

초기 헤딩오차 민감도 완화 호밍 유도법칙

Homing Guidance Law for Alleviating Sensitivity to Initial Heading Errors

이진익* **전인수***
 Lee, Jin-Ik Jeon, In-Soo

ABSTRACT

In this paper, a new guidance law to reduce sensitivity to the initial heading errors is proposed. In order for shaping the input weights over the flight, we introduce the distribution functions expressed in terms of time-to-go and its inverse term. By applying the optimal control theory with the synthesized weights, the homing guidance law is derived. Also the characteristics of the proposed law are examined. Various computer simulations show the good performance of the proposed guidance.

주요기술용어(주제어) : Homing Guidance(호밍 유도), Heading Errors(헤딩 오차), Weighting Function(가중 함수), Optimal Guidance(최적 유도)

1. 머리말

유도 비행체의 유도법칙을 도출함에 있어서 제어 에너지 최소화는 가장 기본적인 요구조건 중의 하나이다. 이는 비행체의 제어력 한계를 우선적으로 고려할 뿐만 아니라 항력에 의한 에너지 손실을 최소화하여 비행거리를 가능한 증가시키거나 혹은 종말 단계를 위한 에너지를 비축하고자 함이다. 또한 목표물 근방까지 비행체의 속력을 최대화함으로써 표적의 급작스러운 기동 등 예상치 못한 외란에 대응하여 요격 오차를 최소화하고자 함이다.

비행체 내에 탑재된 탐색기와 같은 호밍 센서가 목표물 정보를 제공하기 시작하는 호밍단계는 비행체의 유도방식이나 운용개념에 따라 대부분 선행단계를 거

치게 된다. 즉 호밍센서가 표적을 추적할 수 있는 적절한 영역(Lock-On Basket)으로 유도 비행체를 유도하는 중기 유도단계에서는 관성항법 유도(Inertial Navigation Guidance)법칙을, 호밍센서 정보로부터 목표물 요격을 시작하는 호밍단계에서는 비례항법 유도(Proportional Navigation Guidance) 법칙^[1]을 주로 사용한다. 비례항법 유도법칙은 개념적으로 비행체와 목표물 그리고 예상목표점을 잇는 충돌 삼각형(Collision Course)을 유지하도록 하는 유도법칙이다. 따라서 호밍단계로의 전환시 가능한 한 충돌 삼각형을 이루도록 초기조건을 설정하는 것이 요구된다. 단거리 요격용인 경우 호밍단계의 초기조건을 고려하여 선도각(Lead Angle) 만큼 지향시켜 발사하며, 중/장거리용인 경우 선행되는 중기단계의 종말에서 헤딩오차가 유발되지 않도록 구속조건이 부여되기도 한다. 그런데 현실적으로 이러한 호밍단계 초기조건을 완벽히 만족시키기는 매우 어려우며, 이를 만족시키지 못할 경우 호밍단계 전환 직후 유도명령은 급격한 천이

† 2008년 6월 5일 접수~2008년 7월 25일 게재승인

* 국방과학연구소(ADD)

주저자 이메일 : jinik@add.re.kr

현상이 수반된다. 이는 비행체의 의도하지 않은 기동 운동을 유발하게 되며, 표적 추적을 위한 호밍 센서 측면에서는 외란 형태로 작용하게 된다. 이는 다시 유도루프에 되먹임되어 또 다른 천이를 유발한다. 이러한 과정에서 경우에 따라 유도명령이 제한치를 초과하는 경우가 생기거나 혹은 호밍 센서가 더 이상 표적을 추적하기 어렵게 되거나 극단적인 경우 천이 현상 중에 표적을 지나치는 경우까지 초래하게 된다. 이러한 비 정상적인 현상의 완화를 위해서는 호밍단계 초기에 선도각 오차에 따른 민감도를 줄이는 형태의 유도법칙이 요구된다. 즉 호밍 초기에 헤딩오차에 의한 천이현상을 다소 줄이고 시간이 지남에 따라 점점 충돌 삼각형 오차를 수정할 수 있는 유도법칙은 이러한 문제 해결을 위한 하나의 해로 제시될 수 있다. 기존의 비례항법 유도법칙의 이득은 상수(3~5)를 가짐으로써 이러한 요구조건을 만족시키기 어려운 구조이다. 이는 비행 전구간에 걸쳐 동일한 비중으로 에너지를 최소화하도록 비용함수가 구성되었기 때문이다. 따라서 이러한 구조적 제한을 극복한다면, 즉 유도루프 이득이 시변이 되도록 가중치를 적절히 선택한다면 제기된 문제에 대한 해결의 실마리를 찾을 수 있다.

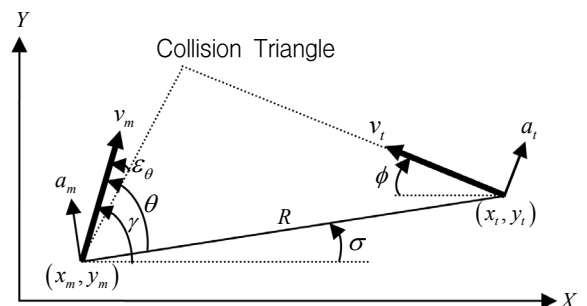
가중치로 시변 함수를 사용하는 경우로서 잔여 비행시간의 역수형태($1/t_{go}^m$)를 가중함수로 사용한 경우에 대한 연구 결과^[2]가 발표되었으며 또한 이러한 가중함수에 대해서 충돌각 구속조건을 고려한 유도법칙^[3]이 도출된 바 있다. 하지만 이는 비행 초기에 낮은 비중을 부과함으로써 헤딩오차에 의한 유도명령은 고정된 비중을 사용한 비례항법에 비해 상대적으로 커지게 된다. 또한 기존의 비례항법의 이득계수와 가중치와의 관계에 대한 연구^[4,5]가 수행되었으며, 충돌각 구속조건이 있는 경우 이득행렬의 계수와 비용함수와의 관계에 대한 해석 결과^[6]도 제시되었다. 하지만 이들 연구에서 조차 가중함수를 선택하는 과정에서 물리적 의미를 부여하는 과정이 불명확하거나 다소 부족하였다. 특히 초기 헤딩오차와 같은 영향을 고려하거나 이를 완화하는 구조에 대해서는 아직까지 다루지 않았다.

본 논문에서는 유도 비행체의 호밍 과정에 있어서 전반부와 후반부에 제어명령을 분배할 수 있는 구조

를 갖는 새로운 형태의 유도법칙을 제안한다. 이를 위해 제어명령 가중치로 상수가 아닌 비행 잔여시간의 함수로 비용함수를 구성한다. 이때 비용함수를 잔여 비행시간과 이의 역수를 동시에 고려한 두 항으로 구성한다. 잔여 비행시간은 목표물과의 거리에 비례하게 되므로 후자 항은 비행체가 목표물 근방에 도달할수록 제어명령에 대한 가중치가 크게 되어 유도오차를 최소화하는 기능을 하게 된다. 반면 전자의 항은 호밍단계 초반부에 가중치가 크게 되어 헤딩오차에 의한 유도명령을 줄이는 역할을 하게 됨을 알 수 있다. 이들 가중치에 가중 계수를 부가하여 일반화함으로써 비행 전반부와 후반부에 적절한 비중 분배를 할 수 있도록 하여 유도루프 설계자로 하여금 비행 제한조건 반영이나 궤적 성형의 여지를 제공한다.

2. 문제 설정

본 논문에서 사용할 호밍 유도 기하를 그림1에 도시하였다. 그림에서 (x_m, y_m) 와 (x_t, y_t) 는 각각 유도 비행체와 표적의 위치이다. γ 는 유도 비행체의 비행 경로각이며, σ 는 유도 비행체와 표적을 잇는 시선(LOS : Line-of-Sight)의 각이다. v_m, v_t 는 각각 유도 비행체 및 표적의 속력을 의미하는데 본 논문에서 취급할 유도법칙은 호밍단계로 국한하여 전 구간에서 일정하다고 가정한다. 또한 a_m 과 a_t 는 각각 유도 비행체 및 표적의 기동 가속도로서 각각의 비행 경로를 수정한다.



[그림 1] 호밍 유도 기하

그림 1로부터 σ 가 작다고 가정하여 선형화한 후 유도 비행체에 대한 표적의 상대 위치 $y = y_t - y_m$ 를

상태변수로 하는 운동 방정식을 표현하면 다음과 같다. 여기서 비행체는 시간지연이 없는(Lag-Free) 시스템으로 간주한다.

$$\dot{\xi} = \mathbf{F}\xi + \mathbf{G}u, \quad \xi(0) = \xi_0 \quad (1)$$

여기서

$$\xi = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

이고, $u = a_m$, $y_1 = y$, $y_2 = \dot{y}$ 이다. 이제 유도 비행체의 유도 명령을 최소화하기 위해 성능지수를 다음과 같이 정의하자.

$$J = \frac{1}{2} \xi^T \mathbf{Q}_f \xi + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} u^2 dt \quad (3)$$

위 식은 일반적인 에너지 최적 제어문제로 만약 $\mathbf{Q}_f = \text{diag}.[\infty, 0]$ 로 두면 최적제어 명령 a_m 는

$$a_m^* = \frac{3(y_1 + t_{go}y_2)}{t_{go}^2} \quad (4)$$

로써 잘 알려진 비례항법 유도법칙이 된다^[1]. 여기서 $t_{go} = t_f - t$ 로서 잔여 비행시간이며 목표물 근방으로 갈수록 $t_{go} \rightarrow 0$ 가 되어 호밍 루프의 대역폭은 ∞ 가 되고 유도오차가 0으로 수렴하게 된다. 한편, (3)에서 제어입력에 대한 가중함수를 잔여 비행시간의 역수형태로 설정하면 보다 일반적인 형태의 비례항법 유도법칙을 얻을 수 있다^[2]. 즉 (4)에서 항법이득 ‘3’ 대신에 N 을 사용한 것과 동일하며 형태는 다음과 같다.

$$a_{pN} = Nv_c \dot{\sigma} \quad (5)$$

여기서 v_c 는 상대속도를 의미한다. 호밍단계 초기의 시선에 대한 유도 비행체의 비행 경로각을

$$\theta = \gamma - \sigma \quad (6)$$

라고 하자. 만약 유도 비행체와 표적의 속도가 일정

하다고 하면, 위 값이 다음 식을 만족할 경우 유도 비행체는 더 이상의 기동 명령이 없어도 충돌 삼각형(Collision Triangle)을 유지하며 표적을 명중하게 된다.

$$\theta^* = \sin^{-1} \frac{v_t \sin(\phi + \sigma)}{v_m} \quad (7)$$

일반적으로 이 값을 선도각(Lead Angle)라고 일컫는다. 하지만 이 값은 실전에 있어서는 이론적인 값에 해당한다. 즉 실제 비행환경에서 표적에 대한 정보 즉 v_t 및 ϕ 를 완벽히 예측하기란 거의 불가능하기 때문이다.

한편, 전술하였듯이 호밍 유도단계에서는 비행체에 호밍센서를 탑재한 경우 비례항법 유도법칙을 널리 사용한다. 이는 이 유도법칙이 요격 성능도 뛰어난 뿐만 아니라 유도법칙도 간단하고 구현이 용이하기 때문이다. 비례항법 유도법칙을 사용하는 경우 호밍 유도단계 초기의 유도명령^[7]은 다음과 같다.

$$a_m = -\frac{Nv_m \varepsilon_\theta}{t_f} \quad (8)$$

여기서 ε_θ 는 선도각 오차로 (7)를 정확히 예측하지 못한 오차 값이다.

만약 중기 유도단계의 종말 조건으로 호밍 유도단계의 초기 조건인 (7)을 만족시키지 못할 경우 호밍 유도단계에서의 초기 유도명령은 (8)과 같게 되고 결과적으로 단계전환 순간 유도명령의 점프 현상을 피할 수 없게 된다. 이러한 천이현상을 피하기 위해서는 (7)의 선도각을 정확히 예측해야 할 뿐만 아니라 호밍 유도단계의 정확한 진입시점 예측도 요구된다. 하지만 무엇보다도 이러한 값들을 매 순간 예측하여 중기 유도단계의 종말 조건으로 (7)을 만족하는 중기 유도법칙의 해를 구하는 일은 매우 어렵다. 참고로 실전에서는 천이현상을 억제하기 위한 대책으로 유도명령을 단순히 저역 필터를 통과시키거나 가중함수를 이용한 천이 필터를 사용하기도 한다. 하지만 이러한 천이필터에 의한 전체 유도루프의 안정성이나 성능에 대해 이론적인 뒷받침이 부족한 실정이다.

3. 유도법칙 제한

새로운 호밍 유도법칙의 도출을 위해 (3)의 성능 지수를 다음과 같이 재정의하자.

$$J = \frac{1}{2} \|\xi\|_{Q_f}^2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} r(t) u^2 dt \quad (9)$$

여기서 $Q_f = \text{diag.}[q_1, q_2]$ 는 종말 상태변수, $r(t)$ 는 유도명령에 대한 가중치이다. $r(t)=1$ 인 상수로 설정한 경우 잘 알려진 비례항법 유도법칙이 됨을 앞서 고찰한 바 있다. 또한 가중치를 잔여 비행시간의 함수인 $r(t)=1/t_{go}^m$ 의 형태로 설정하는 경우와 관련된 연구^[3,5,6]가 수행된 바 있는데, 이는 비행 후반부로 갈수록 큰 가중치를 부여하여 유도명령을 상대적으로 작게 하는 궤적을 형성하기 위함이다. 즉 비행 궤적 형성에 적은 에너지를 사용하고 종말에 목표물의 급격한 기동이나 기타 외란에 대응하기 위한 에너지를 확보하기 위함이다. 그러나 이러한 경우 호밍단계 초반에 유도명령이 상대적으로 커지게 된다. 따라서 본 연구에서는 다음과 같은 가중함수를 제안한다.

$$r(t) = \frac{1}{t_{go}} + k^2 t_{go} \quad (10)$$

위 식의 첫 번째 항은 비행 후반부에서 $t_{go} \rightarrow 0$ 로 되므로 유도오차를 '0'으로 수렴시키는 역할을 하게 된다. 반면, 두 번째 항은 비행 전반부에서 매우 커지게 되므로 호밍단계 시작 직후 유도명령을 상대적으로 작게 하는 역할을 한다. 즉 (10)의 가중함수는 비행 잔여시간에 대해 그림 2와 같은 형태를 구성하게 되어 비행 중반부에서 상대적으로 유도명령이 커질 수 있다. 하지만 이는 연속함수로서 유도 비행체에 급격한 유도명령의 변화는 초래하지 않음을 예견할 수 있다. 참고로 (10)을 t_{go} 에 대해 미분하면

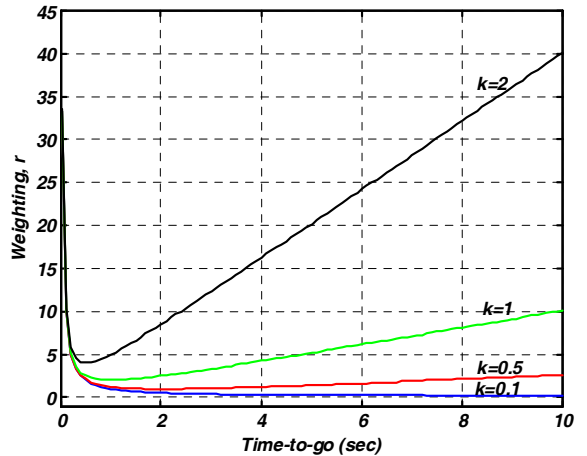
$$\frac{dr(t)}{dt_{go}} = k^2 - \frac{1}{t_{go}^2} \quad (11)$$

이 되며, 가중치 $r(t)$ 가 최소가 되는 시점은

$$t_{go} = \frac{1}{k} \quad (12)$$

따라서 k 를 적절히 선택함으로써 가중치를 배분할 수 있다. 참고로 그림 2는 가중 계수 k 에 따른 가중치를 잔여 시간에 대해 도시한 것이다. 그림에서 잔여시간이 큰 비행 초기와 표적 근방에서 가중치가 큼을 알 수 있다.

이제, (9)와 같이 주어진 성능지수를 최소화하는 제어명령을 구해보자. 우선 Hamiltonian은 다음과 같이 정의된다.



[그림 2] 잔여 비행시간에 따른 가중치

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t_{go}} + k^2 t_{go} \right) u^2 + \lambda_1 y_2 - \lambda_2 u \quad (13)$$

여기서 λ_1, λ_2 는 부 상태벡터들이다. 최적해를 위한 필요조건 및 충분조건으로부터 최적제어 입력 u^* 는 다음과 같이 주어진다.

$$u^* = \frac{\lambda_1 t_{go}^2 + \lambda_2 t_{go}}{1 + k^2 t_{go}^2} \quad (14)$$

$$\frac{1 + k^2 t_{go}^2}{t_{go}} > 0, \forall t \in [t_0, t_f] \quad (15)$$

최적제어 입력 u^* 는 최소값을 가짐을 알 수 있다.

또한 $t = t_f$ 에서의 상태변수의 최적 해는 다음과 같다.

$$y_1^*(t_f) = y_{10} + y_{20}t_f + \left(\frac{k^2 t_f^2 - \ln(1+k^2 t_f^2)}{2k^4} \right) \lambda_{1f} + \left(\frac{kt_f - \tan^{-1}(kt_f)}{k^3} \right) \lambda_{2f} \quad (16)$$

$$y_2^*(t_f) = y_{20} + \left(\frac{kt_f - \tan^{-1}(kt_f)}{k^3} \right) \lambda_{1f} + \frac{\ln(1+k^2 t_f^2)}{2k^2} \lambda_{2f} \quad (17)$$

$y_i^*(t_f) = \lambda_{if}/q_i$, $i=1,2$ 이므로 이를 위 식에 대입하고 $t = t_f$ 에서 부 상태벡터의 최적 해를 구하여 정리하면 최종적으로 다음과 같은 최적제어 유도명령을 얻을 수 있다.

$$a_m^* = \frac{c_1 y_1 + c_2 t_{go} y_2}{t_{go}^2} \quad (18)$$

$$c_1 = \Delta^{-1} \left[\frac{2\eta k^2}{q_2} - 2\eta + 2\tan^{-1}(\eta) + \eta \ln(1+\eta^2) \right] \quad (19)$$

$$c_2 = \Delta^{-1} \left[\frac{1}{\eta} \left(\frac{2k^4}{q_1} + \frac{2\eta^2 k^2}{q_2} - 3\eta^2 + 4\eta \tan^{-1}(\eta) + (\eta^2 - 1) \ln(1+\eta^2) \right) \right] \quad (20)$$

$$\Delta = -\frac{1}{2} \left(\frac{1+\eta^2}{\eta^3} \right) \begin{pmatrix} 4[\eta - \tan^{-1}(\eta)]^2 \\ - \left[\frac{2k^4}{q_1} + \eta^2 - \ln(1+\eta^2) \right] \left[\frac{2k^2}{q_2} + \ln(1+\eta^2) \right] \end{pmatrix} \quad (21)$$

여기서 $\eta = kt_{go}$ 이다. 만약 $q_1 \rightarrow \infty$, $q_2 \rightarrow 0$ 인 경우 (4)와 비교하면

$$a_m^* = \tilde{N} \frac{(y + t_{go} \dot{y})}{t_{go}^2} = \tilde{N} v_c \dot{\sigma} \quad (22)$$

$$\tilde{N} = 2\eta^4 \Delta^{-1}, \quad \Delta = (1+\eta^2)(\eta^2 - \ln(1+\eta^2)) \quad (23)$$

위 식에서 비례항법 유도법칙의 이득 \tilde{N} 의 특성을

고찰해 보자.

$$\lim_{k \rightarrow 0} \tilde{N} = 4 \rightarrow a_m^* = \frac{4}{3} a_{PN}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{N} = 2 \rightarrow a_m^* = \frac{2}{3} a_{PN} \quad (24)$$

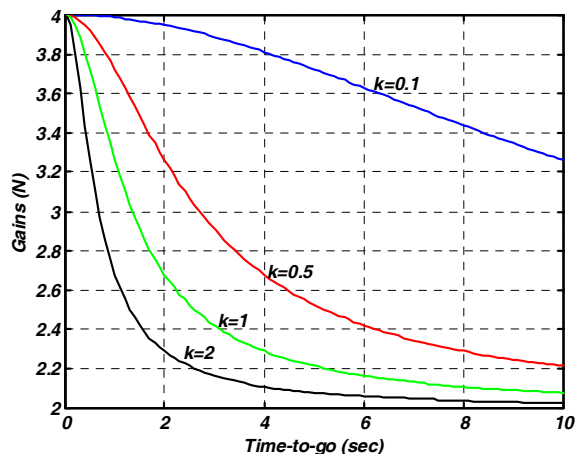
이는 각각 최적 비례항법의 4/3, 2/3배에 해당한다.

한편, 호밍 유도단계 초기 표적과의 조우 시간이 충분한 경우 $k=1$ 에 대해서 등가적인 이득은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\lim_{t_{go} \rightarrow \infty, k=1} \tilde{N} = \frac{2t_{go}^4}{(1+t_{go}^2)(t_{go}^2 - \log(1+t_{go}^2))} \approx 2 + \varepsilon \quad (25)$$

여기서 $0 < \varepsilon \ll 1$ 이다. 위 식으로부터 $\tilde{N} \approx 2$ 즉 비행 초반의 유도명령은 최적 비례항법 유도명령 a_{PN} 의 2/3배가 됨을 알 수 있다.

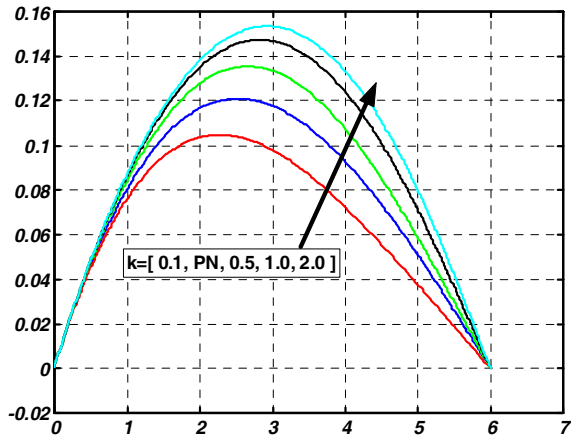
참고로 (23)의 항법이득을 잔여 비행시간에 대해 도시하면 그림 3과 같다. 그림에서 배분계수 k 가 커짐에 따라 비행초기에 이득이 작아짐을 알 수 있다. 이러한 특성으로 인해 항법이득 '3'을 사용하는 유도법칙에 비해 비행초기 유도명령이 상대적으로 작아진다. 한편 목표물 근방에서는 k 와 무관하게 이득이 항상 '4'로 수렴함을 알 수 있다. 즉 초기 '3'보다 작은 이득으로 인해 후반부에서는 상대적으로 이득이 더 커지는 특성을 갖는다.



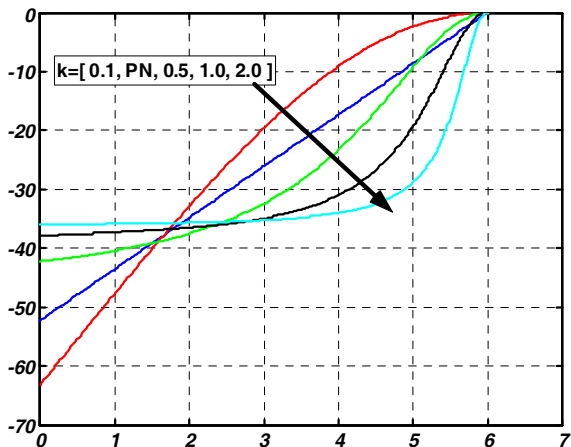
[그림 3] 배분계수 k 에 따른 제어이득 계수 \tilde{N}

4. 시뮬레이션

시뮬레이션에 사용된 시나리오는 참고문헌 [2]의 예제와 동일하게 사용한다. 즉 상대속도가 $v_c = 3000m/s$ 이고, 초기 비행 경로각은 $\gamma = 2deg$ 인 경우이다. 시뮬레이션에 사용된 좌표계는 초기 시선(LOS) 방향을 X 축으로 하는 유도좌표계를 사용한다. 참고로 시뮬레이션에서는 본 연구에서 제안한 유도법칙에서 (10)의 k 에 따른 결과와 기존에 널리 사용되고 있는 비례항법 유도법칙과 비교하기로 한다.



[그림 4] 수직 거리



[그림 5] 가속도 명령

그림 4는 수직거리를 도시한 것으로, 비행시간 약 6초에 목표물에 정확히 도달함을 확인할 수 있다. k 의 값이 클수록 기준선에 대해서 다소 벗어나서 목표물로 도달하는 현상을 보이고 있다. 이는 (10)의 두 번째 항에 대한 비중이 상대적으로 커지면서 비행 초기에는 헤딩오차를 제거하려는 유도명령이 상대적으로 작아지기 때문이다. 그림 5에서 k 값이 큰 경우 비행 초반부에는 PNG에 비해 가속도 명령의 크기는 작으나 중반에 이르기까지 거의 일정한 값을 유지하고 있다. 예를 들면, 그림에서 PNG의 경우 초기 가속도 명령이 $-53m/s^2$ 정도인 반면 $k=1$ 인 경우는 이 값의 약 70%인 $-37m/s^2$ 정도로 (24)의 해석 결과와 거의 일치함을 보여준다. 따라서 제안한 유도법칙을 사용할 경우 초기 헤딩오차에 대한 민감도가 낮아 호밍 단계로의 단계전환이나 유도법칙의 전환 순간 유도명령의 크기가 상대적으로 작게 된다. 이는 유도비행체의 기동량을 줄여 천이현상을 완화시켜줌을 알 수 있다. 뿐만 아니라 PNG의 경우 가속도 명령이 일차함수인 것에 비해 제안한 유도법칙은 평균적으로 거의 일정한 가속도를 사용하는 형태를 갖는다.

5. 맺음말

본 논문에서는 호밍 유도단계의 초반부에 헤딩오차에 대한 민감도를 완화하기 위해 제어입력 가중함수를 분배하여 설정하고, 이를 근거로 하여 최적 유도법칙을 제안하였다. 제안된 유도법칙에 의해 호밍단계 초기 제어 명령의 크기를 기존의 비례항법 유도법칙에 비해 작게 산출되게 함으로써 호밍단계 전환 직후의 천이현상을 완화시켜 보다 비행체가 안정적으로 호밍 단계로 전환할 수 있도록 함을 알 수 있었다.

한편, 제안한 유도법칙을 적용시 비행 초기 누적되는 헤딩오차에 의한 영향 분석과 회피 기동을 하는 표적에 대한 요격성능이나 오차 해석은 추후 연구과제로 남긴다.

참 고 문 헌

- [1] Arthur E. Bryson, Jr., Yu-Chi Ho, Applied Optimal Control, Hemisphere Publishing Co., 148, 1975.
- [2] J. Z. Ben-Asher, N. Farber, and S. Levinson, "New Proportional Navigation Law for Ground-to-Air Systems", J. Guidance, Vol. 26, No. 5, 822, 2003.
- [3] C. K. Ryoo, H. Cho, and M. J. Tahk, "Time-to-go Weighted Optimal Guidance Law With Impact Angle Constraints", IEEE Trans. on Contr. Sys. Tech., Vol. 14, No. 3, 483, 2006.
- [4] Eliezer Kleindler, "Optimality of Proportional Navigation", AIAA Journal, Vol. 11, No. 6, 878, 1973.
- [5] E. G. Kim and Y. I. Lee, "The Characteristics of Open-loop Trajectory and Time-to-go for Proportional Navigation Constant N", KSAS, Vol. 27, No. 4, 115, 1999.
- [6] 이진익, 이용인, "충돌각 제어 호밍 유도법칙의 역 최적 문제", 한국항공우주학회지, 35권 5호, 2007.
- [7] P. Zarchan, Tactical and Strategic Missile Guidance, 4th ed., AIAA Inc., 2002.