

런 규칙이 혼합된 슈와르트 관리도의 통계적 설계

김영복* · 홍정식** · 이창훈*

* 서울대학교 산업공학과

** 서울산업대학교 산업정보시스템공학과

Statistical design of Shewhart control chart with runs rules

Kim, Young-Bok* · Hong, Jung-sik** · Lie, Chang-Hoon*

* Dept. of Industrial Engineering, Seoul National University

** Dept. of Industrial & Information Systems Engineering, Seoul National University of Technology

Key Words : Shewhart control chart, 2 of 2 runs rule, 2 of 3 runs rule, *ARL*

Abstract

This research proposes a design method based on the statistical characteristics of the Shewhart control chart incorporated with 2 of 2 and 2 of 3 runs rules respectively. A Markov chain approach is employed in order to calculate the in-control and out-of-control average run lengths(*ARL*). Two different control limit coefficients for the Shewhart scheme and the runs rule scheme are derived simultaneously to minimize the out-of-control average run length subject to the reasonable in-control average run length. Numerical examples show that the statistical performance of the hybrid control scheme are superior to that of the original Shewhart control chart.

1. 서 론

통계적 공정 관리(statistical process control)의 주 목적은 공정에 이상원인(assignable cause)이나 공정 평균의 변동이 발생한 것을 빠르게 감지하여 다량의 불량품이 발생하기 전에 적절한 조치를 취함으로써 공정의 생산 능력을 높이고자 하는 것이다. 통계적 공정 관리의 중요한 도구로써 여러 형태의 관리도(control chart)가 사용되며, 최초의 관리도인 슈와르트 관리도(Shewhart control chart)는 지금까지도 여러 산업에 사용되고 있다.

슈와르트 관리도는 실제 공정에 구현하기 간단하며, 이상원인에 의한 공정 평균의 변동이 큰 경우에 이상원인의 발생유무를 빨리 감지할 수 있다는 장점은 있지만, 공정 평균의 변동량이 작은 경우에 민감도가 상대적으로 떨어진다는 단점 또한 존재한다 「이호중·임태

진, 2005」.

이러한 문제점들을 해결하기 위해 통계량의 위치에 따라 표본의 크기나 샘플링 간격을 변화시키는 방법인 VSS(Variable Sample Size), VSI(Variable Sampling Interval) 그리고 VSSI(Variable Sample Size and Sampling Interval) 관리도에 대한 다양한 연구들이 진행되었다[1, 6, 9, 10, 11, 17]. 하지만 이러한 관리도들은 관리도의 설계 모수(design parameter)인 표본 크기와 샘플링 간격이 공정의 상태에 따라 자주 변화하게 되어 관리도 운용시 혼란을 가져올 수 있으며, 산업 종류나 공정 성격에 따라서는 설계 모수의 변화가 불가능하여 이러한 관리도를 사용할 수 없는 문제들도 존재한다.

슈와르트 관리도의 민감도를 향상시키기 위한 대안으로서 새로운 관리도가 개발되기도 했는데, 누적합(CUSUM) 관리도와 가중지수 이동평균(EWMA) 관리도가 대표적인 예이며, 이들에 대한 연구도 많이 진행되었다[2, 4, 18]. 누적합 관리도와 가중지수 이동평균

관리도의 공통점은 과거의 표본을 모두 이용하여 관리 통계량을 계산함으로써 관리도의 민감도를 향상시키고자 한 점으로 누적합 관리도와 가중지수 이동평균 관리도는 공정의 변화가 작을 때 슈와르트 관리도보다 통계적 성능이 우수함이 잘 알려져 있다. 하지만 이들 관리도의 경우 슈와르트 관리도를 기존에 사용하던 공정의 경우에는 새로운 관리도의 적용을 위한 전환비용이 발생하게 되고, 관리방법의 변화로 인한 혼동의 발생으로 인해 공정관리에 다양한 문제들이 발생할 수 있다.

슈와르트 관리도의 민감도를 향상시키기 위한 다른 방법으로 런 규칙(runs rule)에 대한 연구들도 다수 진행되었다[5, 8, 14, 15, 16]. 런 규칙은 기존의 슈와르트 관리도에 부가적으로 사용되기 때문에, 다른 관리도들에 비해 실제 공정에 구현하여 사용하기가 수월하며, 전환비용이 거의 발생하지 않는다는 장점이 존재한다. Khoo와 Ariffin(2006)과 Acosta-Mejia(2007)는 런 규칙의 적용을 위한 관리한계와 슈와르트 방법의 적용을 위한 관리한계, 즉 2개의 관리한계를 가지는 관리도의 통계적 성능을 분석하였는데, Khoo와 Ariffin(2006)은 슈와르트 관리도와 2중 2 런 규칙과 3중 2 런 규칙이 같이 사용되는 관리도의 통계적 성능을 분석하였고, Acosta-Mejia(2007)는 슈와르트 관리도와 일반적인 형태의 런 규칙이 같이 사용되는 관리도의 통계적 성능을 분석하였다. Khoo와 Ariffin(2006)과 Acosta-Mejia(2007)의 연구에서는 2개의 다른 관리한계를 정하기 위해 슈와르트 관리 방법의 적용을 위한 넓은 범위의 관리한계를 먼저 고정한 후, $\pm 3\sigma$ 의 관리한계를 가지는 슈와르트 관리도의 평균 런 길이(≈ 370.4)와 같아지도록 런 규칙의 적용을 위한 좁은 범위의 관리한계를 도출하였다. 하지만 이들 연구는 슈와르트 관리 방법의 적용을 위한 넓은 범위의 관리한계를 먼저 고정시킴으로써, 관리도의 통계적 성능을 최대화 하는 관리한계를 제시하지 못한다는 한계를 가지고 있으며, 제안한 관리도의 평균 런 길이를 계산할 때 런 규칙의 사용으로 인해 발생하는 공정의 다양한 실제 상태를 고려하지 않는 문제 또한 존재한다.

본 연구는 기존의 슈와르트 관리도의 민감도를 향상시키기 위해 Khoo and Ariffin(2006)에서 제안된 방법인 슈와르트 관리도와 2중 2 런 규칙과 3중 2 런 규칙이 같이 사용되는 관리도의 통계적 성능을 최대화 하는 런 규칙을 위한 관리한계와 슈와르트 관리 방법의 관리한계를 동시에 결정하고, 그때의 평균 런 길이를 기존의 슈와르트 관리도와 비교하여 모형의 타당성을 살펴

본다. 이를 위해 마코프 모형(Markov model)을 이용하여 공정의 상태를 고려한 평균 런 길이를 계산하고, 그 결과를 바탕으로 다양한 공정조건들에 대하여 수정된 관리방법들이 가지는 통계적 성능을 슈와르트 관리도와 비교, 분석한다.

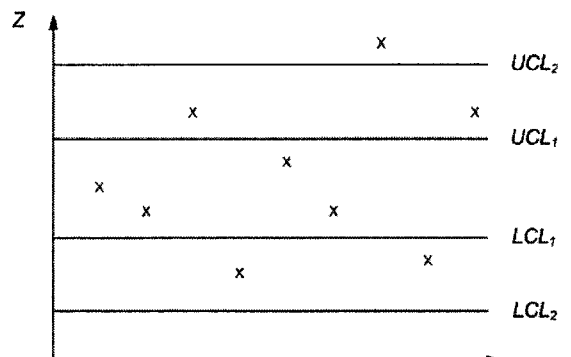
제 2장에서는 혼합형 런 규칙 모형과 본 연구에서 사용될 기호들에 대한 정의를 한다. 제 3장에서는 본 연구에서 다루는 관리도 분석을 위한 마코프 전이 모형을 설명하고, 이를 바탕으로 관리상태 및 이상상태에서의 평균 런 길이(ARL)를 계산한다. 제 4장에서는 런 규칙의 사용을 위한 관리도의 통계적 설계 방법의 제시와 함께 구체적인 설계 절차를 보여준다. 제 5장에서는 수치예제를 통해 본 연구의 타당성을 검증하고, 제 6장에서는 결론을 제시한다.

2. 분석 모형

본 연구에서 사용되는 기호는 다음과 같으며, 본 연구의 분석대상은 Khoo와 Arrifin(2006)이 제안한 방법인 2중 2 런 규칙과 슈와르트 관리도가 혼합된 관리방법과 3중 2 런 규칙과 슈와르트 관리도가 혼합된 관리방법이다. 본 연구에서 사용하는 런 규칙은 연속하는 2개(혹은 3개)의 타점중에 2개의 타점이 관리상한이나 관리하한만을 연속적으로 벗어나는 경우에 이상감지를 하는 것으로 정의한다.

런 규칙과 슈와르트 관리도가 혼합된 형태의 관리방법을 사용하기 위하여 <그림 1>과 같이 2개의 서로 다른 관리한계가 필요하다.

본 연구에서는 2중 2 런 규칙과 슈와르트 관리도를 혼합한 모형을 Model 1, 3중 2 런 규칙과 슈와르트 관리도를 혼합한 모형을 Model 2라고 명칭하기로 한다.



<그림 1> 연구대상 관리도의 일반적인 형태

$\Phi(\cdot)$: 표준정규 누적분포함수
Z_i	: i 번째 표본의 표준화된 통계량 ($Z_i = (\bar{X}_i - \mu) / (\sigma / \sqrt{n})$)
δ	: 공정평균의 표준화된 변동량
n	: 고정 표본 크기
LCL_1/UCL_1	: 런 규칙의 적용을 위한 좁은 관리한계
LCL_2/UCL_2	: 슈와르트 관리방법의 적용을 위한 넓은 관리한계
p	: 관리상태에서 표본 통계량이 관리한계 내에 타점될 확률
p_L	: 관리상태에서 LCL_2 와 LCL_1 사이에 타점될 확률
p_U	: 관리상태에서 UCL_1 과 UCL_2 사이에 타점될 확률
p_{2L}	: 관리상태에서 LCL_2 아래에 타점될 확률
p_{2U}	: 관리상태에서 UCL_2 위에 타점될 확률
p_S	: 관리상태에서 타점이 LCL_2 또는 UCL_2 를 벗어날 확률($p_S = p_{2L} + p_{2U}$)
q	: 이상상태에서 관리한계 내에 타점될 확률
q_L	: 이상상태에서 LCL_2 와 LCL_1 사이에 타점될 확률
q_U	: 이상상태에서 UCL_1 과 UCL_2 사이에 타점될 확률
q_{2L}	: 이상상태에서 LCL_2 아래에 타점될 확률
q_{2U}	: 이상상태에서 UCL_2 위에 타점될 확률
q_S	: 이상상태에서 타점이 LCL_2 또는 UCL_2 를 벗어날 확률($q_S = q_{2L} + q_{2U}$)
k_{11}	: Model 1에서의 LCL_1/UCL_1 값
k_{12}	: Model 1에서의 LCL_2/UCL_2 값
k_{21}	: Model 2에서의 LCL_1/UCL_1 값
k_{22}	: Model 2에서의 LCL_2/UCL_2 값
ARL_N	: 관리상태에서의 평균 런 길이
ARL_δ	: 이상상태에서의 평균 런 길이
l	: 관리상태 평균 런 길이의 하한값

3. 마코프 전이 모형

런 규칙이 혼합된 슈와르트 관리도의 통계적 설계를 위해 관리상태 및 이상상태에서의 평균 런 길이를 유도해야 한다. 이를 위해 본 연구에서는 마코프 전이 모형을 사용하며, 다음의 가정을 이용하여 전이 모형을 도출한다.

[가정]

- (1) 품질특성치는 정규분포를 따른다.
- (2) 이상원인에 의한 공정평균의 표준화된 변동량 δ 는 알려져 있다.

- (3) 공정은 관리상태에서 시작하고, 이상원인이 발생하면 공정평균이 $\delta\sigma$ 만큼 변화되어 이상상태가 된다.
- (4) 오경보가 발생하면 원인조사 후 공정은 초기상태가 된다.

일반적인 슈와르트 관리도에 대한 평균 런 길이는 많은 연구들[5, 15, 16]에서 언급되고 있으므로 본 연구에서는 주 분석모형인 Model 1과 Model 2에 대한 전이모형을 기술한다. 본 절에서 사용하는 마코프 전이 모형은 Khoo와 Arrifin(2006)의 연구를 이용하여 수립하였다.

3.1 Model 1의 마코프 전이 모형

Model 1은 2중 2 런 규칙과 일반적인 슈와르트 관리 방법이 혼합된 방식이다. Model 1에서는 마코프 전이 모형의 유도를 위해 아래와 같이 이상원인 발생유무를 판정하는 시점에서 관리도상의 타점 위치를 이용하여 상태를 정의한다.

- {O} : LCL_1 과 UCL_1 사이에 최근 1개의 타점이 존재, 초기상태
- {U} : UCL_1 과 UCL_2 사이에 최근 1개의 타점이 존재
- {L} : LCL_1 과 LCL_2 사이에 최근 1개의 타점이 존재
- {S} : 최근 1개의 타점이 LCL_2 또는 UCL_2 를 벗어나거나, 최근 2개의 연속된 타점이 UCL_1 과 UCL_2 사이 혹은 LCL_1 과 LCL_2 사이에 존재하는 경우, 흡수상태

공정이 관리상태일 때 {S}는 오경보가 발생한 상황을 나타내고, 이상상태일 경우는 이상원인의 발생이 감지된 흡수상태를 나타낸다. 위의 상태정의를 이용하면 아래 <표 1>과 같은 전이행렬을 얻을 수 있다. 아래의 전이 행렬에서 공정이 이상상태인 경우의 전이확률은 p 대신 q 를 사용하여 표시할 수 있다.

<표 1> Model 1의 상태 전이 행렬

		(n+1)번째 샘플링 시점에서의 공정상태			
		{O}	{U}	{L}	{S}
n번째 샘플링 시점에서의 공정상태	{O}	p	p_U	p_L	p_S
	{U}	p	0	p_L	$p_S + p_U$
	{L}	p	p_U	0	$p_S + p_L$
	{S}	0	0	0	1

2장의 기호정의를 이용하면 전이행렬에 필요한 확률을 각각 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 p &= \Phi(k_{11}) - \Phi(-k_{11}) \\
 p_U &= \Phi(k_{12}) - \Phi(k_{11}) \\
 p_L &= \Phi(-k_{11}) - \Phi(-k_{12}) \\
 p_S &= 1 - \Phi(k_{12}) + \Phi(-k_{12}) = 2\Phi(-k_{12})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q &= \Phi(k_{11} - \delta\sqrt{n}) - \Phi(-k_{11} - \delta\sqrt{n}) \\
 q_U &= \Phi(k_{12} - \delta\sqrt{n}) - \Phi(k_{11} - \delta\sqrt{n}) \\
 q_L &= \Phi(-k_{11} - \delta\sqrt{n}) - \Phi(-k_{12} - \delta\sqrt{n}) \\
 q_S &= 1 - \Phi(k_{12} - \delta\sqrt{n}) + \Phi(-k_{12} - \delta\sqrt{n})
 \end{aligned}$$

3.2 Model 2의 마코프 전이 모형

Model 2는 3중 2 런 규칙과 일반적인 슈와르트 관리 방법이 혼합된 방식이다. Model 2는 최대 3개의 타점 이력을 이용하여 이상원인 발생유무를 판별하는 방식 이고, 아래와 같이 최근 2개 타점의 위치를 이용한 상태정의를 활용하여 전이모형을 유도할 수 있다.

- {OO} : 최근 2개의 타점이 LCL_1 과 UCL_1 사이에 존재, 초기상태
- {OU} : 첫 번째 타점은 LCL_1 과 UCL_1 사이에 존재하고, 다음 타점은 UCL_1 과 UCL_2 사이에 존재
- {UO} : 첫 번째 타점은 UCL_1 과 UCL_2 사이에 존재하고, 다음 타점은 LCL_1 과 UCL_1 사이에 존재
- {UL} : 첫 번째 타점은 UCL_1 과 UCL_2 사이에 존재하고, 다음 타점은 LCL_1 과 LCL_2 사이에 존재
- {OL} : 첫 번째 타점은 LCL_1 과 UCL_1 사이에 존재하고, 다음 타점은 LCL_1 과 LCL_2 사이에 존재
- {LO} : 첫 번째 타점은 LCL_1 과 LCL_2 사이에 존재하고, 다음 타점은 LCL_1 과 UCL_1 사이에 존재
- {LU} : 첫 번째 타점은 LCL_1 과 LCL_2 사이에 존재하고, 다음 타점은 UCL_1 과 UCL_2 사이에 존재
- {S} : 한 개의 타점이 LCL_2 또는 UCL_2 를 벗어나거나, 최근의 연속하는 3개 타점 중 2개의 타점이 UCL_1 과 UCL_2 사이 혹은 LCL_1 과 LCL_2 사이에 존재하는 경우, 흡수상태

Model 2의 경우와 같이 공정이 관리상태일 때 {S}는 오경보가 발생한 상황을 나타내고, 이상상태일 경우는 이상원인의 발생이 감지된 흡수상태를 나타낸다. 위의 상태정의를 이용하면 아래 <표 2>와 같은 전이행렬을 얻을 수 있다.

아래의 전이행렬에서 공정이 이상상태인 경우의 전이확률은 p 대신 q 를 사용하여 표시할 수 있다. 2장의 기호정의를 이용하면 전이행렬에 필요한 확률을 각각 아래와 같이 구할 수 있다.

소는 0인 $t' = \{1, 0, 0, \dots, 0\}$ 와 같은 벡터가 되며 이를 이용하면 아래 식들과 같이 각 Model의 관리상태에서의 평균 런 길이를 구할 수 있다. 아래 식에서 ARL_{1N} 와 ARL_{2N} 에 나오는 확률들은 앞 절에서 정의한 확률들을 이용하여 계산한다.

$$ARL_{1N} = \frac{1 + p_U}{p_S + p_S p_U^2 + p_U^2} \quad (1)$$

$$ARL_{2N} = \frac{p_U(1 + p_U)(p_S + 2p_U - 3) - 1}{p(1 + p_U(1 + p)(1 + p_U)) - 1} \quad (2)$$

3.3.2 ARL_s 계산

공정이 이상상태인 경우에 평균 런 길이를 구할 때는 평균 런 길이 계산을 위한 공정의 초기 상태를 다르게 고려해야 한다. 왜냐하면, Model 1과 Model 2의 경우 이상원인이 발생하기 직전의 관리상태에서 발생한 타점들이 이상원인 발생여부 판단에 영향을 주기 때문이다. Model 1은 2개의 타점을 근거로 이상원인 발생여부를 판단하는 방식이기 때문에 이상상태에 진입한 직후에는 기존 관리상태에서 마지막으로 찍혔던 1개의 타점을 반드시 참조해야 하며, Model 2에서는 3개의 타점을 근거로 이상원인 발생여부를 판단하는 방식이기 때문에 이상상태로 진입한 직후에는 관리상태에서의 마지막 2개의 타점들을 참조해야 한다. 이와 같이 복수의 타점들로 이상원인 발생여부를 감지하는 Model 1과 Model 2는 관리상태에서의 마지막 상태를 이력으로 참조하기 때문에 이상상태에서의 평균 런 길이를 구할 때에는 이상원인 발생 직전의 공정 상태를 나타내는 t' 에 이러한 기존 이력을 반영해야 한다. 만약, 관리상태에서의 평균 런 길이와 같이 $t' = \{1, 0, 0, \dots, 0\}$ 로 두고 계산할 경우, 이는 이상원인 발생 직전의 공정 상태가 반드시 $\{O\}$ 혹은 $\{OO\}$ 상태에 있다는 것을 의미하지만, 실제 이상원인이 발생하기 직전의 공정 상태는 $\{O\}$ 나 $\{OO\}$ 상태외의 다른 상태를 가질 수도 있을 것이다. 런 규칙을 고려한 이상감지 방법에 대한 기존 연구들인 Khoo and Arrifin(2006)의 연구나 Acosta-Mejia(2007)의 연구는 이러한 사실에 대한 고려없이 관리상태에서의 평균 런 길이를 계산하는 방법과 동일한 방법을 사용하여 이상상태에서의 평균 런 길이를 구하여 비교함으로써 정확성에 한계를 가진다고 볼 수 있다.

본 연구에서는 이상상태에서의 평균 런 길이 계산시 아래와 같이 이상원인 발생 직전의 공정 상태를 고려하

여 도출하였다.

Model 1은 관리상태에서 $\{O\}$, $\{U\}$, $\{L\}$, $\{S\}$ 의 4가지 상태를 가질 수 있다. 하지만, 상태 $\{S\}$ 는 오경보를 나타내고, 본 연구의 가정에 의해 오경보발생시 상태는 바로 상태 $\{O\}$ 로 볼 수 있기 때문에 이상원인이 발생하기 직전의 공정 상태는 $\{O\}$, $\{U\}$, $\{L\}$ 의 3가지 종류를 가지게 된다. 따라서 t' 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$t' = \{P(\{O\}), P(\{U\}), P(\{L\})\} = \{p + p_S, p_U, p_L\}$$

Model 1의 이상상태에서의 평균 런 길이는 아래의 식 (3)과 같이 표현가능하다.

$$ARL_{1s} = t' M 1 \\ (p + p_S) \sum_{i=1}^3 M_{i1} + p_U \sum_{i=1}^3 M_{i2} + p_L \sum_{i=1}^3 M_{i3} \quad (3)$$

식 (3)의 결과는 부록으로 첨부하였다.

Model 2의 경우 관리상태에서 $\{OO\}$, $\{OU\}$, $\{OL\}$, $\{UO\}$, $\{UL\}$, $\{LO\}$, $\{LU\}$, $\{S\}$ 의 8가지 상태를 가질 수 있지만, Model 1의 경우와 마찬가지로 상태 $\{S\}$ 는 오경보 상태를 의미하고, 이는 공정에서 상태 $\{OO\}$ 와 같이 간주되므로 이상원인이 발생하기 직전의 공정 상태는 $\{OO\}$, $\{OU\}$, $\{OL\}$, $\{UO\}$, $\{UL\}$, $\{LO\}$, $\{LU\}$ 의 7가지 종류를 가지게 된다. 따라서 Model 2의 이상상태에서의 평균 런 길이는 아래의 식 (4)과 같이 표현가능하다.

$$ARL_{2s} = t' M 1 \\ = ((p_S + p)^2 + (p_U + p_L)p_S + p_U^2 + p_U^2) \sum_{i=1}^7 M_{i1} \\ + (p_S + p)p_U \sum_{i=1}^7 M_{i2} + (p_S + p)p_L \sum_{i=1}^7 M_{i3} + p_U p \sum_{i=1}^7 M_{i4} \\ + p_U p_L \sum_{i=1}^7 M_{i5} + p_L p \sum_{i=1}^7 M_{i6} + p_L p_U \sum_{i=1}^7 M_{i7} \quad (4)$$

4. 통계적 설계 방법

일반적으로 관리도는 표본크기, 샘플링 간격, 관리한계선 등을 필요로 하며, 이들 3가지의 모수를 결정하는 절차를 관리도의 설계라 한다. 관리도 설계에서는 평균 런 길이나 이상신호를 발생하기까지의 평균시간(Average

Time to Signal; ATS) 등의 통계적 기준과 공정 운영 시 발생할 수 있는 여러 종류의 비용들을 고려한 경제적 기준이 주로 사용되며, 통계적 기준에 의한 설계를 통계적 설계(Statistical design)라 하고, 경제적 기준의 의한 설계를 경제적 설계(economic design)라 한다. 관리도의 통계적 성능을 중시하는 통계적 설계의 경우 이상상태에서의 평균 런 길이나 이상원인이 발생한 시점으로부터 이상신호 발생시점까지의 평균시간을 최소화하는 설계모수를 결정하는 것이 일반적이다(Woodall, 1985). 하지만 관련비용을 고려하지 않는 통계적 설계의 경우 표본의 수가 많을수록 관리도의 통계적 성능이 뛰어나기 때문에 표본 크기의 최적값을 구하는 것이 무의미하고, 샘플링 간격 또한 관리도의 평균 런 길이에 영향을 미치지 아니한다. 그러므로 본 연구에서의 설계모수는 런 규칙이 혼합된 슈와르트 관리도의 관리 한계로 제한한다.

본 연구에서는 관리상태에서의 평균 런 길이를 일정 수준 이상으로 유지하면서 이상상태에서의 평균 런 길이를 최소화 하는 런 규칙이 혼합된 슈와르트 관리도의 관리한계를 결정하고, 그때의 이상상태의 평균 런 길이를 도출하여 비교함으로써 모형의 타당성을 보인다. 본 연구에서 사용하는 통계적 설계 모형은 아래 식 (5)와 같다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } ARL_{i\delta}(k_{i1}, k_{i2}) \\ & \text{s.t } ARL_{iN}(k_{i1}, k_{i2}) \geq l \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (5)$$

5. 수치예제

본 장에서는 다양한 공정 평균의 변동량에 대하여 최적의 관리한계를 제시하고, 각 경우의 이상상태의 평균 런 길이를 구하여 이를 전통적인 슈와르트 관리도만을 사용하는 경우와 비교함으로써 본 연구에서 정의한 Model의 통계적 성능을 검증한다. 본 연구에서 다루는 Model에 대한 최적의 관리한계와 각각의 평균 런 길이를 구하기 위하여 Mathematica ver. 5.2의 “NMinimize”를 사용하였다.

5.1 변동의 크기에 따른 최적 관리 한계

실험은 표본 크기 n 이 각각 1, 5, 10인 경우에 대하여 수행하였으며, 통계적 설계를 위한 관리상태에서의 평균 런 길이의 하한값은 $l=370.4$ 를 사용하였다. 실험 결과 표본 크기에 관계없이 관리한계값과 평균 런 길이는 동일한 추세를 보여주기 때문에 구체적인 결과는 $n=1$ 인 경우에 대하여만 나타내었다. <표 3>은 $n=1$

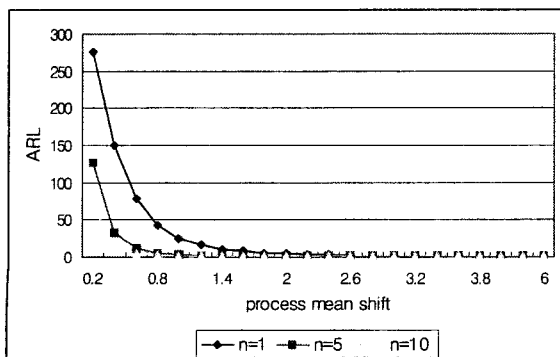
<표 3> 변동량의 크기에 따른 최적 관리 한계 및 $ARL_{\delta}(n=1$ 인 경우)

δ	Result	슈와르트 관리도		Model 1			Model 2		
		UCL/LCL	ARL_{δ}	k_{11}	k_{12}	ARL_{δ}	k_{21}	k_{22}	ARL_{δ}
0.2	3.0	3.0	308.43	1.789	3.914	275.62	1.932	4.162	268.87
0.4	3.0	3.0	200.08	1.791	3.853	149.26	1.933	4.086	140.74
0.6	3.0	3.0	119.67	1.794	3.790	78.07	1.934	4.009	72.01
0.8	3.0	3.0	71.55	1.798	3.723	42.92	1.936	3.927	39.15
1.0	3.0	3.0	43.89	1.803	3.656	25.17	1.939	3.843	22.91
1.2	3.0	3.0	27.82	1.810	3.589	15.74	1.943	3.376	14.39
1.4	3.0	3.0	18.25	1.818	3.524	10.45	1.948	3.669	9.65
1.6	3.0	3.0	12.38	1.829	3.459	7.34	1.957	3.579	6.86
1.8	3.0	3.0	8.69	1.844	3.396	5.41	1.969	3.490	5.13
2.0	3.0	3.0	6.30	1.863	3.334	4.16	1.985	3.404	4.01
2.2	3.0	3.0	4.72	1.886	3.276	3.33	2.008	3.324	3.25
2.4	3.0	3.0	3.65	1.915	3.222	2.74	2.037	3.253	2.71
2.6	3.0	3.0	2.90	1.951	3.174	2.32	2.073	3.193	2.31
2.8	3.0	3.0	2.38	1.992	3.134	2.01	2.114	3.144	2.01
3.0	3.0	3.0	2.00	2.039	3.100	1.77	2.160	3.106	1.78
4.0	3.0	3.0	1.19	2.322	3.018	1.18	2.424	3.019	1.18
5.0	3.0	3.0	1.02	2.627	3.002	1.02	2.703	3.002	1.02
6.0	3.0	3.0	1.00	2.892	3.000	1.00	2.930	3.000	1.00

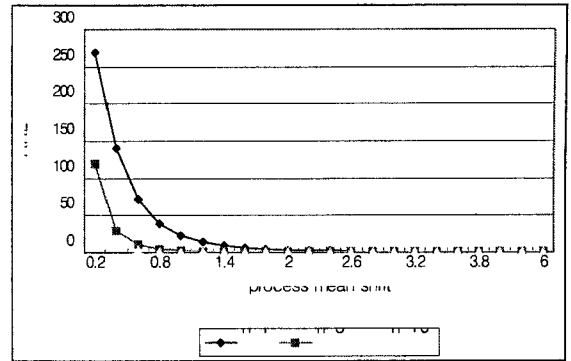
인 경우에 다양한 크기의 변동량에 대한 최적의 관리 한계 및 그 때의 이상상태에서의 평균 런 길이를 나타낸다.

모든 Model은 변동량의 크기가 증가함에 따라 이상상태의 평균 런 길이는 감소하는 형태를 보이는 데, 이는 변동량의 크기가 클수록 감지가 빨리 이루어짐을 의미한다. <표 3>의 결과를 보면 런 규칙과 슈와르트 기준을 혼합하여 사용하는 Model 1과 Model 2의 통계적 성능이 일반적인 슈와르트 방법에 비해 뛰어나음을 보이고 있다. 이는 변동량의 크기가 큰 경우에는 k_{12} 혹은 k_{22} 을 사용하는 슈와르트 기준에 의해 먼저 이상감지가 이루어지며, 변동량의 크기가 작은 경우에는 k_{11} 혹은 k_{21} 을 사용하는 런 규칙에 의한 이상감지가 먼저 이루어지기 때문에 기존의 슈와르트 관리도의 문제점이었던 변동량이 작은 경우에 민감도가 떨어진다는 단점을 보완할 수 있다. 또한 변동량의 크기가 증가할수록 런 규칙의 적용을 위한 관리한계는 증가하여 슈와르트 관리도의 관리한계인 3에 근접하고, 슈와르트 기준을 위한 관리한계는 감소하여 3에 근접하는 경향을 보인다. 그리고 이상상태에서의 평균 런 길이 또한 슈와르트 관리도의 하한값인 1에 근접해 가는 경향을 보인다. 이는 변동량이 매우 큰 경우 슈와르트 기준이 더 빠르게 작용하기 때문에 Model 1나 Model 2가 결국에는 일반적인 슈와르트 관리도와 같은 성능을 보인다는 것을 알 수 있다.

그리고 <그림 3>과 <그림 4>를 보면 같은 Model에서 동일한 변동량을 가정한 경우 표본 크기가 클수록 이상상태에서의 평균 런 길이가 짧아짐을 알 수 있다. 이는 표본 크기가 클수록 정보량이 많아지게 되므로 2종 오류 확률(β)이 감소함을 의미하고, 따라서 더 빠른 이상감지가 가능함을 의미한다. 그러나 표본 크기의 영



<그림 3> Model 1의 ARL_δ



<그림 4> Model 2의 ARL_δ

향은 공정 평균의 변동량이 상대적으로 작은 경우 ($\delta < 2.0$)에는 크게 나타나지만, 공정 평균의 변동량이 큰 경우($\delta > 2.0$)에는 그 영향이 상대적으로 크지 않음을 알 수 있다. 그러므로 만약 이상원인에 의한 공정 평균의 변동량이 큰 경우에 표본 크기를 크게 하는 방법은 관리도의 통계적 성능을 높이기 위한 방법으로써 그 효과가 크지 않음을 알 수 있다.

5.2 공정 평균의 변동에 따른 평균 런 길이 변화

앞의 5.1절의 예제는 이상원인 발생에 의한 공정평균의 변동량이 확정적인 상황에 대한 분석결과이다. 하지만 일반적으로 실제 공정에서는 다양한 형태의 이상원인이 존재하고, 이에 따라 공정평균의 변동량 또한 다양한 값을 가질 것이다. 그러므로 5.1절의 결과를 단순 적용하기에는 한계가 있을 수 있다. 예를 들어 변동량의 크기가 $\delta = 1.0$ 인 경우를 기준으로 하여 관리한계를 설정한 후 공정을 운영할 경우 이상원인에 의한 공정평균의 변동량이 1.0인 경우에는 최적의 통계적 성능을 발휘할 수 있지만, 만약 다른 형태의 이상원인에 의해 다른 크기의 공정평균의 변동이 발생한 경우 기존의 운영지침은 최적의 통계적 성능을 발휘하지 못할 것이다. 따라서 본 절에서는 각 Model별로 고정된 관리한계를 사용하는 상황에서 임의의 변동량이 발생한 경우에 각 Model의 평균 런 길이를 비교함으로써, Model 1과 Model 2의 실제 공정에 대한 적용타당성을 살펴본다. 아래의 <표 4>는 $\pm 3\sigma$ 의 관리한계를 사용하는 슈와르트 관리도와 Model 1과 Model 2는 각각 표본크기는 1이고 변동량의 크기가 $\delta = 3.0$ 인 경우의 최적 관리한계를 사용하는 경우를 비교한 결과이다.

결과를 보면 Model 1과 Model 2의 관리한계로

<표 4> 고정된 관리한계를 사용하는 경우의 ARL_{δ}

δ	Model	Model 1		Model 2	
	슈와르트 관리도	$UCL_1/LCL_1 = \pm 2.039$ $UCL_2/LCL_2 = \pm 3.100$		$UCL_1/LCL_1 = \pm 2.160$ $UCL_2/LCL_2 = \pm 3.106$	
	$UCL/LCL = \pm 3.0$	ARL_{δ}	%R†	ARL_{δ}	%R
0.2	308.43	291.29	5.6	288.37	6.5
0.4	200.08	170.17	14.9	165.59	17.2
0.6	119.67	92.75	22.5	88.96	25.7
0.8	71.55	51.61	27.9	49.03	31.5
1.0	43.89	30.08	31.5	28.44	35.2
1.2	27.82	18.48	33.6	17.47	37.2
1.4	18.25	11.98	34.4	11.37	37.7
1.6	12.38	8.18	33.9	7.82	36.8
1.8	8.69	5.87	32.5	5.66	34.9
2.0	6.30	4.41	30.0	4.29	31.9
2.2	4.72	3.45	26.9	3.39	28.2
2.4	3.65	2.80	23.3	2.77	24.1
2.6	2.90	2.34	19.3	2.33	19.7
2.8	2.38	2.01	15.5	2.02	15.1
3.0	2.00	1.77	11.5	1.78	11.0
4.0	1.19	1.19	0.0	1.19	0.0
5.0	1.02	1.03	-1.0	1.03	-1.0
6.0	1.00	1.00	0.0	1.00	0.0

$\delta = 3.0$ 인 경우의 최적 관리한계를 사용하더라도 대부분의 변동량 영역($\delta < 4.0$)에서는 Model 1과 Model 2의 이상상태에서의 평균 런 길이가 슈와르트 관리도보다 각각 최대 34.4%와 37.7% 감소함을 알 수 있다. 또한 $\delta > 4.0$ 인 영역에서는 Model 1과 Model 2의 성능이 슈와르트 관리도에 비해 다소 떨어지는 경우도 발생하지만 그 정도는 그리 크지 않음을 알 수 있다. 즉, 특정한 변동량($\delta = 3.0$)에 대하여 최적인 관리한계를 사용하더라도 최적성능을 발휘하는 변동량의 주변영역(위의 예에서는 $0 < \delta < 4.0$)에서는 여전히 Model 1과 Model 2의 성능이 슈와르트 관리도보다 더 뛰어남을 알 수 있다. 그러므로 이상원인 발생에 의한 공정평균의 변동량이 확정적이지 않거나 여러 종류의 이상원인으로 인해 다양한 크기의 변동이 발생하는 경우라도 변동량의 발

생범위를 어느 정도 예측할 수 있다면 대표적인 변동량의 크기를 기준으로 런 규칙과 슈와르트 방법의 적용을 위한 관리한계를 결정된 후 공정에 적용하더라도 그 성능은 기존의 슈와르트 관리도만을 적용하는 것에 비해 상당히 개선된 성능을 발휘할 수 있을 것이다.

6. 결 론

본 연구는 2중 2 런 규칙과 3중 2 런 규칙이 각각 슈와르트 관리 방법과 동시에 사용되는 이상원인 감지 방법에 대한 통계적 설계 방법을 제시하였다. 각 방법에 대한 마코프 전이 모형을 설명하고, 이를 이용하여 관리상태에서의 평균 런 길이 및 이상원인 발생 직전의 공정 상태를 고려한 이상상태 평균 런 길이를 도출하였으며, 이를 바탕으로 런 규칙과 슈와르트 관리 방법이 동시에 사용되는 이상원인 감지 방법의 최적 관리한계를 제시하였다.

1) %R은 슈와르트 관리도의 ARL_{δ} 에 대한 각 Model의 ARL_{δ} 의 감소비율을 의미함

결과를 보면 전통적인 슈와르트 관리도 뿐만 아니라 런 규칙과 슈와르트 관리 방법이 동시에 사용되는 이상원인 발생 감지 방법은 이상원인에 의한 공정 평균의 변동이 클수록 이상상태의 평균 런 길이는 감소하는 형태를 보이는 데, 이는 변동량의 크기가 클수록 감지가 빨리 이루어짐을 의미한다. 또한 동일한 크기의 변동량을 감지하기 위한 평균 런 길이 값은 런 규칙과 슈와르트 관리 방법이 동시에 사용하는 것이 기존의 슈와르트 관리도를 사용하는 경우보다 줄어들음을 확인하였으며, 이상원인에 의한 공정 평균의 변동량이 일정하지 않은 경우에도 런 규칙과 슈와르트 관리 방법을 동시에 사용하는 것의 통계적 성능이 더 우수함을 확인하였다.

본 연구에서는 런 규칙과 슈와르트 관리도가 혼합된 이상원인 감지 방법의 통계적 특성만을 고려한 설계를 다루었으나, 경제적 비용을 고려한 경제적 설계도 가능할 것이다.

참고문헌

[1] 박창순, 이재현, 김영일(2002), "VSI와 VSS 관리도의 경제적 효율 비교", 「품질경영학회지」, 30권, 2호, pp. 99-117.

[2] 송서일, 박현규, 정혜진(2004), "VSI EWMA 관리도의 경제적 통계적 설계", 「품질경영학회지」, 32권, 1호, pp. 92-101.

[3] 이호중, 임태진(2005), "두 개의 이상원인을 고려한 VSSI \bar{X} 관리도의 경제적-통계적 설계", 「대한산업공학학회지」, 31권, 1호, pp. 87-98.

[4] 임태진(2005), "선택적 누적합(S-CUSUM) 관리도", 「품질경영학회지」, 33권, 3호, pp. 126-134.

[5] Acosta-Mejia, C. A.(2007), "Two Sets to Runs Rules for the \bar{X} Chart", *Quality Engineering*, Vol.19, pp.129-136.

[6] Bai, D. S. and Lee, K. T.(1998), "An Economic Design of Variable Sampling Interval \bar{X} Control Charts", *International Journal of Production Economics*, Vol.54, pp.57-64.

[7] Brook, D. and Evans D. A.(1972), "An approach to the Probability Distribution of CUSUM Run Lengths", *Biometrika*, Vol.59, pp.539-549.

[8] Champ, C. W. and Woodall, W. H.(1987), "Exact Results for Shewhart Control Charts With Sup-

plementary Runs Rules", *Technometrics*, Vol.29, No.4, pp.393-399.

[9] Chen, Y. K., Hsieh, K. L. and Chang, C. C.(2007), "Economic Design of the VSSI \bar{X} Control Charts for Correlated Data", *International Journal of Production Economics*, Vol.107, No.2, pp.528-539.

[10] Chung, K. J.(1992), "Determination of Optimal Design Parameters of an \bar{X} Control Chart", *Journal of Operational Research Society*, Vol.43, No.12, pp.1151-1157.

[11] Costa, A. F. B. and Magalhães M. S. De. (2005), "Economic design of two-stage charts: The Markov chain approach", *International Journal of Production Economics*, Vol.95, No.1, pp.9-20.

[12] Fu, J. C., Spiring, F. A. and Xie, H. (2002), "On the average run lengths of quality control schemes using a Markov chain approach", *Statistics & Probability Letters*, Vol.56, pp.369-380.

[13] Fu, J. C., Shmueli, G. and Chang, Y. M. (2003), "A unified Markov chain approach for computing the run length distribution in control charts with simple or compound rules", *Statistics & Probability Letters*, Vol.65, pp.457-466.

[14] Hurwitz A. and Mathur M.(1992), "A very Simple Set of Process Control Rules", *Quality Engineering*, Vol. 5, No. 1, pp. 21-29.

[15] Khoo, M. B. C. and Ariffin, K. N. bt. (2006), "Two Improved Runs rules for the Shewhart \bar{X} Control Chart", *Quality Engineering*, Vol.18, pp.173-178.

[16] Klein, M. (2000), "Two Alternatives to the Shewhart \bar{X} Control Chart", *Journal of Quality Technology*, Vol.32, pp.427-431.

[17] Prabhu, S. S., Montgomery, D. C. and Runger, G. C.(1997), "Economic-Statistical Design of an Adaptive \bar{X} Chart", *International Journal of Production Economics*, Vol.49, pp.1-15.

[18] Taylor, H. M. (1968), "The Economic Design of Cumulative Sum Control Charts, *Technometrics*", 10(3), 479-488.

[19] Woodall, W. H.(1985), "The statistical design of quality control charts", *The Statistician*, Vol.34, pp.155-160.

부 록

Model 1의 이상상태에서의 평균 런 길이($ARL_{1\delta}$)를 계산하기 위해 필요한 흡수상태를 제외한 일시상태들 간의 전이확률로 구성된 행렬 Q 와 기본행렬 M 은 아래와 같다.

$$Q = \begin{pmatrix} q & q_U & q_L \\ q & 0 & q_L \\ q & q_U & 0 \end{pmatrix} \quad (A-1)$$

$$M = (I - Q)^{-1}$$

$$= \frac{1}{A} \begin{pmatrix} 1 - q_L q_U & q_U(1 + q_L) & q_L(1 + q_U) \\ q(1 + q_L) & 1 - q - q q_L & q_L \\ q(1 + q_U) & q_U & 1 - q - q q_U \end{pmatrix} \quad (A-2)$$

$$(\text{단, } A = 1 - q_L q_U - q(1 + q_U)(1 + q_L))$$

이상원인 발생 직전의 공정 상태를 나타내는 t 가 $t' = \{p + p_S, p_U, p_L\}$ 이므로, $ARL_{1\delta}$ 는 결국 아래와 같다.

$$\begin{aligned} ARL_{1\delta} &= (p + p_S) \sum_{i=1}^3 M_{i1} + p_U \sum_{i=1}^3 M_{i2} + p_L \sum_{i=1}^3 M_{i3} \\ &= \frac{1 + (1 - p_U)q_U + q_L(1 - p_U + (1 - 2p_U)q_U)}{1 - q_L q_U - q(1 + q_U)(1 + q_L)} \end{aligned} \quad (A-3)$$

Model 2의 이상상태에서의 평균 런 길이($ARL_{2\delta}$)도 같은 방법으로 계산할 수 있다. <표 2>에서 Q 를 구하고 이를 통해 계산된 M 과 3장에서 구한 t' 를 3장에 있는 식 (4)에 대입하면 이상상태에서의 평균 런 길이가 계산된다.