

수중 유체저장용 막구조물 형상의 이론적 해석

최윤락*

*울산대학교 조선해양공학부

An Analytic Solution of the Shape of a Partially Filled, Submerged Membrane Container

YOON-RAK CHOI*

*School of Naval Architecture and Ocean Engineering, University of Ulsan, Ulsan, Korea

KEY WORDS: Partially filled submerged membrane structure 수중 유체저장용 막구조물, Analytic solution of the shape형상의 해석적 해, A point of inflection 변곡점, Elliptic integrals 타원적분

ABSTRACT: For a partially filled and deeply submerged membrane container, an analytic solution for similarity shape was studied. The static shape of a membrane container can be expressed as a set of nonlinear ordinary differential equations. These equations are combined into an integrable equation. The solution of the equation is derived in terms of elliptic integrals, the arguments of which contain an unknown at the point of inflection. The point of inflection is determined by using the boundary condition at a separating point. Some characteristic values of the similarity shape were evaluated and the shapes are illustrated.

1. 서 론

최근 들어 막구조물을 활용한 항만 및 토목시공과 각종 구조물 설치가 급증하고 있다. 이러한 막구조물은 임시 제방, 해안의 침식억제 구조물, 간이 방파제, 해저 및 하상 준설토의 저장용기 등 다양한 용도로 사용되고 있으며 앞으로도 다양한 형태 및 기능을 가진 구조물이 보급되리라 예상된다(Koerner, 2000; Restall et al., 2002; Kee, 2005a; Kee, 2005b).

저장성 막구조물의 형상은 내부와 외부 물질의 유체정력학적 압력과 저장용기의 크기에 의해 결정된다(Plaut and Suherman, 1998). 2차원 튜브형 막구조물의 형상에 관한 연구로써는 Leshchinsky et al. (1996), Plaut and Suherman (1998), Plaut and Klusman (1999), Cantre (2002), Wang(2002), 최윤락(2007) 등이 있다.

본 연구에서는 외부 유체의 밀도 보다 작은 밀도의 내부 유체를 저장하고 있는 2차원 막구조물의 상사형상과 특성치들을 해석적으로 구하였다. Fig. 1과 같이 두 겹의 긴 막구조물에 내부 유체 또는 연속체가 저장되며 하단부는 장력 $2T$ 로 고정되어 있다. 이와 유사한 문제에 대한 연구로는 경사면에 놓인 막구조물 형상에 대한 해석적 해를 최윤락 (2007)이 구한 바 있다.

2. 문제의 정식화

Fig. 1과 같이 막구조물 상단 중앙점을 원점으로 하는 직교좌표

교신저자 최윤락: 울산광역시 남구 무거2동 신29
052-259-2158 yrchoi@ulsan.ac.kr

계를 도입하고 원점에서의 외부 정압력을 p_{oo} , 내부 정압력을 p_{oi} 라 하며 연직하방으로 중력이 작용하는 막구조물에 대하여 Fig. 2와 같이 힘의 정적 평형조건을 고려하면 다음의 식을 유도할 수 있다.

$$\frac{d\theta}{ds'} = \frac{1}{T} [P_{oi} - P_{oo} - (\rho_o - \rho_i)gy'] \quad (1)$$

여기서 T 는 단위폭 당 장력으로 상수이며 ρ_o 는 외부 유체의 밀도, ρ_i 는 내부 유체의 밀도로 $\rho_o > \rho_i$ 이다. 그리고 g 는 중력가속도이다. 이때 해석대상 막구조물 자체의 중량은 내부 유체의 중량에 비해 매우 작다는 가정 하에 무시하였다. 또한 고정되지 않은 분리점($x' = 0, y' = -\xi'$)을 가진 매우 긴 막구조물이라는 가정에 따라 막구조물의 인장변형은 전체적인 형상 변화에 비해 매우 작으므로 무시하였고 외부유체의 흐름이나 자유표면의 동적영향이 없는 정적상태만을 고려하였다.

한편, 기하학적 적합성에 따른 관계식들은 다음과 같다.

$$\frac{dx'}{ds'} = \cos\theta, \quad \frac{dy'}{ds'} = \sin\theta \quad (2)$$

그리고 경계조건으로는 원점과 분리점(Separating point)에서 주어지며 다음 식들로 표현된다.

$$\theta(s' = 0) = 0, \quad x'(s' = 0) = 0, \quad y'(s' = 0) = 0 \quad (3)$$

$$\theta(s' = s'^*) = \frac{\pi}{2}, \quad x'(s' = s'^*) = 0, \quad y'(s' = s'^*) = \xi' \quad (4)$$

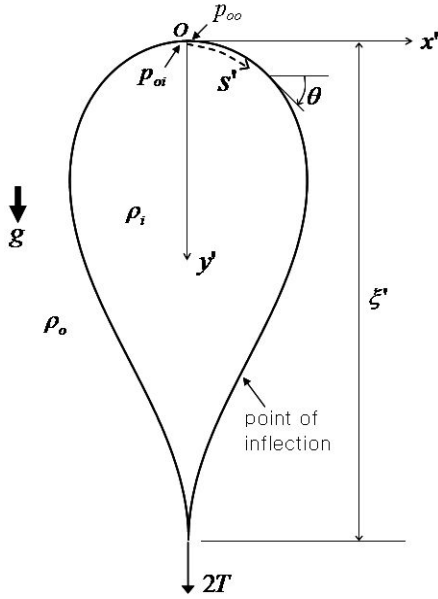


Fig. 1 Partially filled submerged membrane

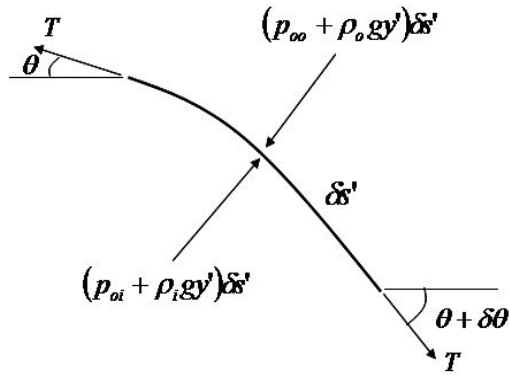


Fig. 2 Forces exerted on a small element of membrane

여기서 s^* 는 원점으로부터 분리점까지의 원호길이(Arc length)이다.

부력과 장력의 평형조건을 고려하면 장력과 부피의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (\rho_o - \rho_i)gV' &= 2(\rho_o - \rho_i)g \int_0^{s^*} x' \sin\theta ds' \\ &= -2(\rho_o - \rho_i)g \int_0^{s^*} y' \cos\theta ds' = 2T \end{aligned} \quad (5)$$

식 (5)를 보면 특성길이 $l = \sqrt{T/(\rho_o - \rho_i)g}$ 를 도입함으로써 다음과 같은 무차원화된 방정식과 그에 대한 경계조건 및 장력-부피 관계를 얻을 수 있다(Wang, 2002; 최윤락, 2007).

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{l}{L} - y \quad (6)$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\theta \quad (7)$$

$$\theta(0) = 0, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0 \quad (8)$$

$$\theta(s^*) = \frac{\pi}{2}, \quad x(s^*) = 0, \quad y(s^*) = \xi \quad (9)$$

$$V = 2 \int_0^{s^*} x \sin\theta ds = -2 \int_0^{s^*} y \cos\theta ds = 2 \quad (10)$$

여기서, x, y, s, ξ 는 길이차원의 물리량 x', y', s', ξ' 를 l 로 무차원화 한 값이며 V 는 부피 V' 를 l^2 으로 무차원화 값이다. 그리고

$$l/L = (P_{oi} - P_{oo}) / \sqrt{T(\rho_o - \rho_i)g} \quad (11)$$

이다.

식 (6)에서 식 (9)를 보면 이 문제는 독립변수 s 에 대한 3개의 종속변수 (θ, x, y)의 비선형 연립미분방정식의 형태이고 분리점에서 경계조건 적용점과 값이 미지의 값 s^* 와 ξ 를 포함하고 있어 해석이 용이하지 않다. 이러한 난점을 해결하기 위해 식 (6)을 s 에 대해 한 번 더 미분 한 후 식 (7)을 사용하면 다음과 같은 2계 비선형 상미분방정식을 얻게 되며 이에 대한 추가적인 경계조건을 부가할 수 있다.

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\sin\theta \quad (12)$$

$$\frac{d\theta}{ds}(0) = \frac{l}{L} \quad (13)$$

$$\frac{d\theta}{ds}(s^*) = \frac{l}{L} - \xi \quad (14)$$

식 (12)는 $z = d\theta/ds$ 로 치환하면 한 번 적분 가능하며 식 (13)의 경계조건을 적용하여 아래의 결과 식을 얻는다.

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = -2 + 2\cos\theta + \left(\frac{l}{L}\right)^2 \quad (15)$$

이 식은 식 (14)의 경계조건을 만족해야 하므로 무차원 수 l/L 은 ξ 로 표현된다.

$$\frac{l}{L} = \frac{\xi}{2} + \frac{1}{\xi} \geq \sqrt{2} \quad (16)$$

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 2\cos\theta + \left(-\frac{\xi}{2} + \frac{1}{\xi}\right)^2 \quad (17)$$

3. 형상 변곡점의 결정

식 (17)을 사용하기 위해서는 곡률($d\theta/ds$)의 부호를 결정하여야 한다. Fig 1을 보면 $d\theta/ds = 0$ 이 되는 형상 변곡점이 존재하는데 변곡점을 기준으로 위 부분은 양의 곡률을 가지며 아래 부분은 음의 곡률을 가진다. 식 (1)에 따르면 변곡점에서의 내부 압력과 외부 압력은 동일하며, 변곡점 위 부분은 내부 압력이 높고 아래 부분은

낮다. 변곡점에서의 접선각(θ)은 최대값을 가지고(Fig. 3 참조) 이 점에서의 접선각을 $\theta = \theta_1$ 이라하면 식 (17)로부터 θ_1 과 ξ 의 관계를 얻을 수 있다.

$$2\cos\theta_1 = -\left(-\frac{\xi}{2} + \frac{1}{\xi}\right)^2 \quad (18)$$

그리고 변곡점까지의 원호길이를 $s = s_1$ 이라 하면 곡률은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{d\theta}{ds} = \pm \sqrt{2} \sqrt{\cos\theta - \cos\theta_1} \quad (19)$$

식 (19)에서 양의 부호는 구간 $0 \leq s \leq s_1$ ($0 \leq \theta \leq \theta_1$), 음의 부호는 구간 $s_1 < s \leq s^*$ ($\theta_1 > \theta \geq \frac{\pi}{2}$)에 대응된다.

한편, 식 (7)의 첫 번째 식을 사용하면 θ_1 에 대한 방정식을 얻을 수 있는데 이를 위하여 먼저 x 에 대한 미분방정식을 다음과 같이 표현한다.

$$dx = \frac{\cos\theta}{\left(\frac{d\theta}{ds}\right)} d\theta \quad (20)$$

이 식에 식 (19)를 대입하고 원점으로 부터 분리점에 이르는 경로에 대해 적분하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$0 = \int_0^{\theta_1} \frac{\cos\theta}{\sqrt{2} \sqrt{\cos\theta - \cos\theta_1}} d\theta - \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sqrt{2} \sqrt{\cos\theta - \cos\theta_1}} d\theta \quad (21)$$

식 (21)의 적분들을 수행하면 다음과 같이 타원적분(Elliptic integral)값들로 결과가 얻어진다(Gradshteyn and Ryzhik, 2000).

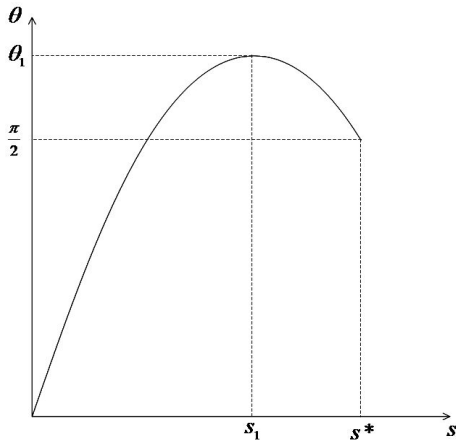


Fig. 3 Schematic of θ according to s

$$0 = 4E(\pi/2, \gamma) - 2F(\pi/2, \gamma) - 2E(\alpha, \gamma) + F(\alpha, \gamma) \quad (22)$$

여기서,

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\gamma}\right), \quad \gamma = \sin\frac{\theta_1}{2} \quad (23)$$

이고, F 와 E 는 각각 제1종과 제2종의 타원적분으로 다음의 같이 정의된다(Gradshteyn and Ryzhik, 2000).

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\lambda}{\sqrt{1-k^2\sin^2\lambda}} \quad (24)$$

$$E(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1-k^2\sin^2\lambda} d\lambda \quad (25)$$

식 (22)의 해로써 θ_1 을 구할 수 있으며 식 (18)로부터 ξ 도 구할 수 있다.

$$\xi = \sqrt{2}(\sqrt{1-\cos\theta_1} + \sqrt{-\cos\theta_1}) \quad (26)$$

또한 원점에서의 입력차($p_{oi} - p_{oo}$), 장력(T), 상대비중($(\rho_o - \rho_i)g$) 간의 관계인 l/L 도 결정된다. 따라서 식 (6)에서 (9)까지의 식으로 주어지는 무차원화된 막구조물의 형상은 특성길이에 대한 상사형상(Similarity shape)임을 알 수 있다.

4. 상사형상

접선각에 대한 x 와 y 좌표값을 구하기 위해 식 (7)을 원점을 시작점으로 한 경로에 따라 적분한다.

$$x = \int_0^{\theta} \frac{\cos\theta}{\left(\frac{d\theta}{ds}\right)} ds \quad (27)$$

$$y = \int_0^{\theta} \frac{\sin\theta}{\left(\frac{d\theta}{ds}\right)} ds \quad (28)$$

이들 식을 적분경로에 따라 식 (19)로 주어진 곡률의 부호를 적절히 선택하여 적분을 수행한다. 먼저 식 (27)의 적분을 수행하면 그 결과는 다음과 같이 구간별로 표현된다(Gradshteyn and Ryzhik, 2000).

$$x = 2E(A(\theta), \gamma) - F(A(\theta), \gamma), \quad \text{for } 0 \leq s \leq s_1 \quad (29a)$$

$$x = 4E(\pi/2, \gamma) - 2F(\pi/2, \gamma) - 2E(A(\theta), \gamma) + F(A(\theta), \gamma), \quad \text{for } s_1 < s \leq s^* \quad (29b)$$

여기서,

$$A(\theta) = \sin^{-1}\left(\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\gamma}\right) \quad (30)$$

이다.

식 (28)의 결과도 식 (19)를 이용하여 적분하면 다음과 같다.

$$y = \sqrt{2}(\sqrt{1 - \cos\theta_1} \mp \sqrt{\cos\theta - \cos\theta_1}) \quad (31)$$

여기서, 음의 부호는 구간 $0 \leq s \leq s_1$ ($0 \leq \theta \leq \theta_1$), 양의 부호는 구간 $s_1 < s \leq s^*$ ($\theta_1 > \theta \geq \pi$)에 대응된다.

원호길이 s 는 식 (19)를 적분하여 구할 수 있는데 그 결과는 다음과 같다.

$$s = F(A(\theta), \gamma), \quad \text{for } 0 \leq s \leq s_1 \quad (32a)$$

$$s = 2F(\pi/2, \gamma) - F(A(\theta), \gamma), \quad \text{for } s_1 < s \leq s^* \quad (32b)$$

5. 해석 결과 및 적용 예

변곡점에서의 곡률 θ_1 은 식 (22)의 해로써 구할 수 있고 그 값은 117.54도이다. Fig. 4에 식 (32)에 따른 접선각과 원호길이의 관계를 도시하였다. 이 그림에서 s_1 과 s^* 는 식 (33)에 따라 각각 다음의 값이다.

$$s_1 = F(\pi/2, \gamma), \quad s^* = 2F(\pi/2, \gamma) - F(\alpha, \gamma) \quad (33)$$

원점으로 부터 분리점까지의 수직길이인 ξ 는 식 (26)에 의해 2.67이며 원점에서의 곡률과 무차원수 l/L 은 식 (13)과 (19)에 의해 $(d\theta/ds)(0) = l/L = 1.71$ 이다. 또한 분리점에서의 곡률은 식 (19)에 의해 $(d\theta/ds)(s^*) = -0.96$ 이다.

식 (29)와 (31)에 따라 상사형상을 Fig. 5에 도시하였다. 이때 최대 폭지점의 좌표값은 $\theta = \pi/2$ 인 지점이다.

$$x_{\max} = 2E(\alpha, \gamma) - F(\alpha, \gamma) \quad (34a)$$

$$y_{x_{\max}} = \sqrt{2}(\sqrt{1 - \cos\theta_1} - \sqrt{-\cos\theta_1}) \quad (34b)$$

외부 유체보다 압력이 높은 부분의 체적(V_1)은 원점으로 부터 변곡점에 이르는 경로를 따라 적분하여 얻을 수 있는데 식 (6)과 (7)의 첫 번째 식을 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V_1 &= 2\left(-\int_0^{x_1} y dx - \int_{x_1}^0 y_1 dx\right) \\ &= 2\sin\theta_1 - 2\left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{\xi}\right)x_1 + 2y_1x_1 \end{aligned} \quad (35)$$

변곡점에서의 좌표값 (x_1, y_1) 을 구하여 이를 계산해보면 $V_1 = 1.77$ 으로 전체 체적의 88.7%에 해당한다.

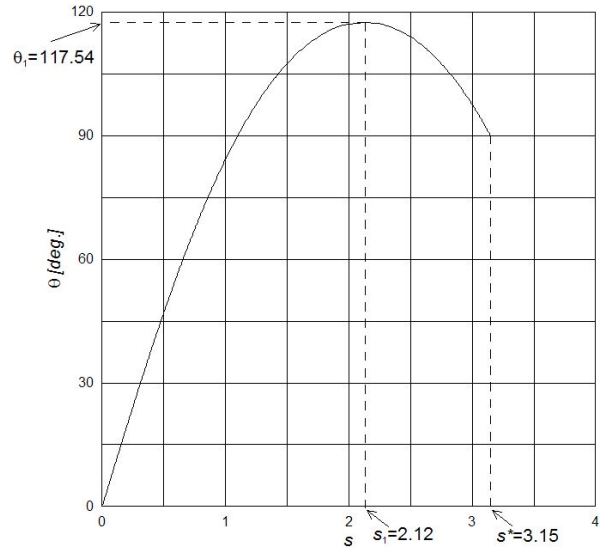


Fig. 4 Plot of θ according to s

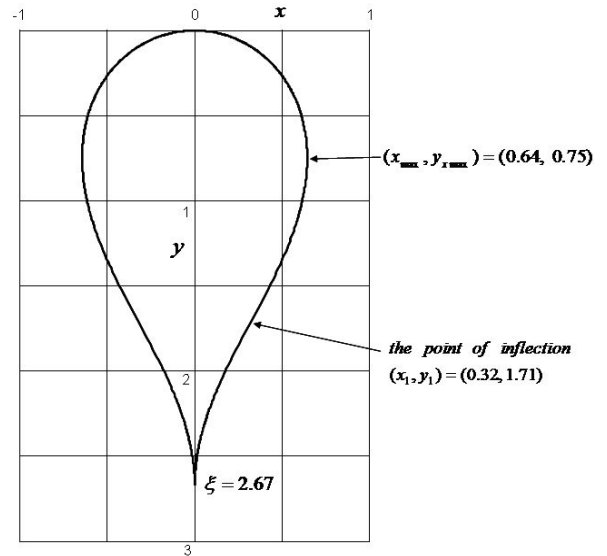


Fig. 5 Similarity shape of a partially filled and deep submerged membrane container

적용 예로써 하단이 고정된 일정 길이의 막구조물에 유체를 계속 주입하는 경우를 Fig. 6에 도시하였다. 이 때 내부 유체의 양은 가장 큰 부피를 기준으로 각각 0%, 1.5625%, 6.25%, 25% 그리고 100%에 해당한다. 식 (5)에서 장력은 내부 유체의 부피 V' 에 비례하고 따라서 특성길이 l 은 $\sqrt{V'}$ 에 비례한다. 부피가 4배씩 증가하므로 특성길이가 2배씩 증가한다.

만약 막구조물에 주입된 유체의 부피 V' 를 알고 있으면 특성길이 $l = \sqrt{V'}/2$ 로 계산되며 식 (29)와 (31)로 주어지는 상사형상으로부터 실제형상을 구할 수 있고 각종 특성치들의 실제 값도 구할 수 있다.

원점 및 분리점에서의 내부와 외부 유체의 압력차는 해당 지점에서의 곡률을 이용하여 구할 수 있다.

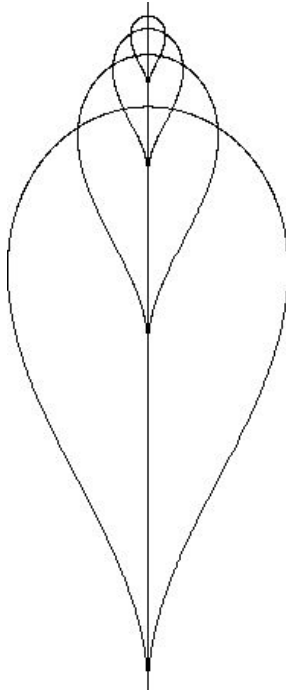


Fig. 6 Filling of container

$$\frac{p_{oi} - p_{oo}}{(\rho_o - \rho_i)g\sqrt{V'}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{l}{L} = 1.21 \quad (36a)$$

$$\frac{p_{oi} + \rho_i g \xi' - p_{oo} - \rho_o g \xi'}{(\rho_o - \rho_i)g\sqrt{V'}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{l}{L} - \xi \right) = -0.68 \quad (36b)$$

만약 내부 유체의 밀도가 외부 유체의 밀도 보다 클 경우 ($\rho_i > \rho_o$)에는 Fig. 5의 상사형상을 상하 반전하면 되며 상사형상의 특성치들은 동일하다.

6. 결 론

외부 유체의 밀도 보다 작은 밀도의 내부 유체를 저장하고 있는 2차원 막구조물의 상사형상과 특성치들을 해석적으로 구하였다.

특성길이를 무차원화된 비선형 삼미분방정식 문제에서 미지의 값들을 포함하는 분리점의 경계조건을 형상 변곡점에서의 곡률이 0이라는 조건을 사용하여 해석하였다. 이를 통해 변곡점에서의 접선각을 구하였고 접선각을 매개변수로 하여 상사형상을 구하였다. 상사형상은 타원적분들로 표현되며 형상의 각종 특성치들도 이론적으로 해석하였다.

본 연구결과에서 구한 상사형상을 활용하면 주입된 내부 유체의 체적과 밀도를 사용하여 실제형상을 알 수 있으며 내부 유체의 압력분포도 구할 수 있다.

후 기

본 연구는 울산대학교의 지원으로 수행되었고 연구비 지원에 감사드립니다.

참 고 문 헌

- 최윤락 (2007). "경사면에 놓인 유체 저장용 막구조물 형상의 이론적 해석", 한국해양공학회지, 제21권, 제1호, pp 45-50.
- Cantre, S. (2002). "Geotextile Tubes-Analytical Design Aspects", Geotextiles and Geomembranes, Vol 20, No 5, pp 305-319.
- Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. (2000). Table of Integrals, Series, and Products, 6th ed., Academic Press.
- Kee, S.T. (2005a). "Submerged Horizontal and Vertical Membrane Wave Barrier", J. Ocean Eng. and Tech., Vol 19, No 2, pp 1-11.
- Kee, S.T. (2005b). "Responses of Submerged Double Hull Pontoon/Membrane Breakwater", J. Ocean Eng. and Tech., Vol 19, No 2, pp 19-28.
- Koerner, R.B. (2000). "Emerging and Future Developments of Selected Geosynthetic Applications", J. Geotech. and Geoenviron. Eng., Vol 126, No 4, pp 293-306.
- Leshchinsky, D., Leshchinsky, O., Ling, H.I. and Gilbert, P.A. (1996). "Geosynthetic Tubes for Confining Pressurized Slurry: Some Design Aspects", J. Geotech. Eng., Vol 122, No 8, pp 682-690.
- Plaut, R.H. and Suherman, S. (1998). "Two-Dimensional Analysis of Geosynthetic Tubes", Acta Mechanica, Vol 129, pp 207-218.
- Plaut, R.H. and Klusman, C.R. (1999). "Two-Dimensional Analysis of Stacked Geosynthetic Tubes on Deformable Foundation", Thin-Walled Structures, Vol 34, No 3, pp 179-194.
- Restall, S.J., Jackson, L.A., Heerten, G. and Hornsey, W.P. (2002). "Case Studies Showing the Growth and Development of Geotextile Sand Containers: An Australian Perspective", Geotextiles and Geomembranes, Vol 20, No 5, pp 321-342.
- Wang C.Y. (2002). "Similarity Shapes of an Inclined, Partially Filled Membrane Container", J. Eng. Mech., Vol 128, No 2, pp 249-251.

2008년 7월 18일 원고 접수

2008년 9월 8일 최종 수정본 채택