韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 22집 제 3호, 2008. 9. 311-335

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 22, No. 3, Sep. 2008. 311-335

대학수학에서 정의, 공식, 정리의 이해도 검사[1)]

김 병 무 (충주대학교)

정의의 정확한 이해, 수학개념의 이해, 정리나 공식의 이해와 활용에 대해 이해력의 수준을 알아보기 위해 학생들에게 이들에 관한 문제를 이용한 검사를 하고 수학의 기본개념과 내용에 대한 이해를 하는데 도움을 줄 수 있는 방법을 정리하면, 1) 검사에 이용된 문제가 정확히 이해도를 측정했는지 깊이 있는 연구가 필요하며, 2) 정의, 공식, 정리의 이해와 활용에 예나 반례를 보이고 조건이 빠지면 변화되는 상황에 대한 설명이 더 체계적이어야 이해의 폭을 넓힐 수 있으며, 3) 새로운 내용이 도입될 경우 기본개념의 중요성을 그 때마다 강조하고 반복 제시를 통해 확실한 이해에 도달하도록 하며, 4) 이해도 측정을 위한 좋은 문제 개발에 노력을 기울이고 대학수학 문제 개발에 수학지도 교수의 관심을 필요로 하며, 5) 학습지도에서 이들 문제를 이용하는 것이 도움을 줄 것이다.

I. 서 론

간단한 계산문제나 문제풀이 문항보다 더 중요한 의미를 갖는 정의의 정확한 이해, 수학개념의 이해, 정리나 공식의 이해와 활용에 대해 이해력의 수준을 알아보기 위해 학생들에게 이들에 관한 문제를 이용한 검사를 하고 수학의 기본개념과 내용에 대한 이해를 하는데 도움을 줄 수 있는 방법을 알아보려고 한다.

이전의 연구 '대학수학에서 함수의 합성과 극한에 대한 이해'(2004, 김병무), '대학수학에 필요한 기초개념의 이해도 측정'(2005, 김병무)보다 다양하고 더 많은 문항을 개발하기 위해 미적분학에서 중요한 극한, 연속과 중간값정리, 도함수, 미분의 응용, 적분에 대해 여러 미분적분학 교재(1992, George B. Thomas, Jr. & Ross L. Finney/ 2005, Howard Anton, Irl Bivens and Stephen Davis/ 2006, 김병무/ 2006, James Stewart/ 2007, Dennis G. Zill & Jacqueline M. Dewar/ 2007, Salas Hille Etgen)와 외국대학의 시험문제에서 대학수학 학습에 필요한 기본이 되는 용어의 정의, 공식, 정리등을 이용한 문제를 정선하여 2007학년도 2학기 미분적분학을 수강한 1학년 학생에게 중간고사시 부록의 문제 극한(부록1), 연속과 중간값정리(부록2)와 기말고사시 도함수(부록3), 미분의 응용(부록4), 적분(부록5)에 대한 이해도 검사를 2회로 나누어 실시하였다. 이해도 검사 결과를 (부록1)-(부록5) 전체

---

1) 이 논문은 2008년도 충주대학교 교내 학술연구비의 지원을 받아 수행한 연구임.
* 2008년 8월 투고, 2008년 9월 심사 완료
* ZDM 분류 : D35
* MSC2000 분류 : 97D70
* 주제어 : 기본개념의 이해도, 정의, 공식과 정리의 이해, 대학수학 학습.

에 대해 알아보고 특히 정답율이 20%에 미치지 못하는 문항들에 대해 문항과 정답율을 함께 제시하여 이해를 돕는 방법을 찾아본다.

전반적인 검사 결과는 정답율이 30%대에 머물렀고 중간, 기말고사시 문제풀이의 경우와 달리 개념의 이해문제를 더 어려워했으며 일부 학생에 대한 조사이지만 수학과 학생의 경우(50%)도 마찬가지로 어려워했다. 평소에 시험을 통해 접해보지 못한 문제가 다소 어려움을 주었다고 여겨지며 가르치는 입장에서 중요하다고 강조한 내용들이 받아들이는 학생입장에서는 다른 느낌으로 받아들인 것으로 생각된다.

한편, 고등학교에서 미분적분학을 이수한 2008학년도 1학기 대학수학 수강생중 성적이 상위 10%에 해당하는 학생을 선정하여 문제를 매주 한 주제씩 풀게 하고 정답을 맞춘 후 인터뷰를 하며 틀린 문제에 대해 의견을 교환하였다. 대답은 문제풀이 중심에서 개념의 이해 중심으로 바뀌어 어려움이 더했으나 푸는 동안 정의나 개념, 기본정리에 충실하게 대응하게 되고 이해에 도움을 받았다. 이와 같은 문제를 처음 대하게 되어 당황스럽지만 잘 활용하게 되면 기본개념 이해에 많은 학생들이 도움을 받을 것이라 하였다.

정답율을 문항별로 제시하고 정답율이 낮은 문항에 대해 그 이유를 살펴보고 적절한 대책을 세우는 한편, 바람직한 학습태도와 교수방법의 개선점을 검토하여 대학수학 지도에 활용하려고 한다.

II. 본 론

충주대학교 공학계열 신입생들의 수학 기초학력(중2-고1과정) 테스트 결과는 1034명(응시율 95%)이 응시하고 평균은 46.82점이었다.

극한(부록1), 연속과 중간값정리(부록2), 도함수(부록3), 미분의 응용(부록4), 적분(부록5)에 대한 이해도 검사를 2007학년도 2학기 충주대학교 미분적분학을 수강(선행학습으로 일반수학 수강)한 1학년 학생들에게 실시하고, 그 결과에 대해 대상 학생수, 문항수, 점수의 합계, 맞은 개수의 평균, 정답율(%)을 나타낸 것은 다음 표와 같다.

<표 1> 이해도 검사 결과

이해도 검사	학생수	문항수(정답율:%)		맞은 문항의 총개수	평균/전체 문항수	정답율(%)
		선다형	참, 거짓			
극한	96	8(27)	6(41)	443	4.61/14	33
연속과 중간값정리	96	4(37)	7(35)	377	3.93/11	36
도함수	95	24(34)	0	764	8.04/24	34
미분의 응용	95	14(35)	5(28)	600	6.25/19	33
적분	95	15(23)	9(34)	624	6.57/24	27
합계	477	65(29)	27(33)	2808	5.89/92	31

전체적인 정답율은 31%이고 적분의 경우 정답율이 27%로 가장 낮았으며, 확률적으로 선다형이 정답율이 낮을 것으로 보였으나 연속과 중간값정리에서 2%, 미분의 응용에서 7% 높았다. 한편, 쉬운 문항으로 출제하여 정답율이 50% 이상을 넘을 것으로 예상되었으나 결과는 이해도에서 어려움을 갖고 있음이 나타났다.

이해도 검사 결과를 각 주제별로 자세히 알아보고 특히 정답율이 높을 것이라 의도했는데 의외로 정답율이 낮아 더 문제를 분석하고 생각을 요하는, 정답율이 20%(저자의 기준)에 미치지 못하는 학생들에게 어려움을 준 문항을 소개하면 다음과 같다.

1. 극한에 대한 이해도 검사

(부록1)의 극한에 대한 이해도 검사는 충주대학교 1학년 학생 96명과 충남대 수학과 2, 3학년 학생 24명에 대해 실시되었고 정답자수와 정답율(%)은 표와 같다.

<표 2> 극한에 대한 이해도 검사 결과(충주대-96, 충남대-24)

문항		1	2	3	4	5	6	7	8	9-1	9-2	9-3	9-4	9-5	9-6	평균
충주대	정답자수	19	9	13	28	27	23	34	52	58	23	41	58	30	28	4.61
	정답율	20	9	14	29	28	24	35	54	60	24	43	60	31	29	33
충남대	정답자수	16	14	9	20	5	10	19	16	21	12	21	23	5	2	8.04
	정답율	67	58	38	83	21	42	79	67	88	50	88	96	21	8	57

극한에 대한 이해도 검사는 14개 문항으로 정답율이 평균 33%이고, 8개 문항은 선다형으로 함수의 정의, 함수의 극한의 정의와 관련된 문항, 극한값을 갖기 위한 조건의 이해, 유리함수의 경우 부정형의 극한값을 계산하는 과정의 이해, 함수의 그래프와 수평점근선 극한값의 관계의 이해, 유리함수의 극한값을 두 함수의 기울기의 비로 이해하는 문제이며, 6개 문항은 참, 거짓을 구별하는 문항으로 $\infty-\infty$꼴의 부정형의 극한값 구하기, 함수의 곱으로 무한소의 극한값, 두 함수의 상등조건, 극한값이 정의, 극한의 의미, 함수의 그래프가 수평점근선을 지날 수 있는지 알아보는 문항이다.

여기서는 정답율이 20%이하인 문항에 대해 자세히 알아본다.

문항1은 정답율이 20%인 '두 함수가 같다.'의 정의를 이해하는 문항으로 '모든 실수 x와 u에 대하여 f는 $f(x)=\sin x+\cos x$로 정의된 함수이고, g는$g(u)=\sin u+\cos u$로 정의된 함수라 하면, ㄱ) **f와 g는 정확히 같은 함수이다.** ㄴ) x와 u 서로 다른 수라면, f와 g는 서로 다른 함수이다. ㄷ) f와 g가 같은지를 결정하는데 충분한 정보가 주어지지 않는다.'를 함수를 $f(x)$와 $g(u)$로 정의하여 혼동을 초래한 것으로 보인다.

문항2는 정답율이 9%인 극한의 정의에 관한 문항으로 정답율이 제일 저조한 문항이었다. '$\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하는지 또는 존재하지 않는지는 $f(a)$가 어떻게 정의되느냐에 달려있다.'는 것은 참

이다. ㄱ) 때때로 ㄴ) 항상 **ㄷ) 전혀 아니다**'로 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재하는 것은 $f(a)$와 관계없음을 잘 모르고 있었다.

문항3은 정답율이 14%로 문항2와 같이 함수 f가 $x=a$에서 정의되지 않으면 극한값을 갖는가에 대한 물음으로 '함수 f가 $x=a$에서 정의되지 않으면 ㄱ) $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재할 수 없다. **ㄴ) $\lim_{x \to a} f(x)$가 0이 될 수 있다.** ㄷ) $\lim_{x \to a} f(x)$가 ∞로 발산해야 한다. ㄹ) 위의 어느 것도 아니다.'로 수학논총(김홍규, 2007)의 분석을 인용하면 이 문제의 풀이에 참여한 학생 3명, 교사 2명의 판단은 다음과 같았다.

대상	선택한 답	판단 근거와 의견	비고
A	ㄷ)	함수값이 정의되지 않으니까 극한값은 발산해야 한다.	자연계열 고3 나형 선택자 2008 수능 60점
B	ㄴ)	0이 될 수 있다는 말이 애매하다.0일 때가 있다는 의미로 해석한다면 답은 ㄴ)이다.	자연계열 고3 가형 선택자 2008 수능 89점
C	ㄹ)	가정이 옳다고 해도 항상 $\lim_{x \to a} f(x)$가 0이 될 수 있는 것은 아니다.	자연계열 고3 나형 선택자 2008 수능 100점
D	ㄴ)	결론은 존재성을 말하는 것으로 0인 경우가 하나라도 있으면 되는 것이다.	고3 지도 수학교사
E	ㄴ)	통념적으로 0일 때가 있다는 의미로 해석할 수 있다. 그러나 극한값을 특정한 값 0으로 지정한 것은 문제가 있다.	고3 지도 수학교사

평균 정답율이 57%인 충남대 수학과 학생들이 충주대 1학년 학생들보다 정답율이 낮은 문항에 대해 알아본다.

문항5는 정답율이 충남대21%, 충주대28%이고 '$\lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$이 극한값이 존재하지 않는 이유는 **ㄱ) x가 0에 가까이 가더라도 $\sin\frac{1}{x}=1$이 되고, $\sin\frac{1}{x}=-1$이 되는 0 가까이에 있는 어떤 x가 존재하기 때문이다.** ㄴ) 함수값이 0 가까이서 진동하기 때문이다. ㄷ) $\frac{1}{0}$은 정의되지 않기 때문이다. ㄹ) 위의 모든 것이 성립하기 때문이다.'로 $\lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$이 극한값이 존재하지 않는 이유를 알아보았다.

참, 거짓을 묻는 다음 두 문항에 대해 충남대 수학과 학생이 정답율이 낮아 내용을 알아보면 참, 거짓에 대해 충주대 학생들은 이유 없이 답을 선택했고 충남대 학생들은 반례를 찾지 못해 답을 선택하여 예상 밖의 결과를 얻었다. 더 깊은 분석은 충남대 학생들과 인터뷰를 하여 알아보아야 하나

사정이 허락되지 않아 기회가 되면 충남대 교수님께 부탁하여 그 이유를 알아보려 한다.

문항 9-5는 정답율이 충남대21%, 충주대31%로 '$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$은 t가 u보다 a에 더 가까이 간다면, $f(t)$가 $f(u)$보다 L에 더 가까이 갈 수 있음을 의미한다.'로

거짓으로 반례는 $f(x)=\begin{cases}2x, & x\ge 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0,\ t=0.25,\ u=-0.25$이다.

문항 9-6은 정답율이 충남대8%, 충주대29%로 '함수의 그래프는 그 함수의 수평점근선을 지날 수 있다.'로 **참**이며 예를 들면 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$의 그래프는 수평점근선 $y=0$을 지난다.

2. 연속과 중간값정리에 대한 이해도 검사

(부록2)의 연속과 중간값정리에 대한 이해도 검사는 충주대학교 1학년 학생 96명과 충남대 수학과 2, 3학년 학생 24명에 대해 실시되었고 정답자수와 정답율(%)은 표와 같다.

<표 3> 연속과 중간값정리에 대한 이해도 검사 결과

문항		1	2	3	4	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6	5-7	평균
충주대	정답자수	29	57	52	3	40	35	23	25	52	31	30	3.93
	정답율	30	59	54	3	42	36	24	26	54	32	31	36
충남대	정답자수	7	7	21	5	10	16	9	6	14	7	13	4.79
	정답율	29	29	88	21	42	67	38	25	58	29	54	43

연속과 중간값정리에 대한 이해도 검사는 11개 문항으로 정답율이 평균 36%이고, 4개 문항은 선다형으로 실생활에서 연속함수의 독립변수를 무엇으로 하느냐에 따라 달라지는 경우, 다항함수가 연속함수이다의 대우를 묻기, 연속함수의 극한의 성질을 이용 무리수의 근사값 구하기이며, 7개 문항은 참, 거짓을 구별하는 문항으로 실생활에서 계단함수의 예를 들어 극한값 구하기, 실생활에서 중간값정리를 적용하는 문제와 중간값정리가 성립하기 위한 조건의 연속함수 이해하기, 연속의 정의를 부분구간으로 정의된 함수에서 확인하는 문항이다.

여기서 정답율이 20% 이하인 **문항4**는 정답율이 4%인 연속함수의 성질을 이용하는 문항으로 '무한소수 $e=2.71828.....$을 제곱하여 e^2을 추정하기로 여러분이 결정한다면 ㄱ) e가 유리수이므로 좋은 생각이다. **ㄴ) $y=x^2$은 연속함수이므로 좋은 생각이다.** ㄷ) e가 무리수이므로 좋은 생각이 아니다. ㄹ) $y=e^x$는 연속함수이므로 좋은 생각이다.'로 충남대 학생들의 정답율도 연속과 중간값정리에 대한 이해도 검사 문항중 가장 낮은 21%이고 전체적인 정답율이 극한에 대한 이해도 검사 문항보다 낮다.

3. 도함수에 대한 이해도 검사

(부록3)의 도함수에 대한 이해도 검사는 충주대 1학년 학생 95명에 대해 실시되었고 정답자수와 정답율(%)은 표와 같다.

<표 4> 도함수에 대한 이해도 검사 결과

문항	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	평균
정답자수	18	40	9	46	35	35	28	28	26	29	50	39	44	36	34	40	6	11	21	41	17	45	54	32	32
정답율	19	42	9	48	37	37	29	29	27	31	53	41	46	38	36	42	6	12	22	43	18	47	57	34	34

도함수에 대한 이해도 검사는 24개 문항으로 정답율이 평균 34%이고, 24개 문항 모두 선다형으로 미분계수와 접선의 관계, 접선의 식이 자신이 되는 경우, 원의 넓이에 평균변화율 적용, 미분가능의 정의 이해, 실생활에 변화율 적용, 미분계수의 정의 활용, 미분가능과 연속의 관계, 구간에서 미분가능의 의미 해석, 변수와 상수를 혼동하지 않기, 함수가 연속이면 미분가능하다의 대우, 거리와 속도에 미분의 의미 부여하기, 미분계수의 계산에 도함수 이용, 도함수 구하기에서 변수의 기호 확인, 순간변화율의 변수 표현 주의하기, 몫으로 주어진 식에 함수표현이 있을 때 도함수 구하기, 극한값과 미분계수의 관계, 고차도함수 계산 결과의 표현, 삼각함수 도함수의 여러 등식 표현, 도함수의 정의의 다양한 표현 이해, 변수의 착오를 혼동하지 않는 도함수 구하기, 합성함수의 도함수 표현 이해, 변수의 변화에 따른 도함수 표현의 이해, 역삼각함수의 도함수 구하기 등이다.

여기서 정답율이 20% 이하인 문항들을 알아본다.

문항1은 정답율이 19%인 미분가능과 접선의 관계를 묻는 문항으로 '점 (0, 0)에서 $f(x)=|x|$의 그래프는?

ㄱ) $y=0$의 접선을 갖는다. ㄴ) 무수히 많은 접선을 갖는다. **ㄷ) 접선을 갖지 않는다.**

ㄹ) $y=-x$와 $y=x$의 두 접선을 갖는다.'이다.

문항3은 정답율이 9%인 평균변화율의 정의에 대한 이해를 묻는 문항으로 '원의 반지름의 길이가 r_1에서 r_2로 증가하면 원의 넓이의 평균 변화율은?

ㄱ) $2\pi r_2$보다 작다. ㄴ) $2\pi r_1$보다 크다. ㄷ) $2\pi\frac{r_1+r_2}{2}$와 같다. **ㄹ) 앞의 것이 모두 맞다.**'이다.

문항17은 정답율이 6%로 정답율이 가장 낮은 sine함수의 고차도함수를 묻는 문항인 $f(x)=\sin x$이면, ㄱ) $f(x)=f'''(x)$ ㄴ) $f(x)=-f^{\circ}(x)$ ㄷ) $f'(x)=\cos x$ **ㄹ) 앞의 것 모두 맞다.**'이다.

문항18은 정답율이 12%로 코사인이배각의 공식과 관련된 도함수 문항으로 '$f(x)=\sin x\cos x$이면 $f'(x)$는?

ㄱ) $1-2\sin^2 x$ ㄴ) $2\cos^2 x-1$ ㄷ) $\cos 2x$ **ㄹ) 앞의 것 모두 맞다.** ㅁ) 답 없음.'이다.

문항21은 정답율이 18%로 삼각함수와 지수함수의 도함수를 구하는 것 같지만 변수에 유의하면 단순한 문항으로 '$\frac{d}{dr}(\sin x+e^{\sin x})$는?

ㄱ) $\cos x+e^{\cos x}$ ㄴ) $\cos x+e^{\sin x}\cos x$ ㄷ) $\cos r+e^{\sin r}\cos r$ **ㄹ) 충분한 정보 없음.**'이다.

4. 미분의 응용에 대한 이해도 검사

(부록4)의 미분의 응용에 대한 이해도 검사는 충주대 1학년 학생 95명에 대해 실시되었고 정답자수와 정답율(%)은 표와 같다.

<표 5> 미분의 응용에 대한 이해도 검사 결과

문항	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15-1	15-2	15-3	15-4	15-5	평균
정답자수	25	47	30	39	45	36	27	55	31	32	25	37	21	17	26	41	11	18	37	32
정답율	26	49	32	41	47	38	28	58	33	34	26	39	22	18	27	43	12	19	39	33

미분의 응용에 대한 이해도 검사는 19개 문항으로 정답율이 평균 34%이고, 14개 문항은 선다형으로 여러 변수가 주어질 때 변화율의 표현, 변수들 사이의 변화율 관계 표현, 도함수의 성질의 이용 문제 해결, 최대, 최소값의 정리의 이해, 실생활에 미분을 이용한 문제 해결, 변화율의 활용을 통한 실생활 문제 해결, 평균변화율 이용 실생활 문제 해결, 변화율의 그래프 표현, 중간값ㅇ의 정리와 도함수의 간계, 변화율의 비교 표현, 극한값 계산에 로피탈정리 이용이며 5개 문항은 참, 거짓을 구별하는 문항으로 연속과 최대, 최소값의 정리의 이해, 도함수의 성질의 이용과 이해, 변곡점과 이차도함수의 관계, 평균값정리와 미분가능의 관계 이해, 도함수의 성질의 이용과 극값의 관계등이다.

여기서 정답율이 20% 이하인 문항들을 알아본다.

문항14는 정답율이 18%로 로피탈의 정리를 이용하여 극한값을 구하는 문항으로 '$\lim_{x\to\infty}(xe^{\frac{1}{x}}-x)$의 극한값은?

ㄱ) $\infty-\infty$가 존재하지 않으므로 존재하지 않는다. **ㄴ) 1에 수렴한다.**

ㄷ) $xe^{\frac{1}{x}}$이 x보다 더 빨리 커지므로 ∞이다. ㄹ) 0에 수렴한다.'이다.

문항15-3은 정답율이 12%로 참, 거짓을 답하는 변곡점을 이차도함수에 의해 판정하는 방법을 묻는 문항으로 '$f''(a)=0$이면, f는 a에서 변곡점을 갖는다.'로 **거짓**이다.

문항15-4는 정답율이 19%로 평균값의 정리의 가정 미분가능성의 이해를 묻는 문항으로'구간

$\left[-\frac{1}{2},\ 2\right]$에서 $f(x)=|x|$인 함수에 대해 $f'(c)=\dfrac{f(2)-f(-\frac{1}{2})}{2-(-\frac{1}{2})}$인 c를 찾을 수 있다.'로 **거짓**이다.

5. 적분에 대한 이해도 검사

(부록5)의 적분에 대한 이해도 검사는 충주대 1학년 학생 95명에 대해 실시되었고 정답자수와 정답율(%)은 표와 같다.

<표 6> 적분에 대한 이해도 검사 결과

문항	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16-1	16-2	16-3	16-4	16-5	16-6	16-7	16-8	16-9	평균
정답자수	23	33	20	10	13	30	30	29	27	47	16	35	4	4	9	13	37	34	32	37	35	34	32	40	26
정답율	24	35	21	11	14	32	32	31	28	49	17	37	4	4	9	14	39	36	34	39	37	36	34	42	27

적분에 대한 이해도 검사 문항은 24개 문항이고 정답율은 평균 27%로 5개 분야 중 가장 낮다. 15개 문항은 선다형으로 원시함수와 도함수의 관계, 적분에 대한 평균값의 정리와 넓이의 관계, 실생활 문제의 구분구적법 이용 부피구하기, 정적분값의 정의의 의미 이해, 구분구적법과 정적분의 관계, 실제 움직인 거리의 정적분 표현이해, 미적분학의 기본정리의 다양한 표현 알기, 원시함수와 적분의 관계, 피적분함수의 부호와 정적분의 부호 관계, 그래프로 나타내어진 함수와 정적분의 표현, 평균속도의 적분표현, 치환적분과 미분법과의 관계 이해, 변화율과 적분 표현, 넓이의 계산과 적분 표현이고, 9개 문항은 참, 거짓을 구별하는 문항으로 가속도, 속도와 위치의 관계, 원시함수와 적분관계, 합의 원시함수와 적분관계, 곱의 원시함수와 적분관계, 구분구적법 이용 길이 구하기, 연속함수와 적분가능성의 이해, 적분과 피적분함수의 관계, 도함수와 원시함수 관계, 적분에 대한 평균값의 정리 이해이다.

여기서 정답율이 20% 이하인 문항들이 7개 문항으로 제일 많고, 이들에 대해 알아본다.

문항4는 정답율이 11%로 정적분의 정의와 관련된 문항으로 '다음 (i), (ii), (iii), (iv)를 읽고 맞는 것을 고르시오. 함수 f가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이면,

(i) $\int_a^b f(x)dx$는 f의 그래프와 x축, 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 넓이이다.

(ii) $\int_a^b f(x)dx$는 수이다. (iii) $\int_a^b f(x)dx$는 $f(x)$의 원시함수이다.

(iv) $\int_a^b f(x)dx$는 존재하지 않을 수도 있다.

ㄱ) (ii)만 성립. ㄴ) (i)과 (ii)만 성립. ㄷ) (i)과 (iii)만 성립. ㄹ) (iv)만 성립.'이다.

문항5는 정답율이 14%로 구분구적법과 정적분의 관계를 다룬 문항으로 '그림과 같이 반지름의 길이 r인 원모양의 디스크를 각을 θ_i로 표시한 n개의 부채꼴로 자른다($\theta_0 = \theta_n$은 각 0으로 생각한다). 두 각 θ_i와 θ_{i+1} 사이의 부채꼴의 넓이는 $\Delta\theta = \theta_{i+1} - \theta_i$라면 $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$이다. $A_n = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$라 하면 디스크의 넓이 A는?

ㄱ) A_n은 디스크를 얼마나 많은 부채꼴로 자르든지 독립이다. ㄴ) $\lim_{n\to\infty} A_n$

ㄷ) $\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2 d\theta$ **ㄹ) 위의 모두 맞다**.'이다.

문항11은 정답율이 17%로 평균속도의 정의와 속도와 위치의 관계를 묻는 문항으로 "여러분이 구간 $[a, b]$에서 연속적으로 변하는 속도 $v(t)$로 움직이고 있고, 시간 t에서 위치가 $s(t)$로 주어진다. 그 시간 구간에서 다음의 어느 것이 여러분의 평균속도를 나타내는가?

(I) $\dfrac{\int_a^b v(t)dt}{b-a}$ (II) $\dfrac{s(b)-s(a)}{b-a}$ (III) a와 b 사이의 적어도 한 c에 대해 $v(c)$

ㄱ) I, II와 III. ㄴ) I만. ㄷ) I과 II만.'이다.

문항13은 정답율이 가장 낮은 4%로 변화율의 적분 표현을 묻는 문항으로 '원모양의 세포의 넓이가 반지름의 길이 r의 함수로서 변하고 그 반지름의 길이는 시간의 함수 $r = g(t)$로 변한다. $\frac{dA}{dr} = f(r)$이면, $t = 0$과 $t = 1$ 사이의 넓이 ΔA의 전체 변화율은?

ㄱ) $\Delta A = \int_{\pi(g(0))^2}^{\pi(g(1))^2} dA$이다. ㄴ) $\Delta A = \int_{g(0)}^{g(1)} f(r)dr$이다.

ㄷ) $\Delta A = \int_0^1 f(g(t))g'(t)dt$이다. **ㄹ) 앞의 모두 맞다**.'이다.

문항14 또한, 정답율이 가장 낮은 4%로 변화율의 적분 표현을 묻는 문항으로 '원모양의 세포의 반지름의 길이 r이 시간 t에 따라 변한다. $r(t) = \ln(t+2)$이면, 다음 어느 것이 $t = 0$과 $t = 1$ 사이에서 일어나는 세포의 넓이 ΔA의 변화율을 나타내는가?

ㄱ) $\triangle A = \pi(\ln 3)^2 - \pi(\ln 2)^2$이다. ㄴ) $\triangle A = \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2\pi r dr$이다.

ㄷ) $\triangle A = \int_0^1 2\pi \frac{\ln(t+2)}{t+2} dt$이다. **ㄹ) 앞의 모두 맞다.**'이다.

문항15는 정답율이 9%로 정적분의 치환에 관한 문항으로 '단위원의 넓이의 $\frac{1}{2}$을 계산하는 한 방법은 $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$이다. 그림에서 t는 각을 나타낸다면, 반원의 넓이는?

ㄱ) $\int_0^{\pi} (-\sin t)dt$이다. ㄴ) $\int_0^{\pi} (-\sin^2 t)dt$이다.

ㄷ) $\int_{\pi}^{0} (-\sin^2 t)dt$이다. ㄹ) $\int_0^{\pi} (-\cos t)dt$이다.'이다.

문항16-1은 정답율이 14%로 참, 거짓을 구별하고 그 이유를 설명하거나 반례를 보이는 문항으로 '물체의 가속도 함수 $a(t)$가 연속이고 $v(0)=1$이라 하면, 임의의 시간 t에서 물체의 위치를 알 수 있다.'로 **거짓**이다.

III. 결 론

1. 이전의 연구결과와 일반적인 제언

'대학수학에서 함수의 합성과 극한에 대한 이해'(2004, 김병무)의 연구 결과는 정답율이 7.5%에 불과하여 같은 설문지에 대해 각자 공부하고 대답하도록 2차 조사를 하고, 함수의 합성과 합성함수의 극한에 대해 개념의 이해를 도우려고 그래프를 이용한 자료를 수집하여 확실하고 쉽게 이해할 기회를 제공하였고, '대학수학에 필요한 기초개념의 이해도 측정'(2005, 김병무)의 연구 결과는 이해도가 낮은 학생들을 위한 새로운 교수법의 필요성을 알게 하고 수학적 기본개념의 이해를 증진시키는데 정의의 정확한 이해를 돕고 구체적인 예제를 제시하는 교수법 개발에 수학교수의 노력을 필요로 하였다. 이번 연구에서도 유사한 결과를 얻었고 이런 문항을 접해본 경험이 없어 문제풀이에 힘들었다는 학생들의 의견을 듣고 중고등학교와 연계 교육의 중요성이 필요함을 더욱 느끼게 되었다.

수학 기초와 기본 용어의 정의, 공식, 정리의 중요성은 아무리 강조해도 수학학습에서 지나 칠 수가 없다(허민,오혜영, 2005). 개념의 이해를 돕기 위해 좀 더 체계적인 문제를 만들고 문항수도 적게 하여 접근하고 학생들의 실력도 상, 중, 하로 구분하여 개념의 이해를 받아들이는 정도를 비교하고 그들에 맞는 교수 방법을 개발하려고 한다.

여기서 제시되고 개발된 예제들이 좋은 문제가 될 수가 없다면 최선의 문제가 되도록 노력을 하

고 개념의 이해를 도와주며 최선의 문제가 될 수 있도록 더 많은 연구가 이루어지고 여러 대학 학생들에 대한 조사를 시도하여 그 결과를 분석하고 더 정선된 문제를 얻도록 노력을 해야 한다. 개념의 이해를 도와주고 성적향상에도 기여하는 문제를 만들어 제시하는 것도 대학수학 학습에 학생들의 참여를 긍정적으로 이끄는 역할을 할 것이다. 끝으로 문제은행을 만드는데 여기서 언급되지 않은 문제 만들기와 개념의 이해에 대한 다른 어려움이나 접근 방법을 지적하여 다양한 대학수학 문제를 만드는데 관심 있는 대학수학 지도교수의 도움이 필요하다.

2. 구체적인 제언

대학수학을 가르치면서 학생들에게 수학에 대한 좋은 인식을 심어주어 쉽고 흥미 있는 과목으로 여기도록 학습지도에서 다양한 접근(2004, 김병무/ 2005, 김병무)을 시도하였으나 연구한 결과가 계속 수업에 활용되기는 어려웠다. 다른 주제로 새로운 연구를 시도하려고 노력을 하게 되면 관심이 바뀌게 되어 대학수학 지도에서 전의 연구를 그대로 이용 못하는 경우가 일어난다.

이번 이해도 검사 문항의 만들기에서 시험을 보고, 채점을 하고, 결과를 분석하고 정리하는데 한 학기가 지나고 가르치는 과정과 별개로 생각하여 예상했던 수준의 결과가 나타나지 않았다. 결과에 대한 체계적인 분석은 너무 어려워 2008학년도 1학기 대학수학을 수강한 학생중 상위 10%에 드는 8명의 학생에게 풀어 보게 한 후 답을 맞춰보며 인터뷰를 하면서 의견을 정리하였다. 이들도 정답율은 조사대상 학생과 비슷하였다. 고교시절 이런 유형의 문제를 다루어 본적이 없어 처음에는 계산적인 문제가 아니라 생소하고 당황스러웠지만 문제를 풀고 틀린 답에 대한 설명을 들으며 문제를 풀어갈수록 정의에 대한 이해도가 높아지고 개념의 중요성을 깨우치게 되었으며 공부하는 방법에서 변화의 필요성이 느껴졌으며 생각을 많이 하게 되었다는 긍정적인 대답이었다. 많은 학생을 대상으로 일일이 답을 대조하고 그 이유를 설명하는 것은 힘이 들어 정답율이 20%에 미치지 못하는 문항들에 대해 반복 설명하고 퀴즈나 간단한 조사를 통해 이해도를 높이는 방법이 효과적이었다.

다시 한번 구체적으로 이해도를 높이기 위한 생각을 정리하면, 1) 검사에 이용된 문제가 정확히 이해도를 측정했는지 깊이 있는 연구가 필요하며, 2) 정의, 공식, 정리의 이해와 활용에 예나 반례를 보이고 조건이 빠지면 변화되는 상황에 대한 설명이 더 체계적이어야 이해의 폭을 넓힐 수 있으며, 3) 새로운 내용이 도입될 경우 기본개념의 중요성을 그 때마다 강조하고 반복 제시를 통해 확실한 이해에 도달하도록 하며, 4) 이해도 측정을 위한 좋은 문제 개발에 노력을 기울이고 대학수학 문제 개발에 수학지도 교수의 관심을 필요로 하며, 5) 학습지도에서 이들 문제를 이용하는 것이 도움을 줄 것이다.

마지막으로 매력적인 문항은 어떻게 만들어야 하는가를 생각해 보고, 간단한 문제라도 수학의 내용을 깊이 있게 받아들일 수 있고 깊이 있게 생각하게 하고 확실하게 이해하지 않으면 개념을 깨닫지 못하는 문항을 만드는 방법이 있는가를 알아보는데 관심 있는 수학 지도자의 의견을 수렴하고 싶

다. 여기 제시된 문항에 대해 평가를 받고 더 좋은 문항 개발을 하는데 도움을 요청한다.

참 고 문 헌

김병무 (2004). 대학수학에서 함수의 합성과 극한에 대한 이해, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **18(1)**, pp.289-296.

김병무 (2004). 대학수학에서 증명문제의 다양한 평가, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **18(2)**, pp.125-132.

김병무 (2005). 대학수학에서 실수를 이용한 학습지도, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **19(1)**, pp.45-55.

김병무 (2005). 대학수학에 필요한 기초개념의 이해도 측정, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **19(1)**, pp.57-68.

김병무 (2006). 미분적분학 기초를 위한 Pre-Calculus, 신성출판사.

김홍규 (2007). 대학 교양수학 운영과 수학에 대한 학생들의 이해, 대한수학회 수학교육논총 **25**, pp.175-180.

허민 · 오혜영 (2005). 수학의 기초와 기본개념, 서울: 경문사.

George B. Thomas, Jr. & Ross L. Finney (1992). *Calculus and Analytic Geometry Part I, II*, Addison-Wesley Publishing Company.

Dennis G. Zill & Jacqueline M. Dewar (2007). *Precalculus with Calculus Previews fourth edition*, Jones and Bartlett Publishers, London, UK.

James Stewart (2006). *Calculus Concepts and Contexts 3E*, Metric Version, Thomson Brooks/Cole.

Howard Anton, Irl Bivens and Stephen Davis (2005). *Calculus Early Transcendentals*, John Wiley & Sons, INC.

Salas Hille Etgen (2007). *Calculus, One and Several Variables tenth edition*, John Wiley & Sons, INC.

A Survey Research on Students's Understanding of Definition, Formula, and Theorem at College Mathematics Classes

Kim, Byung Moo

School of General Arts and Sciences, Chungju National University, Chungju-Shi, Chungbuk, 380-702, Korea

E-mail : bmkim6@hanmail.net

The importance of students' precise understanding of mathematical definitions, formulas, and theorems can not be underestimated. In this survey research, we attempted to evaluate students' understanding of the concepts of five topics -limit, continuity and intermediate theorem, derivative, application of derivative and integral. On the basis of the research result, this paper suggests that we need to 1) be more inventive and speculative in making test problems, 2) explain the examples and counter-examples more concretely, 3) stress and repeat the basic concepts on the stage of introducing new concepts, 4) develop more effective problems for the measure of students' understanding of mathematical concepts, 5) use developed problems in actual teaching.

* ZDM classification : D35

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70

* Key Words : Understanding of Basic Concepts, Understand of Definition, Formula and Theorem, College Mathematics Learning

* 참고로 문제에서 그림과 그래프는 생략한다.

(부록1) 극한에 대한 이해도 검사 문항

* 다음 문제를 읽고 맞는 답을 고르거나 쓰시오.

1. 모든 실수 x와 u에 대하여 f는 $f(x)=\sin x+\cos x$로 정의된 함수이고, g는 $g(u)=\sin u+\cos u$로 정의된 함수라 하면,

ㄱ) f와 g는 정확히 같은 함수이다.

ㄴ) x와 u가 서로 다른 수라면, f와 g는 서로 다른 함수이다.

ㄷ) f와 g가 같은지를 결정하는데 충분한 정보가 주어지지 않는다.

2. "$\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하는지 또는 존재하지 않는지는 $f(a)$가 어떻게 정의되느냐에 달려있다."는 것은 참이다.

ㄱ) 때때로 ㄴ) 항상 ㄷ) 전혀 아니다

3. 함수 f가 $x=a$에서 정의되지 않으면

ㄱ) $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재할 수 없다. ㄴ) $\lim_{x\to a} f(x)$가 0이 될 수 있다.

ㄷ) $\lim_{x\to a} f(x)$가 ∞로 발산해야 한다. ㄹ) 위의 어느 것도 아니다.

4. $\lim_{x\to a} f(x)=0$이고, $\lim_{x\to a} g(x)=0$이면, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$는

ㄱ) 존재하지 않는다. ㄴ) 반드시 존재한다. ㄷ) 정보가 충분하지 않다.

5. $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$이 극한값이 존재하지 않는 이유는

ㄱ) x가 0에 가까이 가더라도 $\sin\frac{1}{x}=1$이 되고, $\sin\frac{1}{x}=-1$이 되는 0 가까이에 있는 어떤 x가 존재하기 때문이다.

ㄴ) 함수값이 0 가까이서 진동하기 때문이다.

ㄷ) $\frac{1}{0}$은 정의되지 않기 때문이다. ㄹ) 위의 모든 것이 성립하기 때문이다.

6. 함수가 가질 수 있는 수평 점근선의 최대 개수는

ㄱ) 1. ㄴ) 2. ㄷ) 3. ㄹ) 무한히 많이 가질 수 있다.

7. $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$은

ㄱ) x가 0에 가까이 가더라도 $\sin\frac{1}{x}=1$이 되고, $\sin\frac{1}{x}=-1$이 되는 0 가까이에 있는 어떤 x가 존재하기 때문에 극한값은 존재하지 않는다.

ㄴ) 함수값이 0 가까이서 진동하기 때문에 극한값은 존재하지 않는다.

ㄷ) $\frac{1}{0}$은 정의되지 않기 때문에 극한값은 존재하지 않는다.

ㄹ) 0이다. ㅁ) 1이다.

8. 두 일차함수 $f(x)$, $g(x)$는 모두 점 $(a, 0)$를 지나며 또, $f(x)$는 $(0, 6)$을 지나고, $g(x)$는 $(0, 3)$을 지날 때 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$는

ㄱ) 2이다. ㄴ) 존재하지 않는다. ㄷ) 정보가 충분하지 않다. ㄹ) 3이다.

9. 다음 명제에 대해 참, 거짓을 구별하고 그 이유를 설명하거나 반례를 들어라.

(1) $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$와 $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$이면, $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=0$이다.

(2) $\lim_{x\to a} f(x)=0$인 성질을 갖는 함수 $f(x)$와 a 가까이에서 정의되는 함수 $g(x)$에 대해 $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=0$이다.

(3) $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$이고, $g(x)=x+2$이면, 함수 f와 g는 같다고 말할 수 있다.

(4) x가 100까지 증가할 때 $f(x)=\frac{1}{x}$은 0에 점점 더 가까이 간다, 따라서 $\lim_{x\to 100} f(x)=0$이라고 쓸 수 있다.

(5)$\lim_{x\to a} f(x)=L$은 t가 u보다 a에 더 가까이 간다면, $f(t)$가 $f(u)$보다 L에 더 가까이 갈 수 있음을 의미한다.

(6) 함수의 그래프는 그 함수의 수평점근선을 지날 수 있다.

(부록2) 연속과 중간값정리에 대한 이해도 검사 문항

* 다음 문제를 읽고 맞는 답을 고르거나 쓰시오.

1. 수도꼭지에서 정확히 매1초 간격으로 욕조에 1밀리리터의 물이 떨어진다. f는 시간 t에서 욕조의 물의 부피를 나타낸다.

ㄱ) f는 매시간 t에서 연속함수이다.

ㄴ) f는 물이 욕조에 떨어지는 정확한 순간 이외의 모든 t에 대해 연속함수이다.

ㄷ) f는 어떤 시간 t에 대하여도 연속이 아니다.

ㄹ) f가 연속인지에 대해 알려진 정보가 충분하지 않다.

2. 수도꼭지에서 정확히 매1초 간격으로 욕조에 1밀리리터의 물이 떨어진다. g는 욕조의 물의 깊이 x의 함수로서 욕조의 물의 부피를 나타내는 함수이다.

ㄱ) g는 모든 깊이 x에서 연속함수이다.

ㄴ) g가 연속이 아닌 어떤 x가 존재한다.

ㄷ) 어떤 깊이 x에 대해 g는 연속이 아니다

ㄹ) g가 연속인지에 대해 알려진 정보가 충분하지 않다.

3. "$f(x)$가 다항함수이면 $f(x)$는 연속이다."는 참이다. 다음 중 어느 것이 또 참인가?

ㄱ) $f(x)$가 연속이 아니면, $f(x)$는 다항함수가 아니다.

ㄴ) $f(x)$가 연속이면, $f(x)$는 다항함수이다.

ㄷ) $f(x)$가 다항함수가 아니면, $f(x)$는 연속이 아니다.

4. 무한소수 $e=2.71828.....$을 제곱하여 e^2을 추정하기로 여러분이 결정한다면

ㄱ) e가 유리수이므로 좋은 생각이다.

ㄴ) $y=x^2$은 연속함수이므로 좋은 생각이다.

ㄷ) e가 무리수이므로 좋은 생각이 아니다.

ㄹ) $y=e^x$는 연속함수이므로 좋은 생각이다.

5. 다음 명제에 대해 참, 거짓을 구별하고 그 이유를 설명하거나 반례를 들어라.

(1) $P(t)=$어느 주차장에 t시간 동안의 주차요금이고 $P(t)=3000$원/시간이다. 이를테면 여러분이 2시간 1분간 동안 주차했다면 주차요금은 9000원을 지불해야 한다. $\lim_{t\to T}P(t)=P(T)$이다.

(2) 여러분의 키는 정확히 75cm인 적이 있다.

(3) 여러분이 태어났을 때의 몸무게(파운드)와 같은 키(인치)를 갖는 시기가 있다.

(4) 적도 둘레를 따라 똑같은 시간에 정확히 똑같은 온도를 갖는 직경으로 두 개의 정반대되는 지점이 있다.

(5) 농구 시합의 휴식시간에 홈팀의 점수가 35점인 경우가 있다고 하면, 홈팀의 점수가 정확히 25점인 경우가 시합 중 있었다.

(6) $x^{100}-9x^2+1$은 구간 [0, 2]에서 근을 갖는다.

(7) 다음 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$f(x)=0$ (x는 유리수), $f(x)=0$ (x는 무리수)

(부록3) 도함수에 대한 이해도 검사 문항

* 다음 문제를 읽고 맞는 답을 고르거나 쓰시오.

1. 점 (0, 0)에서 $f(x)=|x|$의 그래프는?

ㄱ) $y=0$의 접선을 갖는다. ㄴ) 무수히 많은 접선을 갖는다.
ㄷ) 접선을 갖지 않는다. ㄹ) $y=-x$와 $y=x$의 두 접선을 갖는다.

2. 점 (0, 0)에서 $f(x)=x$의 그래프에 그은 접선은?

ㄱ) $y=0$이다. ㄴ) $y=x$이다. ㄷ) 존재하지 않는다. ㄹ) 무수히 많이 있다.

3. 원의 반지름의 길이가 r_1에서 r_2로 증가하면 원의 넓이의 평균 변화율은?

ㄱ) $2\pi r_2$보다 작다. ㄴ) $2\pi r_1$보다 크다.
ㄷ) $2\pi\dfrac{r_1+r_2}{2}$와 같다. ㄹ) 앞의 것이 모두 맞다.

4. 함수 $f(x)=x^2$(x는 유리수), $f(x)=-x^2$(x는 무리수)에서 $f'(0)$은 존재하는가?

ㄱ) 존재하지 않는다. ㄴ) 반드시 존재한다. ㄷ) 정보가 충분하지 않다.

5. 원기둥 모양의 화병에 물이 차고 있다. 물의 높이는 물이 더 많이 들어옴에 따라 변한다. 화병의 물의 부피에 대한 높이의 순간변화율은?

ㄱ) 일정하다. ㄴ) 반지름의 길이의 세제곱으로 역으로 변한다.
ㄷ) 답하기에 충분한 정보가 되지 못한다.

6. 함수 $f(x)=x|x|$의 $x=0$에서 미분계수는?

ㄱ) 0이다.
ㄴ) $x=0$에서 $|x|$가 미분가능하지 않으므로 존재하지 않는다.
ㄷ) f가 조각함수(piecewise)로 정의되므로 존재하지 않는다.
ㄹ) 좌・우극한이 같지 않으므로 존재하지 않는다.

7. $f'(a)$가 존재하면 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$는?

ㄱ) 반드시 존재한다. 그러나 정확하게 결정할 충분한 정보는 존재하지 않는다.
ㄴ) $f(a)$와 같다. ㄷ) $f'(a)$와 같다. ㄹ) 존재하지 않을 수 있다.

8. 구간 $(a,\ b)$의 모든 x에 대해 $f'(x)$가 존재한다면 다음 네 문항 중 어느 것이 맞는가?

(1) 구간 $(a,\ b)$에서 $f(x)$는 연속이다.
(2) $x=a$에서 $f(x)$는 연속이다.

(3) 구간 $(a,\ b)$의 모든 x에 대해 $f(x)$가 정의된다.

(4) 구간 $(a,\ b)$에서 $f'(x)$가 미분가능하다.

ㄱ) (1)과 (3). ㄴ) (1),(2)와 (3). ㄷ) 모두. ㄹ) 어느 것도 아니다.

9. $\dfrac{d}{dx}(e^7)$은?

ㄱ) $7e^6$ ㄴ) e^7 ㄷ) 0

10. 여러분의 어머니는 "여러분이 저녁을 먹으면, 후식을 먹을 수 있다"고 말합니다. 이 의미는 "여러분이 저녁을 먹지 않으면, 후식을 먹을 수 없다."라는 것을 여러분은 압니다. 여러분의 미적분 지도교수가 "f가 x에서 미분가능하면, f는 x에서 연속이다."라고 말합니다. 이 의미는?

ㄱ) "f가 x에서 연속이 아니면, f는 x에서 미분가능 하지 않다."

ㄴ) "f가 x에서 미분가능하지 않으면, f는 x에서 연속이 아니다."

ㄷ) f가 x에서 연속이 아니라는 것을 아는 것은 f의 도함수가 x에서 존재하는가에 대한 어떤 것을 유도하는데 대한 충분한 정보를 주지 않는다.

11. 속도가 늦은 화물열차가 선로를 칙칙폭폭하며 달리고 있다. x시간 기차가 달린 거리는 함수 $f(x)$로 주어진다. 기차가 움직이고 있는 동안 기술자가 객차 위를 기차가 달리고 있는 방향으로 시속 3km/hr로 걷고 있다. 이 기술자의 지상에 대한 속도는?

ㄱ) $f(x)+3$ ㄴ) $f'(x)+3$ ㄷ) $f(x)-3$ ㄹ) $f'(x)-3$

12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{10}-1}{x-1}$은?

ㄱ) $\dfrac{0}{0}$이 정의되지 않으므로 존재하지 않는다.

ㄴ) $x=1$에서 x^{10}의 도함수이므로 10이다.

ㄷ) $(1)^9=1$이므로 1이다.

13. 그림처럼 반지름의 길이 r인 원모양의 피자에서 잘라낸다고 하면, 각 θ의 크기를 변화시킬 때 조각의 넓이 $A=\dfrac{1}{2}r^2\theta$는 변한다. A'은?

ㄱ) $r\theta$ ㄴ) $\dfrac{1}{2}r^2$ ㄷ) 주어진 정보로부터 결정하는 것은 가능하지 않다.

14. 눈이 녹음에 따라 눈덩어리의 반지름의 길이는 변한다. 눈덩어리의 부피 V에 대한 반지름의 길이 r의 순간변화율은?

ㄱ) $\dfrac{dV}{dr}$ ㄴ) $\dfrac{dr}{dV}$ ㄷ) $\dfrac{dV}{dr}+\dfrac{dr}{dV}$ ㄹ) 정해질 수 없다.

15. $f(1)=1$이고 $f'(1)=3$이면 $\dfrac{d}{dx}\dfrac{f(x)}{x^2}(x=1)$은?

ㄱ) 1 ㄴ) $\dfrac{3}{2}$ ㄷ) -1

16. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$은 다음을 의미한다.

ㄱ) $\dfrac{0}{0}=1$ ㄴ) 점 (0 ,0)에서 $y=\sin x$의 그래프에 그은 접선은 $y=x$이다.

ㄷ) x를 약분할 수 있다. ㄹ) 0 가까이 있는 x에 대해서 $\sin x=x$이다.

17. $f(x)=\sin x$이면,

ㄱ) $f(x)=f''''(x)$ ㄴ) $f(x)=-f^{\circ}(x)$ ㄷ) $f'(x)=\cos x$ ㄹ) 앞의 것 모두 맞다.

18. $f(x)=\sin x\cos x$이면, $f'(x)$는?

ㄱ) $1-2\sin^2 x$ ㄴ) $2\cos^2 x-1$ ㄷ) $\cos 2x$ ㄹ) 앞의 것 모두 맞다. ㅁ) 답 없음.

19. $f(x)=\tan x$이면, $f'(x)$는?

ㄱ) $1+\tan^2 x$ ㄴ) $\cot x$ ㄷ) $-\cot x$ ㄹ) 앞의 것 모두 맞다. ㅁ) 답 없음.

20. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sin(2x+h)-\sin 2x}{h}$는?

ㄱ) $\cos x$ ㄴ) $\cos 2x$ ㄷ) 0 ㄹ) $\dfrac{0}{0}$이 정의되지 않으므로 존재하지 않는다.

21. $\dfrac{d}{dr}(\sin x+e^{\sin x})$는?

ㄱ) $\cos x+e^{\cos x}$ ㄴ) $\cos x+e^{\sin x}\cos x$ ㄷ) $\cos r+e^{\sin r}\cos r$ ㄹ) 충분한 정보 없음.

22. f와 g는 모두 미분가능하고 $h=f\circ g$이면, $h'(2)$는?

ㄱ) $f'(2)\circ g'(2)$ ㄴ) $f'(2)g'(2)$ ㄷ) $f'(g(2))g'(2)$ ㄹ) $f'(g(x))g'(2)$

23. 원의 넓이 $A=\pi r^2$은 반지름의 길이가 변함에 따라 변한다. 반지름의 길이가 시간에 따라 변하면, 시간에 대한 넓이의 변화율은?

ㄱ) $\dfrac{dA}{dr}=2\pi r$ ㄴ) $\dfrac{dA}{dt}=2\pi r+\dfrac{dr}{dt}$ ㄷ) $\dfrac{dA}{dt}=2\pi r\dfrac{dr}{dt}$ ㄹ) 충분한 정보 없음.

24. $g(x)=\sin^{-1}x$이면, $g'(x)$는?

ㄱ) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ㄴ) $\dfrac{1}{\cos x}$ ㄷ) $-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ ㄹ) $\csc x\cot x$

(부록4) 미분의 응용에 대한 이해도 검사 문항

* 다음 문제를 읽고 맞는 답을 고르거나 쓰시오.

1. 자갈이 원뿔 모양의 더미에 쌓일 때 그 부피 V는 시간에 따라 변한다. 그 결과로서 높이 h와 반지름의 길이 r도 시간에 따라 변한다. 임의의 순간에 $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$일 때, 부피 반지름의 길이와 높이의 시간에 대한 변화율 사이의 관계는?

ㄱ) $\frac{dV}{dt}=\frac{1}{3}\pi(2r\frac{dr}{dt}h+r^2\frac{dh}{dt})$이다. ㄴ) $\frac{dV}{dt}=\frac{1}{3}\pi(2r\frac{dr}{dt}\frac{dh}{dt})$이다.

ㄷ) $\frac{dV}{dr}=\frac{1}{3}\pi(2rh+r^2\frac{dh}{dt})$이다. ㄹ) $\frac{dV}{dh}=\frac{1}{3}\pi(r^2)(1)+2r\frac{dr}{dh}h)$이다.

2. 그림과 같이 보트가 로프에 의해 끌려 독(dock)에 가까워지고 있다. 보트가 독(dock)에 접근하는 변화율에 대하여 로프가 당겨지는 변화율은 어떠한가?

ㄱ) 하나는 다른 것의 상수배이다. ㄴ) 그들은 같다.

ㄷ) 그것은 보트가 독(dock)에 얼마나 접근하는가에 달려있다.

3. 그림과 같이 가로등이 전보대의 꼭대기에 달려있다.
한 남자가 전보대로부터 걸어간다.
그의 그림자가 길어지는 변화율과 그가 전보대로부터 걸어가는 변화율은 어떠한가?

ㄱ) 하나는 다른 것의 상수배이다.

ㄴ) 그들은 같다.

ㄷ) 그것은 그 남자가 전봇대에 얼마나 가까이 접근하는가에 달려있다.

4. $f(x)$가 폐구간에서 미분가능하고 $x=a$는 구간의 끝점의 하나이다. $f'(a)>0$이면?

ㄱ) f는 $x=a$에서 최대값 또는 최소값을 가질수 있다.

ㄴ) f는 $x=a$에서 최대값을 가질수 없다.

ㄷ) f는 $x=a$에서 반드시 최대값을 갖는다.

5. spotlight가 그림과 같이 벽면에 비추도록 설치되었다.
한 여자가 빛과 벽면 사이에 서있다.
그녀의 그림자가 커지는 변화율과 빛으로부터 그녀가 벽으로 걸어갈 때 변화율은 어떠한가?

ㄱ) 하나는 다른 것의 상수배이다.

ㄴ) 그들은 같다.

ㄷ) 그것은 그녀가 벽면에 얼마나 가까이 접근하는가에 달려있다.

6. f가 구간 $[a, b]$에서 연속이면,

ㄱ) $x \in [a, b]$에 대해 $m \leq f(x) \leq M$인 m과 M이 반드시 존재한다.

ㄴ) 반드시 극값은 존재하나 함수에 대한 최대값 또는 최소값은 존재할 수도 존재하지 않을 수도 있다.

ㄷ) 어떤 최대값이나 최소값도 구간의 끝점 이거나 정의역의 $f'(x) = 0$인 점일 수 있다.

7. 길이 L인 철사줄로 정사각형(과)/(이나) 원을 만들어 넓이가 최대가 되도록 하려면?

ㄱ) 정사각형만 만들어야 한다. ㄴ) 원만 만들어야 한다.

ㄷ) 정사각형과 원 모두 만들어야 하나 정서각형의 둘레가 원의 둘레보다 더 길음에 틀림없다.

ㄹ) 정사각형과 원 모두 만들어야 하나 정서각형의 둘레가 원의 둘레보다 더 짧음에 틀림없다.

8. 경제잡지에 의하면 주가의 변화율이 증가하고 있다고 한다. 이 의미는?

ㄱ) 주가가 감소하고 있다고 결론 내릴 수 있다.

ㄴ) 주가가 증가하고 있다고 결론 내릴 수 있다.

ㄷ) 주가가 증가하고 있는지 감소하고 있는지 결정할 수 없다.

9. 반지름의 길이가 r_1, r_2인 두 동심원의 사이의 영역, 그림의 어두운 부분을 환상형이라 한다. $r_2 > r_1$이면 환상형의 넓이는 $\pi(r_2^2 - r_1^2)$이다.

ㄱ) 넓이는 직사각형의 넓이의 합으로 근사시킬 수 있으나 정확히 같은 넓이가 같은 직사각형은 없다.

ㄴ) 원들이 동심원이므로 환상형의 넓이는 직사각형의 넓이로 근사시킬 수 있다.

ㄷ) 환상형의 넓이와 정확히 같게 되는 밑변 $r_2 - r_1$, 높이 $2\pi r$인 직사각형이 되는 r이 r_1과 r_2 사이에 반드시 존재한다.

10. 밑 부분이 윗부분보다 좁은 컵에 물을 채우고 있다. 컵의 물의 깊이는 컵의 물의 부피의 함수이다. 이 함수의 그래프는?

ㄱ) 증가함수이고 위로 볼록이다. ㄴ) 증가함수이고 아래로 볼록이다.

ㄷ) 양의 기울기를 갖는 직선이다.

11. 두 명의 달리기 선수가 똑같은 순간에 경기를 시작하고 똑같이 골인한다. 다음 어느 것이 반드시 참인가?

ㄱ) 경기 동안 어떤 지점에서 두 경기자는 똑같은 위치가 아니었다.

ㄴ) 경기의 도착 지점에서 두 경기자의 속도는 정확히 같음에 틀림없다.

ㄷ) 경기의 어떤 지점에서 정확히 같은 시간에 두 경기자는 같은 속도를 가졌음에 틀림없다.

ㄹ) 두 경기자는 어떤 순간에 똑같은 속도를 가졌음에 틀림없으나 반드시 같은 시간일 필요는 없다.

12. 입체도형 원뿔이 밑면(원)에 평행하게 잘리었다. 각 잘린 부분의 윗면과 밑면의 반지름의 길이는 r_1과 r_2인 원들이고, $r_2 > r_1$이다.

ㄱ) 잘린 부분의 부피는 잘린 부분마다 같은 두께를 갖는 원기둥의 부피로서 근사시킬 수 있으나 잘린 부분마다 정확히 같은 부피를 갖는 원기둥일 필요는 반드시 없다.

ㄴ) 잘린 부분의 부피는 원기둥의 부피로서 근사시킬 수 없다. 왜냐하면, 원들은 같은 반지름을 갖지 않는다.

ㄷ) 잘린 부분의 두께와 같은 높이를 갖는 반지름의 길이 r인 원기둥의 부피는 정확히 잘린 부분의 부피와 같게 되는 반지름의 길이가 r_1과 r_2의 사이에 있는 r이 존재한다.

13. 함수 $f(x) = e^x$와 $g(x) = x^{1,000,000}$에 대해 $x \to \infty$일 때 다음 중 참인 것은?

ㄱ) f가 g보다 빨리 커진다. ㄴ) g가 f보다 빨리 커진다.

ㄷ) 결정할 수 없다. ㄹ) 모든 지수들처럼 같은 비율로 f, g는 커진다.

14. $\lim_{x \to \infty} (xe^{\frac{1}{x}} - x)$의 극한값은?

ㄱ) $\infty - \infty$가 존재하지 않으므로 존재하지 않는다. ㄴ) 1에 수렴한다.

ㄷ) $xe^{\frac{1}{x}}$이 x보다 더 빨리 커지므로 ∞이다. ㄹ) 0에 수렴한다.

15. 다음 명제에 대해 참, 거짓을 구별하고 그 이유를 설명하거나 반례를 들어라.

(1) $f(x)$가 폐구간에서 연속이면 최대값과 최소값을 구하기 위해 $f'(x) = 0$인 점을 찾는 것으로 충분하다.

(2) $x = a$를 제외한 모든 실수에 대해 $f''(x) > 0$인 연속함수 f는 $x = a$에서 최대값을 가질 수도 있다.

(3) $f''(a) = 0$이면, f는 a에서 변곡점을 갖는다.

(4) 구간 $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$에서 $f(x) = |x|$인 함수에 대해 $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(-\frac{1}{2})}{2 - (-\frac{1}{2})}$인 c를 찾을 수 있다.

(5) 달리기선수가 직선 길을 따라 뒤로 앞으로 달리고 있다. 그는 출발한 장소에서 경기를 마친다. 그가 멈추는 순간, 경기의 시작과 끝 이외에 적어도 한 순간이 반드시 있을 것이다.

(부록5) 적분에 대한 이해도 검사 문항

* 다음 문제를 읽고 맞는 답을 고르거나 쓰시오.

1. f는 g의 원시함수이고 g는 h의 원시함수이면,

ㄱ) h는 f의 원시함수이다. ㄴ) h는 f의 2차도함수이다.

ㄷ) h는 f''의 도함수이다.

2. 같은 폭을 갖는 4개의 직사각형을 이용하여 양의 값을 갖는 함수의 그래프 아래의 영역의 넓이를 구하려고 한다. 이 넓이를 가장 잘 추정하려고 하는 직사각형들은 다음에서 얻어진 높이를 갖는 것들이다.

ㄱ) 왼쪽 끝 점. ㄴ) 중점. ㄷ) 오른쪽 끝 점. ㄹ) 정보가 충분하지 않다.

3. 꼭지 부분에서 뿌리 부분까지 11cm인 당근을 자르고 있다. 0과 11사이에 각 x에 대해 잘린 단면의 넓이가 $f(x)=\pi(r(x))^2$이고, x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n.에서 자르면, 당근의 부피에 대한 좋은 근사값은?

ㄱ) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)x_i$ ㄴ) $\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i+1})-f(x_i)]x_i$ ㄷ) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)[x_{i+1}-x_i]$

4. 다음 (i), (ii), (iii), (iv)를 읽고 맞는 것을 고르시오.

함수 f가 구간 $[a, b]$에서 연속이면,

(i) $\int_a^b f(x)dx$는 f의 그래프와 x축, 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 넓이이다.

(ii) $\int_a^b f(x)dx$는 수이다. (iii) $\int_a^b f(x)dx$는 $f(x)$의 원시함수이다.

(iv) $\int_a^b f(x)dx$는 존재하지 않을 수도 있다.

ㄱ) (ii)만 성립. ㄴ) (i)과 (ii)만 성립.

ㄷ) (i)과 (iii)만 성립. ㄹ) (iv)만 성립.

5. 그림과 같이 반지름의 길이 r인 원모양의 디스크를 각을 θ_i로 표시한 n개의 부채꼴로 자른다 ($\theta_0=\theta_n$은 각 0으로 생각한다). 두 각 θ_i와 θ_{i+1} 사이의 부채꼴의 넓이는 $\Delta\theta=\theta_{i+1}-\theta_i$라면 $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$이다. $A_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$라 하면 디스크의 넓이 A는?

ㄱ) A_n은 디스크를 얼마나 많은 부채꼴로 자르든지 독립이다.

ㄴ) $\lim_{n\to\infty} A_n$ ㄷ) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta$ ㄹ) 위의 모두 맞다.

6. 체육관에서 육상선수가 직선라인을 앞뒤로 다양한 거리를 달리기 연습을 하고 있다. t초에서 속도가 함수 $v(t)$로 주어진다. $\int_0^{60} |v(t)|dt$는 무엇을 나타내는가?

ㄱ) 육상선수가 1분 동안 달린 거리. ㄴ) 1분 동안 육상선수의 평균속도.
ㄷ) 1분 후에 육상선수의 출발점으로부터의 위치. ㄹ) 위의 어느 것도 아니다.

7. f가 미분가능한 함수이면, $\int_0^x f'(t)dt = f(x)$이다.

ㄱ) 항상 성립. ㄴ) 때때로 성립. ㄷ) 성립하지 않는다.

8. 함수 $f(t)$가 연속이고 양수이고, G가 f의 원시함수이면, G는?

ㄱ) 항상 양수이다. ㄴ) 어떤 때는 양수이고 어떤 때는 음수이다.
ㄷ) 항상 증가한다. ㄹ) 위의 어느 것에 대해 결정을 할 충분한 정보가 없다.

9. 모든 $x \in [a, b]$에 대해 f가 연속이고 $f(x) < 0$이면, $\int_a^b f(x)dx$는?

ㄱ) 음수임에 틀림없다. ㄴ) 0일 수 있다. ㄷ) 정보가 충분하지 않다.

10. 함수 f의 그래프는 그림과 같다. $g(x) = \int_0^x f(t)dt$이며,

ㄱ) $g(0) = 0,\ g'(0) = 0,\ g'(2) = 0$이다. ㄴ) $g(0) = 0,\ g'(0) = 4,\ g'(2) = 0$이다.
ㄷ) $g(0) = 1,\ g'(0) = 0,\ g'(2) = 1$이다. ㄹ) $g(0) = 0,\ g'(0) = 0,\ g'(2) = 1$이다.

11. 여러분이 구간 $[a, b]$에서 연속적으로 변하는 속도 $v(t)$로 움직이고 있고, 시간 t에서 위치가 $s(t)$로 주어진다. 그 시간 구간에서 다음의 어느 것이 여러분이 평균속도를 나타내는가?

(I) $\dfrac{\int_a^b v(t)dt}{b-a}$ (II) $\dfrac{s(b)-s(a)}{b-a}$ (III) a와 b 사이의 적어도 한 c에 대해 $v(c)$

ㄱ) I, II와 III. ㄴ) I만. ㄷ) I과 II만.

12. 치환적분을 하는데 도움을 주는 미분법은?

ㄱ) 곱셈 법칙. ㄴ) 연쇄법칙. ㄷ) 위의 것 모두.

13. 원모양의 세포의 넓이가 반지름의 길이 r의 함수로서 변하고 그 반지름의 길이는 시간의 함수 $r = g(t)$로 변한다. $\frac{dA}{dr} = f(r)$이면, $t = 0$과 $t = 1$ 사이의 넓이 $\triangle A$의 전체 변화율은?

ㄱ) $\triangle A = \int_{\pi(g(0))^2}^{\pi(g(1))^2} dA$이다. ㄴ) $\triangle A = \int_{g(0)}^{g(1)} f(r)dr$이다.

ㄷ) $\triangle A = \int_0^1 f(g(t))g'(t)dt$이다. ㄹ) 앞의 모두 맞다.

14. 원모양의 세포의 반지름의 길이 r이 시간 t에 따라 변한다. $r(t) = \ln(t+2)$이면, 다음 어느 것이 $t=0$과 $t=1$ 사이에서 일어나는 세포의 넓이 $\triangle A$의 변화율을 나타내는가?

ㄱ) $\triangle A = \pi(\ln 3)^2 - \pi(\ln 2)^2$이다. ㄴ) $\triangle A = \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2\pi r dr$이다.

ㄷ) $\triangle A = \int_0^1 2\pi \frac{\ln(t+2)}{t+2} dt$이다. ㄹ) 앞의 모두 맞다.

15. 단위원의 넓이의 $\frac{1}{2}$을 계산하는 한 방법은 $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$이다. 그림에서 t는 각을 나타낸다면, 반원의 넓이는?

ㄱ) $\int_0^{\pi} (-\sin t)dt$이다. ㄴ) $\int_0^{\pi} (-\sin^2 t)dt$이다.

ㄷ) $\int_{\pi}^{0} (-\sin^2 t)dt$이다. ㄹ) $\int_0^{\pi} (-\cos t)dt$이다.

16. 다음 명제에 대해 참, 거짓을 구별하고 그 이유를 설명하거나 반례를 들어라.

(1) 물체의 가속도 함수 $a(t)$가 연속이고 $v(0)=1$이라 하면, 임의의 시간 t에서 물체의 위치를 알 수 있다.

(2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$이고, $F(x)$는 f의 원시함수이며 $F(1)=1$이면 $F(-1)=3$이다.

(3) 함수의 합 $f+g$의 원시함수는 f의 원시함수와 g의 원시함수의 합이다.

(4) 함수의 곱 fg의 원시함수는 f의 원시함수와 g의 원시함수의 곱이다.

(5) 줄이 n개의 작은 조각으로 잘려지고 i번째 조각은 길이가 $\triangle x_i cm$이면, 줄의 전체 길이는 $\sum_{i=1}^{n} \triangle x_i cm$이다.

(6) 함수 f가 구간 $[a, b]$에서 연속이면, $\int_a^b f(x)dx$는 수이다.

(7) $\int f(x)dx = \int g(x)dx$이면, $f(x) = g(x)$이다.

(8) $f'(x) = g'(x)$이면, $f(x) = g(x)$이다.

(9) 함수 f가 구간 $[a, b]$에서 연속이면,

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$인 두 상수 m과 M이 존재한다.