)

역사를 통해서 보면 수학적 지식을 관찰과 귀납의 결과로 보는 경우도 있고, 절대적 진리의 대전제 하에 연역적 추리를 통해 새로운 지식을 증명해가며 수학적 지식을 신장시켜 나가는 경우로 보기도 한다. 그러나 우리나라 대부분의 교과서는 내용의 전개 방법으로서 연역주의자들의 방식을 적지 않게 택하고 있다고 할 수 있다. 연역주의자의 양식에서 모든 명제는 반드시 참이고 모든 추론도 타당하며, 수학을 영원불변한 진리가 계속 증가하는 집합으로 제시한다. 또한 그들이 이미 진리라고 여기는 수학적 체계에 대해, 반박이나 반례를 제시하거나 비판의 행동을 억압함으로서 수학에 대한 권위주의적 태도를 유지해 왔다. 그리고 이들을 옹호하는 사람들도 “연역은 수학에서 정해진 발견적 패턴이며, 발견의 논리는 연역이다.”라는 주장을 내세웠다. 이렇게 연역적 양식의 수학은 수학적 지식을 모순이 없는 완벽한 진리로 생각했기 때문에, 수학교육에 이를 적용하였을 때도 마찬가지로 정해진 내용대로 따라갈 뿐, 누가 어떤 고민을 통해 수학적 정의나 정리라는 결론을 도출하였는지 그 과정을 알 수 없었다. 또한, 그들은 역사 속에서 오류라고 판정된 지식은 쳐다볼 가치도 없는 무가치한 지식으로 여겨 학생들에게 자동적으로 걸러진 채로 제시하고, 언제나 정답이라는 정해진 길로 가기만을 고집하게 되었던 것이다. 이것은 수학의 전체를 배우는 것이 아니라 어쩌면 밝은 면만 보게 하는 반쪽의 수학을 배우는 것이라고 할 수 있는 것이다. 수학적 연역성의 반대 입장에 있던 Lakatos는 Polya의 발견술과 Popper의 비판적 오류주의에 영향을 받아 수학적 지식의 성장은 추측(또는 증명)과 반박을 통해 이루어지는 것이며 지식은 잠정적으로만 참일 뿐 영원불변한 진리가 아니라고 하였다. 그러므로 Lakatos는 증명을 통해 지식의 참임을 밝히는 것이 아니라 증명의 과정에서의 비판과 반박을 통한 새로운 개념의 재발견을 중요시 여겼다(류시규 · 김희정. 2000).

Lakatos는 수학적 지식의 성장을 ‘증명과 반박’의 논리로서 설명한다. 그에 따르면 비형식적인 수학은 의심의 여지가 없이 확립되었던 정리들의 수가 단조롭게 증가됨으로서가 아니라 비판에 의해서, 증명과 반박에 의해서, 추측의 부단한 개선을 통해서 성장하는 사고 실험 과학이며, 이에 따른 수학적 지식은 추측에 불과하다고 하였다. 또 이러한 수학적 지식은 반증 가능하고 반증될 때까지만 잠정적으로 참이라고 한다고 하였다(황혜정 외 2007). 따라서 Lakatos의 증명의 과정은 추측의 참임을 밝히는 것뿐만 아니라 증명의 과정에서 비판하고 반박함으로서 수학적 개념을 재발견하는 과정이라 볼 수 있다.

Lakatos의 '증명과 반박'에서는 비형식적 증명의 예를 단일다면체에 대한 Euler정리의 증명을 통해 보여주고 있다. 그러나 그 과정에서 공준도, 잘 정의된 바탕논리도 사용되지 않았다. 그의 추론방법은 형식화할 적절한 방법이 없었고, 단지 그가 한 것은 정리가 참임을 직관적으로 보여준 것뿐이었다. 그는 이런 과정을 증명이라고 하기 보다는 '사고과정(thought experiment)'이라 부르고자 하였다. 그는 진정한 비형식적 이론에서는 처음부터 증명이란 존재하지 않으며, 정리도 정의될 수 없고 검증의 방법도 없다고 하였다. 그는 만일 검증의 방법이 없다면 반증의 방법은 분명히 있을 것이며, 만약 반증에 의해 반례가 드러나서 문제점들을 정정하면 개선된 추측으로서의 새로운 이론이 생성된다고 하였다(류시규 · 김희정. 2000).

증명과 반박은 4단계로 이루어진 수학적 발견술이다. 첫 번째 단계는 기본추측(primitive cnjecture)이라 불리는 최초의 추측단계이다. 두 번째 단계는 증명(proof)의 단계로서, 기본 추측을 부분 추측이나 보조정리로 분해하는 사고 실험 또는 주장 단계이다. 세 번째 단계는 전체적인 반례의 출현(emergence of global counterexamples)이다. 이러한 반례는 단순히 부분추측의 한 부분에 관한 것이 아니라 기본 추측 전체에 관한 것이다. 네 번째 단계는 보조정리를 발견하는 증명의 분석(analysis of proof)단계로서 그 결과는 기본 추측을 수정 또는 보완한 개선된 추측(proof-generated conjecture, 저자 주)이다(Sean Lasen · Michelle Zandieh. 2007).

학생들의 잠재적인 반례에 대한 태도중 하나는 그 반례를 무시하는 것이다. 용어를 재정의함으로서 반례를 괴물로 간주하여 배제하고 추측을 구하는 방법을 Lakatos는 '괴물 배제(monster-barring, 저자 주)'라고 하였다. 괴물 배제에서 반례를 배제한 정의는 또 다른 반례를 인정하거나 또는 어떤 정리가 유효함을 보여주는 예도 배제시키므로 문제가 된다. 그러나 괴물 배제는 종종 "어떤 문장의 좀 더 정확한 의미를 전달"(Polya 1954, p.44)[4]하는데 필요하기 때문에 중요한 기술이 될 수 있다. 이것은 어떤 것을 설명할 때 예와 반례를 들어 설명하면 이해가 쉽다는 것은 의미한다.

Lakatos는 또한 정리의 안전하고 정당한 영역을 찾아내기 위해 정리의 예외를 나열함으로서 이루어지는 '예외 배제(exception-barring, 저자 주)'를 묘사하였다. 이러한 경우 반례가 정당한 예로 인정될 수도 있지만 정리의 예외로서 취급된다. 예외 배제는 비록 모든 예외가 발견되었다고 확신할 수 있을지라도, 정리의 정당한 영역을 너무 심하게 축소하는 위험이 있다. 예외 배제는 반례의 정당함을 인정하고, 그래서 근본적인 정의보다는 추측이 수정된다는 점에서 괴물 배제와는 다르다. 예외 배제의 경우 학생들의 활동의 초점은 반례와 추측에 있다. 예외 배제 활동의 전형적인 결과는 추측의 수정이다.

반례에 대응하는 세 번째 태도는 '보조정리 합체법(The method of lemma incorpor-ation)'이다. 보조정리 합체법은 반례가 원래의 추측의 반박이지만 그 증명의 반박이 아닌 것은 증명에 문제가 있다고 보고, 증명 분석을 통해 감추어진 조건이나 보조정리를 들추어내어 추측에 합체시킴으로써 추측을 개선하는 것이다(우정호. 2007). 그리고 Lakatos는 이 방법을 다른 방법보다 선호하였는데 그 이

4) Sean Lasen, Michelle Zandieh, 2007. P. 207 재인용

유는 그것이 증명분석에 의해 추측이 개선되며, 첨가된 조건도 증명분석을 통하여 생성된 개념이기 때문이다. 반증되지 않은 보조 정리로 반증된 보조 정리를 대체시킴으로써 영역을 확장하여 예외 배제자들이 증명에 의해 추측의 영역을 감소시키려던 상황을 막을 수 있었다. 그러나 어떤 참인 명제가 포함하고 있는 용어를 확대 해석하여 그 명제를 거짓으로 되게 하는 개념 확장의 문제가 발생하기도 하였다. 이때마다 괴물배제 정의로 개념 확장의 정의를 피하려 한다면 수많은 괴물을 배제하기 위해 계속해서 개념을 새롭게 정의해야하는 끝없는 소모전에 빠지게 되었는데, 그래서 Lakatos는 어떤 용어든 임의로 그 의미를 확장하도록 허용해서는 안 된다고 주장하였으며, "합리적인 확장에 의한 반박과 비합리적인 확장에 의한 반박을 구분해야 한다."고 하였다(우정호 역. 수학적 발견의 논리, p.83.)[5].

Lakatos는 괴물 배제와 예외 배제는 반례를 중시하지 않는다는 점에서 적절한 방법으로 보지 않았다. 괴물배제는 개념을 형성하는 것이 아니라 단지 정의를 번역할 뿐이며, 소박한 추측을 개선한 것이 아니므로 괴물 배제는 발견적으로 유용하지는 않은 방법으로 평가하였다. 그리고 예외 배제는 모든 예외를 다 열거할 수 있다는 보장이 없으며 특히, 증명을 고려하지 않는 문제점이 있다고 하였다(강문봉. 1993).

2. 수학적 예 : 부분 수열의 수렴에 관한 문제

다음에 나올 수학적 예는 Lakatos의 사례 연구와 유사한 과정을 통해서, 부분 수열의 수렴에 관한 문제 중에서 특히 Bolzano-Weierstrass정리의 특수한 경우인 유계인 수열의 상한에 수렴하는 부분 수열이 존재하기 위해 어떤 조건이 필요한지를 해결해 나가는 과정을 묘사하였다. 학생들은 서로 다른 추측을 제시하고 그 추측을 증명하는 과정에서 학생들의 활동에 초점을 맞추어 어떻게 수학적 사고를 형성해 나가는지를 알아본다.

(1) 기본 정리

- 조임 정리(Squeeze theorem)

모든 자연수 $n\in N$에 대해서 수열 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$이 $x_n \le y_n \le z_n$을 만족하고, $\lim\limits_{n\to 0} x_n = L = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = L$이다.

- 단조 수렴 정리 (Monotone convergence theorem)

단조수열 $\{x_n\}$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 수열 $\{x_n\}$이 유계인 것이다.

5) 류시규·김희정 (2000). 추측과 반박을 통한 수학적 발견 논리, 교육문제연구(The Journal of Educational Theory and Practice), 15, 138-163. 재인용

- Bolzano-Weierstrass정리
모든 유계인 실수열은 수렴하는 부분수열을 갖는다.

(2) 수업 배경

이 논문에서의 수학적 예는 실제로 필자가 교육대학원 해석학 세미나 시간에 겪었던 경험을 토대로 제시되었다. 앞에서 언급했듯이 Bolzano-Weierstrass정리의 특수한 경우인 유계인 수열의 상한에 수렴하는 부분 수열이 존재하기 위해 어떤 조건이 필요한지에 대해서 알아보자는 과제가 제시되었고, 다음 세미나 시간에 학생들이 조별로 조사해온 내용을 발표하고 서로의 의견을 토론하는 형식으로 진행되었다. 조는 두 조가 있었는데 그 중에서 특히 어느 한 조가 준비해 온 내용을 중심으로 제시하고 분석한다. 이 논문에서 소개되는 학생들은 경성대학교 교육대학원 수학교육 전공자들로서 대학교에서 수학을 전공했었다. 그중에서 왕룡이는 평소 공부를 열심히 하지만 자신이 노력하는 만큼의 성과는 거두지 못하고 약간은 성급한 성격의 소유자이고, 봉진이는 수학적 센스는 어느 정도 있지만 직접 아이디어를 제시하여 수학적 문제를 해결하기 보다는 참고가 되는 도서에 많이 의존하여 응용함으로서 주로 수학적 문제를 해결하는 인물이다.

(3) 기본 추측의 제시

학생들은 서로 자신의 생각을 얘기하면서 유계인 수열의 상한에 수렴하는 부분수열이 존재하기 위해 어떤 조건이 필요할지에 대한 추측을 발전시켰다.

봉진 : 수열 $\{x_n\}$이 유계라면...
왕룡 : 그래, 수열 $\{x_n\}$이 유계이고 유한개의 항들을 제외한 나머지 항들이 단조감소만 아니면 될 것 같아.

기본 추측을 제시함에 있어서 학생들은 직관적이고 창의적인 사고를 하게 된다. 직관은 지식을 발견하는 도구라 할 수 있다. 학생들은 창의적인 문제 해결을 위해 기존에 가지고 있는 지식을 바탕으로 주어진 조건에 어떠한 조건을 더하면 자신이 원하는 결론에 도달할 수 있을 것이라고 직관적으로 판단하게 된다.

(4) 증명

왕룡이는 자신의 추측을 바로 증명하고 교사와 다른 학생들에게 자신의 증명을 설명하였다. 그의 증명은 단조 수렴 정리로부터 이끌어 내었다. 여기서는 왕룡이의 증명을 그대로 보여주고 그의 사고 방법을 해석하기 위해 이 증명을 분석하고 그리고 감춰져 있는 보조정리를 확인한다.

왕룡 : 수열 $\{x_n\}$이 유한개의 항들을 제외한 나머지 항들이 단조 감소만 아니면 증가하는 부분 수열을 가져요. 따라서 수열 $\{x_n\}$이 유계이고 증가하는 부분 수열을 가지므로 s에 수렴하는 수열

$\{x_n\}$의 부분 수열을 가져요. 이것을 실제로 증명해보면 s가 수열 x_n의 상한이기 때문에 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 $s-\varepsilon< x_n \leq s$을 만족하는 x_n이 존재해요. 따라서 $s-1< x_{n_1} \leq s$을 만족하는 $n_1 \in N$을 고를 수 있어요. 다시 $s-\frac{1}{2}< x_{n_2} \leq s$을 만족하는 $n_2 \in N$을 고르고 이러한 과정을 계속 반복해 나가면 $s-\frac{1}{k}< x_{n_k} \leq s$을 만족하는 $n_k \in N$을 고를 수 있으므로 수열 $\{x_n\}$의 부분 수열 $\{x_{n_k}\}$를 찾을 수 있어요. 여기서 $\lim_{k\to\infty} s-\frac{1}{k}=s$이므로 조임 정리에 의해서 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=s$라고 할 수 있어요.

이 증명에서 다음을 살펴보자.

첫 번째 단계에서 수열 $\{x_n\}$의 유한개의 항들을 제외한 나머지 항들이 단조 감소가 아니기만 하면 증가하는 부분 수열을 가지겠는가에 대해 고려해 보자. 이 학생은 유계인 수열 $\{x_n\}$이 단지 단조 증가수열이라면 너무 시시하다고 생각했다. 그래서 단조 증가수열이 아닌 경우를 생각해 본 결과 수열 $\{\sin n\}$과 같은 진동하는 수열도 상한에 수렴하는 부분 수열을 가지므로 수열 $\{x_n\}$이 단조 감소만 아니면 증가하는 부분 수열을 가질 거라고 추측했다.

여기에 감춰져 있는 보조 정리가 있다. 이 학생이 단조 증가수열이 시시하다고 한 이유가 그 것인데, 하나는 단조 수렴 정리이고 또 하나는 "수열 $\{x_n\}$이 s로 수렴하면 수열 $\{x_n\}$의 모든 부분 수열 $\{x_{n_k}\}$도 s로 수렴한다."이다.

두 번째는 실제 증명의 단계에서 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 $s-\varepsilon< x_n \leq s$을 만족하는 수열 $\{x_n\}$이 존재하는가에 대한 고려이다. 수열 $\{x_n\}$이 증가수열인 경우에는 $\lim_{n\to\infty} x_n=s$이므로 극한의 정의에 의해서 $s-\varepsilon< x_n \leq s$을 만족하는 $n\in N$이 존재한다. 일정한 폭의 진동 수열인 경우에도 $\max\{x_n : n\in N\}=s$로 잡으면 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 $s-\varepsilon< x_n \leq s$을 만족한다.

이 단계에 이어서 부분 수열을 고르는 단계는 Bolzano-Weierstrass정리의 증명의 과정과 아주 흡사하다. Bolzano-Weierstrass정리의 증명의 방법 중 하나가 그렇듯 이 학생은 이것을 단조 수렴 정리로부터 유도하였다.

(5) 전체적인 반례의 출현

학생의 증명을 듣고 있던 교사는 즉각적으로 반례를 들어 보였다.

교사 : 그러면 다음 예를 살펴보자. 수열 $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n}\sin\frac{n}{2}\pi\right\}$은 유계수열이지만 단조감소수열은 아니지?

왕룡 : 네.

교사 : 자 이제 수열 $\{x_n\}$의 부분수열에 대해 생각해보자.

이 수열은 왕룡이가 제시한 모든 조건을 만족하지만 이 수열의 모든 부분수열은 수열 $\{x_n\}$의 상한인 1에 수렴하지는 못한다. 교사는 이러한 반례를 들어 보임으로서 왕룡이의 추측이 잘못되었음을 확인시켜주었다.

(6) 괴물 배제와 예외 배제

학생들은 교사가 반례를 통해 추측이 잘못되었다는 것을 확인시켜주었음에도 불구하고 즉각적으로 반례를 받아들이려 하지 않았다. 즉 학생들의 최초 반응은 자신의 최초 추측을 지키기 위해 교사가 제시한 예를 괴물로 배제하려고 하였고 교사는 학생들이 반례를 즉각적으로 받아들이지 않는 것에 대해 결정적인 힌트를 주기 보다는 학생들 스스로 사고하고 유추할 수 있도록 유도하였다.

정희 : 수열 $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n}\sin\frac{n}{2}\pi\right\}$은 감소하는 부분 수열을 가지잖아요.

교사 : 왕룡이는 감소하는 부분 수열에 대해서는 언급하지 않았어. 단지 증가하는 부분 수열의 존재에 대해서만 얘기했지.

여기서의 학생들의 사고는 동화와 조절[6]과 관련이 있다. 학생들은 이미 자신의 추측이 옳고 증명도 하였으므로 지식의 전이가 이루어진 상태이기 때문에 반례는 자신들에게 혼란을 줄 뿐이라고 생각한다. 이러한 현상을 장애라고 한다. Paper(1980)는 새로운 지식이 기존의 지식과 모순이 되는 경우는 흔히 있는 일이며, 효과적인 학습을 위해서는 기존 지식과의 갈등을 극복할 수 있는 전략이 필요하다. 갈등을 일으키는 지식들이 조율되기도 하고 어느 한쪽을 버려야 할 때도 있으며, 별개의 영역에서 무리 없이 유지될 수 있다면 공존할 수도 있다(류희찬 · 조완영 · 김인수. 2003)[7]고 하였다.

교사가 학생들이 반례를 괴물로 간주하고 받아들이려 하지 않는 것을 제지하자, 학생들은 바로 예외배제의 형태로 바뀌었다.

왕룡 : 수열 $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n}\sin\frac{n}{2}\pi\right\}$의 상한 s가 맨 첫 항에서만 나오기 때문에 s에 수렴하는 부분 수열을 만들 수가 없어요.

교사 : 너는 상한 s의 위치에 대해서도 언급한 적이 없어. 다만 수열 $\{x_n\}$이 유계이고 증가하는 부분 수열의 존재해야한다고만 했지.

봉진 : 선생님 말씀이 맞아요.

왕룡 : 다시 한 번 생각해 보겠습니다.

봉진 : 그러면 수열 $\{x_n\}$의 수렴성과는 관계없이 $n\to\infty$일 때, 수열 $\{x_n\}$이 상한 s을 취할 수 있다는 조건을 주면 되지 않을까요?

---

6) 동화 : 새로운 정보나 경험을 이미 자신이 구성하고 있는 지식에 적용시키려고 하는 과정
조절 : 새로운 정보나 경험을 인식하기 위해 기존에 가지고 있던 지식 구조가 수정되는 과정

7) 류희찬 · 조완영 · 김인수 2003. P. 11 재인용

여기에서 학생들은 자신의 추측과 반례에만 초점을 두고 있다는 것을 알 수 있다. 특히 최초 추측에 대해 봉진이가 수정하려고 하는 것은 거의 정확한 듯 보이나 그의 관심이 추측과 반례에만 있었기 때문에 증명 분석의 결과가 아니라 예외 배제의 결과라 볼 수 있다. 이러한 결과가 왕룡이의 증명의 결점을 지적하지는 못하므로 여기서는 크게 다루지 않을 것이다.

(7) 개선된 추측의 제기

학생들은 봉진이의 추측을 받아들이기 보다는 s의 위치에 관심을 가지며 왕룡이의 증명과 교사가 제시했던 반례를 분석함으로서 새로운 추측을 제시하기 시작했다.

정희 : 선생님은 상한 s가 첫 번째 항이 되는 경우를 예로 제시하셨고, $x_1 = 1$와 $x_5 = \dfrac{1}{5}$ 사이에는 수열 $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n}{2}\pi\right\}$의 어떤 항도 존재하지 않아. 이 예에서 보듯이 때문에 우리의 증명에서 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 $s - \varepsilon < x_n < s$을 만족하는 수열 $\{x_n\}$이 존재한다고 보장할 수 없어.

왕룡 : 그래, 그건 선생님이 들어준 예뿐만이 아니라 유한 번째 항이 상한 s가 되는 모든 경우에 해당하는 것이야.

정희 : 그러면 어떤 조건을 줘야 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 $s - \varepsilon < x_n < s$을 만족하는 수열 $\{x_n\}$이 존재한다고 보장할 수 있을까?

왕룡 : s가 수열 $\{x_n : n \in N\}$의 원소가 아니라면...

상한 s가 수열 $\{x_n : n \in N\}$의 원소가 아니라는 조건이 더해지면 왕룡이의 최초의 추측을 토대로 새로운 추측을 증명할 수 있다. 이 경우는 원래의 증명을 참고해서 상한 s가 수열 $\{x_n : n \in N\}$의 원소가 아니라는 조건을 줌으로서 보조 정리를 이끌어 내고 기본 추측을 증명 할 수 있기 때문에 예외 배제보다는 증명 분석을 통한 보조정리 합체법이라고 할 수 있다.

[보조 정리]

$s \not\in \{x_n : n \in N\} = A$라 하고 A의 상한을 s라 하면 모든 자연수 n에 대하여 $x_n < s$이고, $x_n < x_{n_k} < s$을 만족하는 자연수 k가 존재한다.

왕룡 : $s \not\in \{x_n : n \in N\} = A$라 하고 A의 상한을 s라 하면 모든 자연수 n에 대하여 $x_n < s$이고, $x_n < x_{n_k} < s$을 만족하는 자연수 k가 존재합니다. $x_{n_1} < s$을 만족하는 $n_1 \in N$을 고르고, 다시 $x_{n_1} < x_{n_2} < s$을 만족하는 $n_2 \in N$을 고르고 이러한 과정을 계속 반복해 나가면 $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} < \cdots < x_{n_{k-1}} < x_{n_k} < s$을 만족하는 $n_k \in N$을 고를 수 있으므로 수열 $\{x_n\}$의 부분수열 $\{x_{n_k}\}$을 찾을 수 있어요. 이 때 수열 $\{x_{n_k}\}$은 증가수열이고 위로 유계이므로 단조 수렴 정리에 의해 $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = s$가 됩니다.

(8) 수학적 예의 요약

이 수학적 예에서는 Bolzano-Weierstrass정리의 특수한 경우인 유계인 수열의 상한에 수렴하는 부분 수열이 존재하기 위해 어떤 조건이 필요한지를 해결해 나가는 과정을 묘사하였다. 학생들은 최초의 추측으로 시작해서 자신들의 주장이 옳다는 것을 보여주는 증명을 하였다. 이러한 추측과 증명에 대해 교사는 반례를 제시하였고 학생들은 처음에는 이 반례를 괴물로 간주하여 배제(괴물 배제)하려 하였고, 또 정리를 성립시켜주는 영역에서 반례를 몰아내려고 노력하였다(예외 배제). 결국 학생들은 최초 추측에 대한 증명과 교사가 제시한 반례를 분석(증명 분석)하고 보조 정리를 추가(보조 정리 합체)함으로서 최초 추측을 개선하였다.

Ⅳ. 결 론

Lakatos의 증명과 반박의 과정은 앞에서 본 수학적 예에서처럼 학생들의 수학 활동을 통해 수학적 사고력을 신장시켜 나가는 과정을 아주 잘 묘사하고 있다. 과거의 수학자들이 그랬듯이, 의미 있는 수학적 사고의 신장시키기 위한 학생들의 수학적 활동은 괴물 배제, 예외 배제, 증명분석을 통한 보조 정리 합체와 관련이 있었다. 봉진이의 추측도 수학적 사고의 과정을 통해 이끌어 낸 결과이긴 하지만 왕룡이의 증명을 분석하여 개선된 추측이나 증명의 수정을 이끌어 내는 데에는 적당하지 않았기 때문에 무시되었다. 그리고 학생들은 최초 추측에서부터 증명과 반박의 과정을 거쳐 개선된 추측이 제시되기까지 토론이라는 수학적 활동을 함으로서 수학적 감각을 기를 수 있었다. 결국 개선된 추측은 학생들의 기존에 가지고 있던 지식을 바탕으로 추측을 하고 증명을 하며 교사의 반례와 자신의 증명을 분석함으로서 한 단계 높은 수준의 지식으로 발전할 수 있었다.

제 7차 교육 과정에서 수학교과의 중요한 목표 중 하나는 문제 해결력의 신장이며 그러한 문제해결을 능동적으로 하기 위해서는 수학적 사고가 절대적으로 필요하다. 즉, 학생들의 비판적이고 능동적인 수학적 사고 교육이 수학 교육의 본질이라 할 수 있다. 문제란 분명하게 인식된 목표가 있으나 그에 이르는 수단이나 과정이 알려져 있지 않으며 그를 발견하기 위해서는 상당한 노력과 어려움이 수반되는 상황이다(우정호. 2007). 그렇기 때문에 수학 수업은 Lakatos의 증명과 반박의 과정에서처럼 문제를 파악하여 창의적인 추측과 논리적인 증명의 과정을 거쳐, 그 증명을 검사하고 토론하여 반성하는 방식으로 이루어져야 할 것이다. 교사는 Lakatos의 증명과 반박의 과정에서처럼 학생들의 다양한 발상을 이끌어냄으로서 사고의 유연성을 기르고 추론의 힘을 기를 수 있도록 즉, 수학적 사고를 신장시킬 수 있는 수업을 진행하여야 할 것이다. 본 논문에서는 문제를 해결하는 Lakatos의 증명과 반박의 과정을 통해 각각의 단계에서 학생들이 어떻게 수학적 사고를 형성하는지에 대해서 알아보았다. 수학적 사고력을 기르기 위해서 우리는 어떠한 교육과정을 도입해야하고 수업방식은 어떻게 바뀌어야 할지, 학생들은 어떠한 마음가짐으로 수학 학습을 해야 할지에 대해서 앞으로 연구해야 할 것이다.

참 고 문 헌

강문봉 (1993). Lakatos의 수리철학의 고찰, 서울대학교 교육대학원, 박사학위 논문.

강문봉·강홍규·김수미·박교식·박문환·서동엽·송상헌·유현주·이종영·임재훈·정동권·정은실·정영옥 (2007). 초등수학교육의 이해, 서울 : 경문사.

강시중 (1998). 수학교육론, 서울 : 교육출판사.

강옥기·조현공·허난 (2005). 수학 서평, 서울 : 성균관대학교 출판부.

강완·백석윤 (2000). 초등수학 교육론, 경기도 파주 : 동명사.

김응태·박한식·우정호 (2007). 수학 교육학 개론, 서울 : 서울대학교 출판부.

남승인 (2000). 수학적 사고력 신장을 위한 규칙성 영역의 학습 자료 개발, 과학·수학교육 연구, **23**, pp.91-121.

류시규·김희정 (2000). 추측과 반박을 통한 수학적 발견 논리, 교육문제연구(The Journal of Educational Theory and Practice), **15**, pp.138-163.

류희찬·조완영·김인수 (2003). 고등 수학적 사고, 서울 : 경문사.

우정호 (2007). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울 : 서울대학교 출판부.

우정호 (2007). 학교 수학의 교육적 기초, 서울 : 서울대학교 출판부.

이용률·성현경 (1994). 수학교육론, 서울 : 교학 연구사.

황혜정·나귀수·최승현·박경미·임재훈·서동엽 (2007). 수학 교육학 신론, 서울 : 문음사.

Sean Lasen & Michelle Zandieh (2007). Proof and refutation in the undergraduate mathematics classroom, *Educational Studies in Mathematics*, **67**, pp.205-216.

Research about comparison on Lakatos' proofs and refutations with students' mathematical thinking

You, Hyun-Seung
Kyungsung University, Busan 608-736, Korea
E-mail : ssiregiback@hanmail.net

Lee, Byung-Soo
Kyungsung University, Busan 608-736, Korea
E-mail : bslee@ks.ac.kr

In problem solving, the necessity of mathematical thinking is absolute. In this paper, with an established theory about mathematical thinking, we will try to observe how the students can form mathematical thinking through a mathematical example in mathematical class by using Lakatos' process of proofs and refutations.

* ZDM Classification : C35
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : Mathematical thinking, proofs and refutations