

불확실한 파라미터를 갖는 시스템을 위한 근궤적법을 이용한 지능형 PID 제어기 설계

Intelligent PID Controller Design Using Root-Locus Analysis for Systems with Parameter Uncertainties

✉ 신영주¹

✉ Young Joo Shin¹

¹ 삼성전자 메모리사업부 (Memory Division, Samsung Electronics, Co., Ltd.)

✉ Corresponding author: yj2247.shin@samsung.com, Tel: 010-3205-2247

Manuscript received: 2007.11.5 / Revised: 2008.3.31, 6.17 / Accepted: 2008.7.15

In this research, a simple technique for designing PID controller, which guarantees robust stability for two-mass systems with parameter uncertainties as well as rigid-body behavior and zero steady-state error, is described. As well, such a PID controller is designed to make two important frequencies, at which the given system is excited, very close so that an appropriate reference profile generated by using command shaping techniques can cover those two frequencies. Root-locus analysis, which shows traces of closed-loop poles for the given system, is used to design this PID controller. Finally, feedforward controller is added to improve tracking performance of the closed-loop system. Simulation for a system with a flexible mode and parameter uncertainties is executed to prove the feasibility of this technique.

Key Words: Shaped Input (성형 입력), Residual Vibration (잔여 진동), Robustness (강인성), PID Controller (PID 제어기), Root-locus Analysis (근궤적 분석법)

1. 서론

유연 모드(flexible mode)를 가지는 시스템의 잔여 진동(residual vibration)을 최소화 하는 문제는 오랜 기간 동안 제어 엔지니어들의 연구 대상이 되어 왔다. 이러한 문제의 효율적 해결을 위하여 주로 피드백 제어기(feedback controller)의 개발에 초점을 두어 왔고 이를 통해 상당한 성과를 거두었다.^{1,2} 1980년대 후반을 기점으로 기준 입력(reference input)을 성형(shaping)하여 시스템의 잔여 진동을 제어하는 기법들이 많이 소개되었다. 이러한 기법들은 피드백 제어기에서 요구되는 센서와

복잡한 제어 알고리즘의 구현 없이 개루프(open-loop) 방식으로 적용할 수 있어 각광 받았다. Meckl 과 Seering^{3,4} 은 공진 주파수대(resonant frequency band)에서 spectral magnitude를 최소화 하는 계수들과 경사 삼각함수(ramped sinusoid function)들로 구성된 입력 함수(input function)를 개발하였다. Singh 과 Singhose⁵ 는 일련의 임펄스 함수(impulse function)를 사용하여, 명령 신호에 의해서 생성된 진동들이 서로 상쇄될 수 있도록 하는 입력 성형기(input shaper)를 개발하였다. 이러한 성형 입력들은 시스템의 안정성(stability) 및 추종 성능(tracking performance)을 더욱 향상시키기 위해

피드백 또는 피드포워드 제어기(feedforward controller)와 함께 최적화 되어 사용되었다. Shin⁶은 성형 입력(shaped input)을 피드백 및 피드포워드 제어기의 위치 입력(position input)으로 사용하여 파라미터 모델 오차를 갖는 시스템에 대해 안정성 및 최소 잔여 진동을 갖는 제어 전략을 개발하였다.

이 연구에서는 유연 모드 및 파라미터 모델 오차를 갖는 시스템에 대해, 성형 입력을 기준 입력으로 사용하는 피드백 제어기의 간단한 설계 기법을 소개한다. 이러한 피드백 제어기는 시스템의 안정성을 보장하고, 시스템 진동의 주요 원인이 되는 각 모듈들의 공진 주파수들이 근접하게 하여 하나의 주파수 대역(frequency band)에서 가진 에너지(excitation energy)를 추출한 성형 입력이 적용 가능하도록 한다. 제어기 설계를 위해 근궤적 분석(root-locus analysis)이 사용되며 결과적인 제어기는 PID 제어기이다. 설계의 용이성과 위에서 언급된 제어기의 장점들로 인하여 지능형 PID 제어기(intelligent PID controller)라 불리어 진다.

2. 시스템 모델 및 제어 전략

2.1 시스템 모델

본 연구에서는 일반적으로 제조 장비에서 많이 사용되는 구동 모듈을 모델화한, 유연 모드를 갖는 두 질량(two-mass) 시스템에 초점을 둔다. 구동 모듈에 있어서 첫 번째 질량은 제어 입력(u)에 의해 구동되는 slider(m_1)이고, 두 번째 질량은 작업의 최종 요소인 end tool(m_2)이 된다. 그리고 이러한 두 질량은 유연 모드를 발생시키는 스프링(k)과 댐퍼(b)에 의해 연결되어 있다. 이러한 제어 대상이 되는 시스템 모델이 Fig. 1에서 보여 진다.

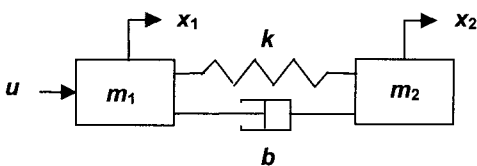


Fig. 1 Two-mass system linked by spring and damper

실제 시스템에 있어서 end tool 은 크기 및 형상의 여러 가지 제약으로 인하여 위치를 피드백할 수 있는 센서를 가지지 못하는 경우가 많다.

본 연구에서도 최종적인 관심의 대상은 end tool 의 위치(x_2)이지만, 단지 slider 의 위치(x_1)만이 시스템 안에서 측정 가능한 것으로 가정 하여 현실적인 제약들을 반영한다.

2.1.1 기준 모델의 전달 함수

뉴턴의 운동 법칙에 의해 제어 입력과 두 질량의 위치 관계를 보여주는 미분방정식이 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= u \\ m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

시간 영역에서의 식(1)을 주파수 영역으로 옮겨 제어 입력 u 와 측정 가능한 위치 x_1 과의 관계를 나타내는 전달 함수 G_{p1} 과 두 위치 신호 x_1 과 x_2 의 관계를 나타내는 G_{p2} 를 식(2)와 (3)에 나타내었다.

$$G_{p1}(s) = \frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + \frac{2\zeta\omega_n}{M_r+1}s + \frac{\omega_n^2}{M_r+1}}{m_1s^2(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (2)$$

$$G_{p2}(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{\frac{2\zeta\omega_n}{M_r+1}s + \frac{\omega_n^2}{M_r+1}}{s^2 + \frac{2\zeta\omega_n}{M_r+1}s + \frac{\omega_n^2}{M_r+1}} \quad (3)$$

여기서 $M_r (= m_2/m_1)$ 은 m_1 에 대한 m_2 의 질량비(mass ratio)로서, 그 값이 작을수록 시스템은 강체(rigid body)에 가까워 진다. $\omega_n = \sqrt{(m_1^{-1} + m_2^{-1})k}$ 그리고 $\zeta = b(m_1^{-1} + m_2^{-1})/(2\omega_n)$ 이다.

2.1.2 파라미터 오차를 갖는 모델

실제 시스템(actual system)은 파라미터의 변화 및 모델에서 표현되지 못한 파라미터들로 인하여 식(2)와 (3)으로 표현된 전달 함수와는 차이를 갖게 된다. 이러한 실제 시스템과 모델의 차이는 추가적인 파라미터들에 의해 보상될 수 있다. 이 연구에서는 단지, 시스템의 고유 진동수(natural frequency, ω_n) 와 시스템 이득(gain)만이 각각 γ 와 $\delta\%$ 의 파라미터 오차를 갖는 것으로 가정한다. 이러한 경우, 실제 시스템의 고유 진동수(ω_a) 및 시스템 이득(g_a)은 식(4)와 같이 표현되며, 식(2)와

(3)에 대응하는 실제 시스템의 전달 함수는 식(5)와 (6)과 같이 표현 된다.

$$\omega_a = \omega_n(1 + \gamma/100), \quad g_a = 1 + \delta/100 \quad (4)$$

$$G_{a1}(s) = \frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{g_a \left(s^2 + \frac{2\zeta\omega_a}{M_r+1}s + \frac{\omega_a^2}{M_r+1} \right)}{m_r s^2 (s^2 + 2\zeta\omega_a s + \omega_a^2)} \quad (5)$$

$$G_{a2}(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{\frac{2\zeta\omega_a}{M_r+1}s + \frac{\omega_a^2}{M_r+1}}{g_a \left(s^2 + \frac{2\zeta\omega_a}{M_r+1}s + \frac{\omega_a^2}{M_r+1} \right)} \quad (6)$$

2.2 제어기 구성

본 연구에서 사용되는 제어 전략은 피드백(feedback) 제어기, 피드포워드(feedforward) 제어기 그리고 성형 입력(shaped input)의 세 가지 주요한 제어 요소로 구성되어 있다. 이들은 제어 대상이 되는 시스템에 각각의 고유한 역할을 가진다. 피드백 제어기는 주어진 시스템의 감쇠(damping)를 증가시키고, 정상상태(steady-state) 에러가 존재하지 않도록 하여, 주어진 제어 대상 시스템이 유연 모드(flexible mode)를 가짐에도 강체(rigid-body) 운동을 가능하게 한다. 피드포워드 제어기는 주어진 제어력(control force)을 최적으로 사용하게 하여, 기준 입력(reference input)에 대한 시스템의 추종 성능(tracking performance)을 향상시킨다. 성형 입력은 시스템의 유연 모드(flexible mode)로부터 가진 에너지(excitation energy)를 제거하여 모션의 끝에서 나타나는 잔여 진동(residual vibration)을 감소시킨다.

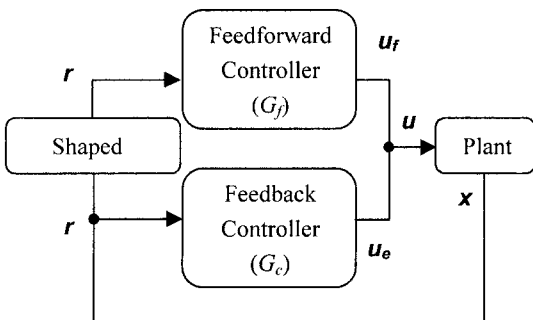


Fig. 2 Block diagram of proposed control system

이러한 제어 요소들은 Fig. 2 에서 보이는 것과 같은 블록 선도(block diagram)로 나타내어 질 수 있다. 이 그림에서 기준 위치 입력 r 은 성형 입력으로서 명령 성형 기법(command shaping technique)⁷에 의해 생성된 가속도 프로파일을 두 번 적분함에 의하여 생성된다. 이 가속도 프로파일은 시스템의 공진 주파수에서 가진 에너지를 제거하여, 시스템 동작의 끝에서 발생하는 잔여 진동(residual vibration)을 최소화 한 것이다. 이러한 기준 입력은 실제 측정된 위치 값 x 와 함께 피드백 제어기(G_c)의 출력 u_e 를 생성하기 위한 입력으로 사용되며, 피드포워드 제어기(G_f)의 출력인 u_f 의 생성을 위해서도 사용된다. 제어 입력 u 는 두 제어기의 출력인 u_e 와 u_f 의 합으로 나타내 진다. 이러한 제어기 시스템의 구성은 Fujisaki 와 Ikeda⁸에 의해서 야기된 2 자유도 제어기 설계와 유사하다. 또한 이러한 세 개의 제어 요소로 구성된 제어 전략은 Shin 과 Meckl⁹에 의해서 제안되고, 구현된 바 있다.

본 연구에서는 이러한 제어 요소들 중 성형 입력 및 피드백 제어기 설계의 연동성에 주안점을 두었다.

2.2.1 피드백 제어기

본 연구에서는 피드백 제어기로 intelligent PID 제어기를 사용하며 그 전달 함수는 식(7)에 나타나 있다.

$$G_c(s) = K_p + K_D s + \frac{K_I}{s} \quad (7)$$

이러한 제어기는 주어진 플랜트 G_{p1} 과 함께 페루프 시스템을 형성하고 앞에서 언급되었던 피드백 제어기의 고유한 역할인 시스템 감쇠 증가 및 정상 상태 에러 제거를 수행하며, 시스템 모델의 파라미터 오차가 존재하는 하에서도 페루프 시스템(closed-loop system)의 안정성(stability)을 보장한다. 페루프 시스템의 전달 함수 G_{cl} 가 식(8)에 나타나 있으며, 식(3)에 나타난 G_{p2} 가 고유 주파수를 포함하는 형태로 식(9)에 다시 표현되어 있다. 이 두 전달 함수를 포함하는 전체 시스템의 블록 선도가 Fig. 3 에 나타나 있다. Intelligent PID 제어기의 또 다른 특징은 첫 번째 질량의 잔여 진동에 영향을 미치는 페루프 고유 주파수 ω_c 와 두 번째

질량의 잔여 진동에 영향을 미치는 G_{p2} 의 고유 주파수 ω_{12} 를 충분히 근접하게 하여 성형 입력이 동시에 두 주파수에서의 가진을 다룰 수 있도록 하는 것이다. 이러한 PID 제어기의 상세 설계는 3장에서 다루어 진다.

$$G_{cl}(s) = \frac{G_c G_{p1}}{1 + G_c G_{p1}} \tag{8}$$

$$= \frac{(b_4 s^4 + b_3 s^3 + \dots)}{(s^2 + 2\zeta_c \omega_c s + \omega_c^2)(s^3 + a_2 s^2 + \dots)}$$

$$G_{p2}(s) = \frac{cs + d}{s^2 + 2\zeta_{12} \omega_{12} s + \omega_{12}^2} \tag{9}$$

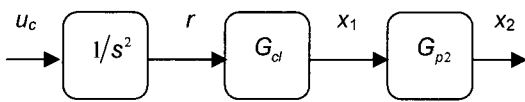


Fig. 3 Block diagram of closed-loop system showing transfer functions

2.2.2 성형 입력

이 연구에서는 시스템의 진동 주파수에서 가진 에너지를 제거하여 시스템의 잔여 진동이 최소화 되도록 설계된 성형 입력을 기준 입력으로 사용한다. 이러한 입력 프로파일은 Fig. 4에서 보여지는 것처럼, 가진 에너지가 제거되어야 할 진동 주파수 ω_o , 주어진 이동 거리 x_f , 그리고 생성된 프로파일의 최고 극치를 결정 하는 제한력 F_{peak} 을 입력 파라미터로 받는 명령 성형기 (command shaper)에 의해 생성된다.



Fig. 4 Process to generate shaped reference force

이렇게 생성된 성형 입력 $F_{ref}(t)$ 은 식(10)에 나타난 것처럼 일련의 경사 삼각함수 항들로 구성되어 있다.

$$F_{ref}(t) = \sum_{i=1}^l \left(\frac{B_i}{\alpha_i^2} \right) \left(\alpha_i \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T_f} \right) + \sin \left(\alpha_i \frac{t}{T_f} \right) - \frac{\alpha_i}{2} \cos \left(\alpha_i \frac{t}{T_f} \right) \right) \tag{10}$$

이 식에서 T_f 는 성형 입력의 총 이동 시간이며 α_i 은 정해진 고유의 특성 값이며, 각 항의 계수 B_i 은 시간 최적화(time optimality)와 진동 감소(vibration reduction)의 두 상반된 특성을 가지는 성능 지수(performance index, PI)를 최소화 시킴에 의해서 구해 진다.

$$PI = \frac{1}{T_f} \left\{ \int_0^{T_f/2} [1 - F_{ref}(t)]^2 dt + \int_{T_f/2}^{T_f} [-1 - F_{ref}(t)]^2 dt \right\} \tag{11}$$

$$+ \rho \sum_{i=1}^n (\omega_i T_f)^2 |\Gamma_{ref}(\omega_i T_f)|^2$$

위 식에서 Γ_{ref} 는 F_{ref} 의 라플라스 변형식(Laplace transform)이다.

이러한 성형 입력의 한 가지 특징은 진동 주파수의 작은 모델 오차 존재 하에서도 적절하게 잔여 진동 저하(vibration reduction)가 가능하다는 것이다. 예를 들어, 실제 주파수가 주어진 기준 진동 주파수 ω_o 로부터 $\gamma\%$ 의 오차 안에 존재 한다면 $\omega_o - \gamma/100$ 부터 $\omega_o + \gamma/100$ 까지의 주파수 대역(frequency band)을 n 등분하여 각각의 주파수에서 가진 에너지를 추출한다. 식(11)의 오른쪽 부분의 두 번째 항이 이러한 내용을 나타내고 있다. Fig. 5는 γ 의 값이 10%이며 n 의 값을 11로 하였을 때의 표준 성형 입력(normalized shaped input)의 주파수 스펙트럼(frequency spectrum)이다.

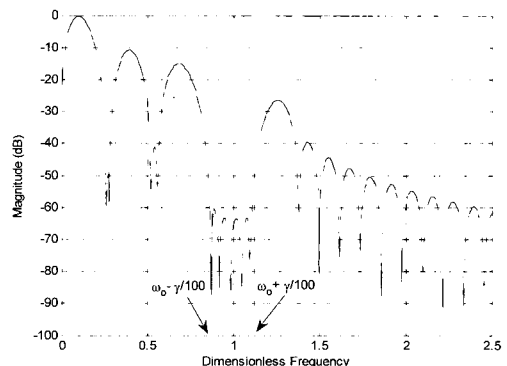


Fig. 5 Frequency spectrum of normalized shaped force input

이 그림에서 무차원 주파수(dimensionless frequency) 0.9 ~ 1.1 사이에서 가진 에너지가 추출되어 실제 시스템의 진동수가 이 범위 안에서의 오차를 갖는다 해도 성형 입력은 충분히 시스템의 잔여 진동을 막을 수 있는 것을 보여준다.

3. 근궤적법을 이용한 PID 제어기 설계

이 연구에서는 피드백 제어기로서 intelligent PID 제어기를 채택하였다. 이러한 제어기는 기존의 피드백 제어기의 역할 이외에 두 가지의 역할을 한다. 첫째는 시스템 모델 파라미터의 오차가 존재하는 상태에서도 페루프 시스템의 안정성을 보장하는 것이고, 둘째는 페루프 시스템의 공진 주파수 ω_c 와 전달 함수 G_{p2} 의 고유 주파수 ω_{12} 가 근접하게 하여 두 주파수가 동시에 성형 입력의 에너지 감소 주파수 대역에 들어오도록 하는 것이다. 이러한 제어기의 설계를 위하여 시스템 파라미터에 따라 페루프 폴(closed-loop pole)의 위치를 보여 주는 근궤적 분석법(root-locus analysis) 이 사용된다. 이러한 근궤적은 실수 축(real axis)을 기준으로 대칭이므로, 이후의 진행에서는 복소 평면(complex plane)의 양의 허수 부분(imaginary part)만이 다루어 진다.

3.1 페루프 시스템의 안정성을 위한 조건

식(7)에 나타난 PID 제어기는 식(12)와 같이 미분기 이득 K_D , 한 쌍의 켈레 복소수 제로(zero), 그리고 원점의 한 폴로 구성된 전달 함수로 표현될 수 있다.

$$G_c(s) = K_D \frac{(s+z)(s+\bar{z})}{s} \quad (12)$$

제어기의 완성을 위해서는 미분기 이득 K_D 와 복소수 제로 $z (= a+bi)$ 가 결정 되어야 한다.

근궤적법의 사용을 위하여 식(13)에서 보여지는 것처럼 루프 전달함수(loop transfer function) G_l 이 G_{p1} 과 G_c 로 구성되며, 루프 이득(loop gain) K_L 은 식(14)와 같이 계산된다.

$$G_l = G_{p1}G_c = K_L \frac{N(s)}{D(s)} \quad (13)$$

$$K_L = K_D/m_1 \quad (14)$$

제어기 제로 Z_c 의 다른 두 위치에 따른 루프 전달 함수 G_l 의 대표적인 두 형태의 근궤적이 Fig. 6 에서 보여 진다. 이러한 근궤적의 생성을 위한 시스템 파라미터로 $m_1=0.2, m_2=0.05, k=400, b=0.4$ 를 사용하였으며, 제어기 제로 Z_c 의 실수 부를 -20 로 고정하고 허수 부는 50 와 120 로 선택하여 Z_p 의 허수 부보다 큰 경우와 작은 경우를 다루었다. 먼저 Z_c 의 허수 부가 Z_p 의 허수 부보다 작은 경우(solid-line), 루프 이득 K_L 이 허수 축(imaginary axis) 상에 페루프 폴이 존재할 때의 이득인 최소 루프 이득 $K_{Lmin}(= 20.0)$ 보다 크기만 하면 페루프 시스템은 항상 안정하게 된다. 그러나 Z_c 의 허수 부가 클 경우(dotted-line)에는 허수 축 상에 페루프 폴이 존재하는 루프 이득이 세 경우 이며(K_1, K_2 & K_3), 이들 중 최대값이 페루프 시스템의 안정성을 보장하는 루프 이득의 최소값 K_{Lmin} 이 된다. 이 경우에는 K_1, K_2 그리고 K_3 의 값이 각각 57.4, 15.6, 49.1 이므로 K_1 이 K_{Lmin} 이 된다. 이렇게 구해진 K_{Lmin} 에 의해 제어기의 미분기 이득의 최소값 K_{Dmin} 이 식(14)에 의해서 구해진다.

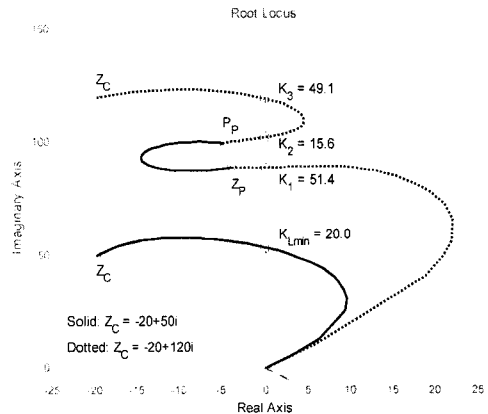


Fig. 6 Root-loci depending on the imaginary part of controller zero

시스템이 파라미터 오차를 갖는 경우 페루프의 안정성을 보장하는 최소 루프 이득은 수정 되어야 한다. Fig. 7 은 시스템 파라미터로 $m_1 = 0.05, m_2 = 0.2, k = 400, b = 0.4, Z_c = -20 + 50i$ 인 루프 전달 함수의 근궤적을 보여 주며, 동시에 시스템의 고

유 주파수와 시스템 이득이 각각 $\pm 20\%$ 의 모델 오차를 갖는 경우의 근궤적 또한 나타내고 있다. 시스템의 파라미터 오차가 없는 경우 페루프 시스템의 안정성을 보장하는 최소 루프 이득은 30.8 이다. 그러나 주파수 오차가 있을 경우 근 궤적은 바뀌게 되며 최소 루프 이득 또한 바뀌게 된다. 먼저 $+30\%$ 의 주파수 오차를 갖는 경우($\omega_a = 1.2\omega_n$, dash-dot-line), $K_L = 30.8$ 을 갖는 페루프 시스템은 허수 축의 오른편에 페루프 폴을 갖게 되어 불안정한 시스템이 된다.

그러므로 최소 루프 이득은 56.44 로 증가되어야 하며, 루프 이득이 이 값보다 커야만 안정한 페루프 시스템을 얻을 수 있다. 반면 -30% 의 주파수 오차를 갖는 경우($\omega_a = 0.8\omega_n$, dotted-line), 최소 루프 이득은 15.04 로 감소 될 수 있다.

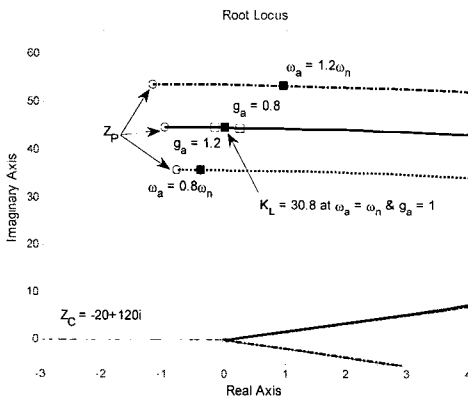


Fig. 7 Root-loci with $\pm 20\%$ frequency model errors and locations of closed-loop poles at $K_L = 5.834$ when $M_r = 4.0$ and $Z_C = -20 + 50i$

시스템 이득 오차가 존재하는 경우, 개루프 폴 (open-loop pole) P_p 와 제로 Z_p 의 위치는 변하지 않으므로 근궤적은 변화하지 않으나 식(15)에 나타나 있는 것처럼 루프 이득에 시스템 이득 오차 (gain error)가 포함되므로 직접적으로 영향을 미칠 수 있다.

$$K_L = g_a K_D / m_1 \quad (15)$$

위 식으로부터 양의 이득 오차는 루프 이득을 증가시키므로 페루프 시스템의 안정성을 훼손하지 않으나, 음의 이득 오차는 루프 이득을 감소시키

므로 페루프 시스템이 불안정하게 만든다. 이러한 경우 페루프 시스템의 안정성을 위해서는 이득 오차가 존재하지 않는 경우의 K_{Lmin} 에 $1/g_a$ 의 값을 곱하여 주어야 한다. 그러므로 -20% 의 이득 오차가 존재하는 경우 K_{Lmin} 은 36.95 로 증가되어야 한다.

3.2 성형 입력을 위한 ω_c 와 ω_{12} 의 근접 조건

앞에서 언급했던 것처럼 두 질량의 잔여 진동에 영향을 미치는 주파수는 ω_c 와 ω_{12} 이다. 주어진 두 질량 중 m_1 의 잔여 진동 주파수는 공진 주파수(resonant frequency) ω_r 이며, 식(16)과 같이 표현된다.

$$\omega_r = \omega_c \sqrt{1 - 2\zeta_c^2} \quad (16)$$

위 식에서 ζ_c 는 최소 감쇠를 갖는 페루프 폴 (the most lightly damped closed-loop pole) P_{CL} 의 감쇠비(damping ratio)이며, 그 값이 1 보다 상당히 작은 경우 ω_r 과 ω_c 는 거의 일치하게 된다. 다음으로 m_2 의 잔여 진동의 주파수는 전달 함수 G_{12} 의 공진 주파수 ω_{12r} 이나 고유 주파수 ω_{12} 와의 차이가 거의 없으므로 여기서는 동일시 한다. Shin 과 Meckl 은 두 질량의 잔여 진동에 영향을 주는 두 주파수 ω_c 와 ω_{12} 를 근접시키는 PID 제어기의 K_D 및 Z_C 의 조건을 제시하였다.⁹

임의의 루프 이득에서 페루프 폴 P_{C1} 과 P_{C2} 를 갖는 근궤적이 Fig. 8에 보여진다.

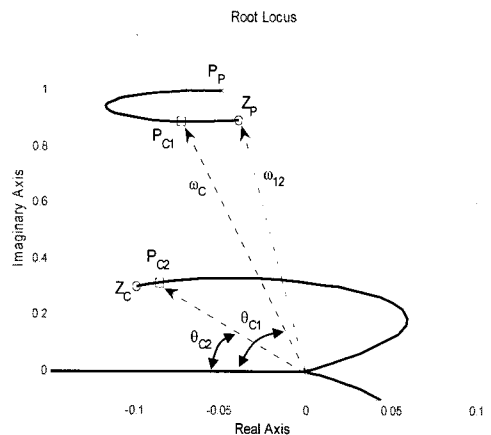


Fig. 8 Root-locus with closed-loop poles at a loop gain

원점과 페루프 폴을 연결한 선과 음의 실수 축 사이의 각은 각각의 페루프 폴의 감쇠비를 결정하며 그 관계는 식(17)와 같다.

$$\zeta_c = \cos\theta_c \quad (0 < \theta_c < 90) \quad (17)$$

그러므로 θ_c 가 클수록 감쇠비는 작아 지며 최대의 θ_c 를 갖는 페루프 폴이 최소 감쇠를 갖는 페루프 폴 P_{CL} 이 된다. 이 경우에는 P_{C1} 이 P_{CL} 이 되게 된다.

3.2.1 제어기의 제로 Z_C 의 위치 조건

두 주파수 ω_c 와 ω_{12} 가 근접하기 위한 제어기 폴 Z_C 의 위치에 관한 충분 조건(sufficient condition)은 무한대 루프 이득 $K_{L\infty}$ 에서 ω_c 를 결정하는 최소 페루프 감쇠를 갖는 폴 P_{CL} 이 플랜트 제로 Z_p 에 있어야 한다. 이는 Z_p 가 전달 함수 G_{12} 의 폴이며, ω_{12} 를 결정하기 때문이다. 즉 K_L 이 증가함에 따라 ω_c 가 ω_{12} 로 근접해 가야 한다. 이러한 조건을 만족하기 위해서는 Z_C 는 Fig. 9 에서 보여지는 영역 I 의 범위에 놓여 져야 한다. 이 경우에 K_L 이 적정치 이상이 되면 Z_C 의 위치에 관계 없이 ω_c 는 항상 ω_{12} 에 근접하게 된다. 만약 Z_C 가 영역 II 에 존재할 경우, 무한대 루프 이득에서 P_{CL} 은 Z_C 에 근접하기 때문에 ω_c 와 ω_{12} 의 근접은 K_L 및 Z_C 의 두 조건에 의해서 결정된다. 그러므로 ω_c 와 ω_{12} 의 근접을 위한 Z_C 의 복소 평면 상에서의 위치에 대한 충분 조건은 Z_C 가 I 영역에 위치해야 하는 것이다.

3.2.2 제어기의 미분기 이득 K_D 의 조건

제어기의 미분기 이득은 식(14)에 의해 K_L 로부터 계산 된다. 루프 이득 K_L 을 결정하기 위한 조건은 최소 감쇠비를 갖는 페루프 폴 P_{CL} 의 위치를 좌우하는 두 가지 조건에 의해 결정된다.

앞에서 언급되었던 성형 입력이 $\pm 7\%$ 의 주파수 오차를 보상할 수 있도록 설계되었기 때문에 ω_{12} 를 기준으로 ω_c 는 이 범위 내에 들어와야 한다. 루프 이득 K_L 의 선정은 이러한 조건에서 기인한다. 주파수 ω_{12} 는 플랜트 제로 Z_p 에 의해 결정되며, ω_c 는 최소 감쇠비를 갖는 페루프 폴 P_{CL} 에 의해 결정되기 때문에 위 조건의 수식적 표현은 식(18)과 같이 나타낼 수 있다.

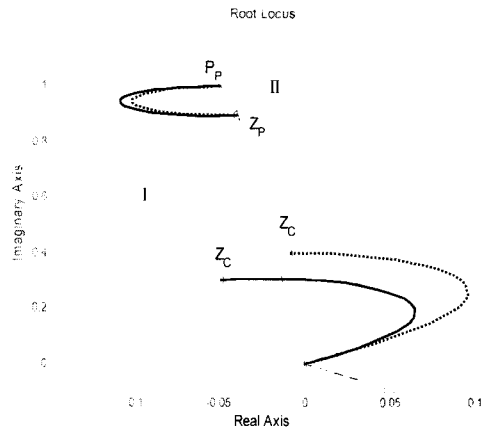


Fig. 9 Root-loci depending on the location of controller zero, Z_C .

이 식을 K_L 의 값에 의해 결정되는 P_{CL} 에 의해 정리하면 식(19)과 같이 나타내어 진다. 값이 그리고 이러한 식을 만족하는 영역이 Fig. 10 에 사분원(a quarter circle)의 두 점선으로 나타나 있다. 이러한 조건을 K_L 을 결정하기 위한 P_{CL} 의 크기 조건(magnitude condition)이라 한다.

$$\frac{|\omega_{12} - \omega_c|}{\omega_{12}} = \frac{\|Z_p - |P_{CL}|\|}{|Z_p|} < \frac{\gamma}{100} \quad (18)$$

$$\left(1 - \frac{\gamma}{100}\right) |Z_p| < |P_{CL}| < \left(1 + \frac{\gamma}{100}\right) |Z_p| \quad (19)$$

다른 조건은 P_{CL} 이 페루프 폴이므로 반드시 루프 전달 함수 G_l 의 근극적 위에 있어야 한다. 이러한 조건은 식(20)로 표현되며 P_{CL} 의 각도 조건(angle condition)이라 한다.

$$\angle G_l(P_{CL}) = \pm 180 (2k + 1), \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (20)$$

Fig. 10 은 임의의 한 근극적에 대해 식(19)와 식(20)의 두 조건을 만족하는 페루프 폴 궤적의 경계상의 세 점 P_{C1} , P_{C2} 그리고 P_{C3} 을 보여준다. 이 세 개의 페루프 폴중 최소 감쇠비를 갖는 P_{C1} 에 대응되는 루프 이득이 최소 루프 이득 K_{Lmin} 이 된다. 이러한 루프 이득에서 페루프 전달 함수는 P_{C1} 과 P'_{C1} 을 갖게 되며 P_{C1} 이 ω_c 를 결정하는 최

소 감쇠를 갖는 P_{CL} 이 됨을 알 수 있다.

최종적으로 파라미터 모델 오차가 존재하는 플랜트에 대해 페루프 시스템의 안정성을 보장하는 최소 루프 이득과 잔여 진동의 주파수인 ω_c 와 ω_{12} 를 근접하게 하는 최소 루프 이득 중에 더 큰 값이 최종적인 제어기의 미분 이득 K_D 를 결정하는 최소 루프 이득 K_{Lmin} 이 된다.

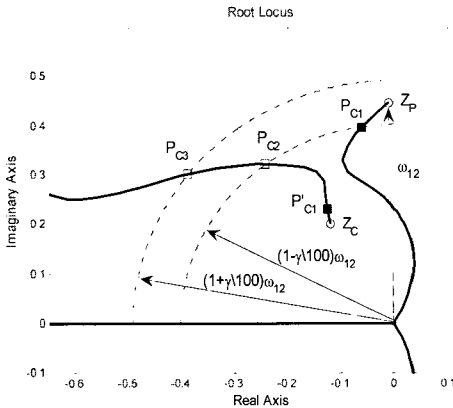


Fig. 10 Root-locus with the closed-loop poles satisfying both magnitude and angle conditions

4. 시뮬레이션

불확실한 파라미터 및 유연 모드를 갖는 시스템의 강건 제어 설계를 검증하기 위하여 Wie 와 Bernstein¹⁰ 이 제안한 벤치마크 문제가 다수의 제어 엔지니어에 의해 사용되었다. 이 연구에서도 이러한 보편화된 문제를 사용하여 앞에서 제안된 제어 기법의 성능을 검증하였다. 벤치마크 문제에서 주어진 시스템은 두 질량 m_1 과 m_2 그리고 이들을 연결하는 상수 k 를 갖는 스프링으로 구성되어 있다. 또한 m_1 의 위치인 x_1 을 감지하는 센서만이 존재하며, 제어 입력(control input) 또한 m_1 에 작용한다. 시스템 파라미터는 두 질량 $m_1 = m_2 = 1$ 이며, 댐퍼 $b = 0$, 그리고 스프링 상수 $k = 1$ 이며 10%의 모델 오차를 갖는다. 또한 최대 제어력 $F_{max} = 0.05$ 이며 두 질량의 이동 거리 $x_f = 10$ 이다. 이러한 시스템의 전달 함수 G_{p1} 및 G_{p2} 는 식(2)와 (3)에 의해 구해지며, 식(21)과 같이 나타내진다.

$$G_{p1}(s) = \frac{s^2 + 1}{s^4 + 2s^2}, \quad G_{p2}(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \quad (21)$$

피드백 제어기의 설계를 위하여 제어기 제로 Z_C 의 위치를 먼저 선정 한다. 3.2.1 절에서 언급되었던 Z_C 의 위치 조건에 적합하게 복소 평면 상에 한 점을 선택한다. 여기서는 (-0.4, 0.4)를 Z_C 로 선택하였다. 플랜트 및 피드백 제어기 전달 함수 G_{p1} 와 G_c 를 가지고 루프 전달 함수 G_l 을 구성하고, 그 근궤적 선도를 Fig. 11 에 나타내었다.

먼저 페루프 시스템의 안정성을 보장하기 위한 최소 루프 이득 K_{Lmin} 은 허수 축 상에 페루프 폴이 존재할 때인 0.988 이다. 그리고 스프링 상수 k 값의 10% 모델 오차를 고려할 때에는 1.021 로 증가 한다. 다음으로 ω_c 와 ω_{12} 를 $\pm 10\%$ 안으로 근접 시키기 위하여, Fig. 11 에서 보는 것과 같이 식(19)의 크기 및 식(20)의 각도 조건을 만족하는 세 개의 페루프 폴 P_{C1} , P_{C2} 및 P_{C3} 중 최소 감쇠비를 갖는 P_{C1} 을 선택하여 그 루프 이득 값인 4.70 을 근접 조건을 만족시키는 최소 이득으로 선정한다.

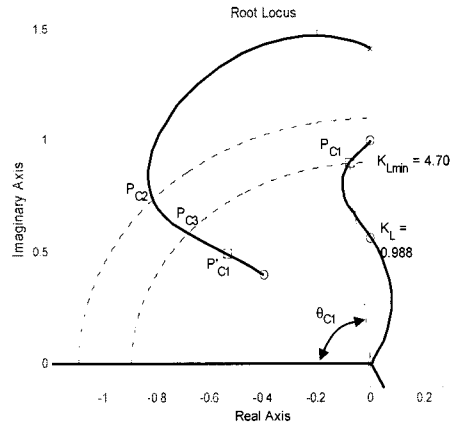


Fig. 11 Root-locus for benchmark problem

이 두 개의 값 중에 더 큰 값이 최종적인 K_{Lmin} 이 되며, $m_1 = 1$ 이므로 식(14)에 의해 제어기의 미분기 이득 K_D 는 4.70 으로 선택된다. 이 경우 P_{C1} 의 값은 $-0.0756 + 0.9016i$ 이며 θ_{c1} 은 85.2° 이고 페루프 회로의 고유 진동수 ω_c 와 공진 주파수 ω_r 은 각각 0.9048 과 0.8984 로 그 차는 0.7%로 미비하여 무시될 수 있다. 만약 그 차가 커서 무시하지 못 할 경우에는 루프 이득을 증가시켜 그 차를 줄이도록 한다. 결과적으로 설계된 피드백 제어기 G_c 가 식(22)에서 보여진다.

$$G_c(s) = \frac{4.70s^2 + 3.76s + 1.50}{s} \quad (22)$$

성형 입력 설계를 위한 명령 성형기 입력 파라미터로 $\omega_o = 1$, $x_f = 10$ 과 $\gamma = 10\%$ 를 사용한다. 그리고 F_{peak} 는 주어진 최대 제어력 F_{max} 를 사용하였다. 이러한 파라미터를 사용하여 생성된 성형 입력의 힘 프로파일(force profile)이 Fig. 13 에서 보여진다. 이 입력을 2 회 적분하여 시스템 전체 질량(m_1+m_2)으로 나눈 프로파일이 피드백 시스템의 기준 입력 r 로 사용된다. 앞에서 설계된 피드백 제어기를 이용하여 폐루프 시스템을 구성하고, 이러한 입력을 기준 입력으로 하는 시뮬레이션을 진행하여 출력 신호 x_1 과 x_2 를 얻었으며 기준 입력과 함께 Fig. 12 에 나타내었다. 이 출력은 시스템의 두 질량이 기준 입력을 얼마나 잘 추종하고 있는가를 보여 주는 두 질량의 실시간 위치 정보로 그림에서 보여 지는 것처럼 두 질량 모두 잔여 진동 없이 기준 입력을 잘 추종하고 있으며, 약간의 언더 슈트(under shoot)을 보이고 있으나 이동 거리의 0.1% 정도 수준으로 무시할 만한 양이다.

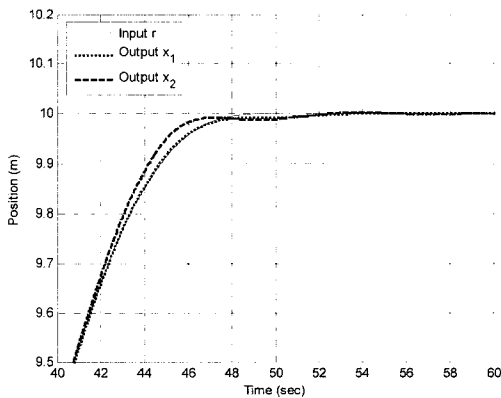


Fig. 12 Position response of closed-loop system to shaped input

Fig. 13 은 r 과 x_1 에 대응되는 제어 입력 신호들을 나타낸 것이며, 실제 제어 입력 u_{real} 이 기준 제어 입력 u_{target} 을 잘 추종함을 볼 수 있다. Fig. 14 는 제어 입력 신호들에 대응되는 주파수 스펙트럼(frequency spectrum)을 나타내며 공진 주파수 ω_o 를 중심으로 $\pm 10\%$ 의 주파수 대역에서 시스템을 가진할 수 있는 에너지가 상당히 제거되어 있음을 볼

수 있다. 이러한 특성은 결과적으로 두 질량 m_1 , m_2 의 잔여 진동을 최소화 할 수 있는 결과를 가져온다.

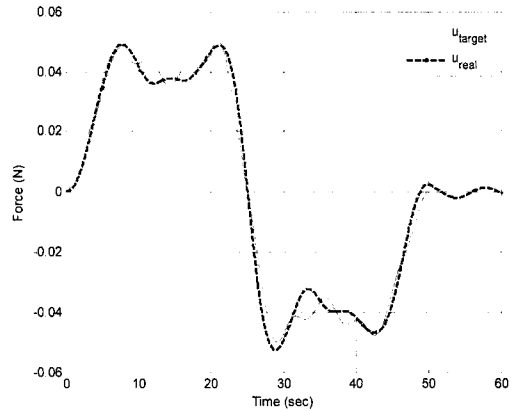


Fig. 13 Shaped force input and control input

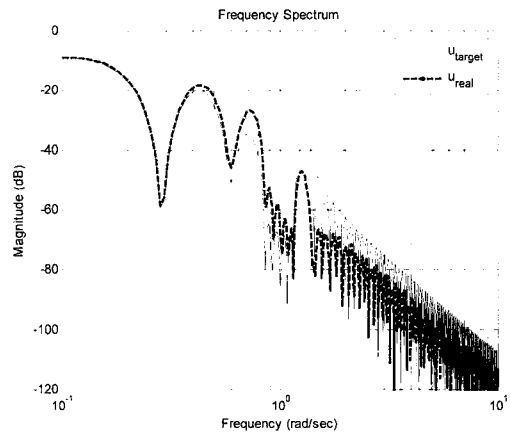


Fig. 14 Frequency spectrum corresponding on force profile

5. 결론

유연 모드 및 파라미터 모델 오차를 갖는 두 질량으로 구성된 시스템에 대한 시스템의 안정성 및 최소 잔여 진동을 보장하는 한 제어 전략이 소개되었다. 이러한 전략은 주어진 시스템의 강체(rigid body) 모델에 근거한 PID 제어기를 피드백 제어기로, 시스템 잔여 진동의 주파수를 포함하는 주파수 대역에서 가진 에너지를 추출하여 잔여 진동을 최소화하는 성형 입력을 기준 입력으로 사용

한다. 이 연구에서는 피드백 제어기로서 요구되는 다양한 역할을 충족시키면서도, 설계 면에 있어 근계적 선도를 이용하는 도식적인 방법을 사용하여 제어기의 미분기 이득과 제로를 구하는 단순한 intelligent PID 제어기의 설계 방법을 소개하였다. 이러한 제어기는 시스템 파라미터의 모델 오차가 존재하는 하에서도 시스템 안정성을 보장하며, 두 질량의 잔여 진동 주파수들을 근접하게 하여 한 주파수 대에서 가진 에너지를 추출한 성형 입력이 두 주파수를 모두 책임져 두 질량의 잔여 진동이 최소화 될 수 있도록 하게 한다. 이러한 제어 전략의 응용이 벤치마크 문제의 시뮬레이션을 통하여 검증되었다.

참고문헌

1. Yamada, I. and Nakagawa, M., "Reduction of residual vibration in positioning control mechanism," ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 107, No. 1, pp. 47-52, 1985.
2. Mita, T., "Optimal digital feedback control systems counting computation time of control laws," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 30, Issue 6, pp. 542-548, 1985.
3. Meckl, P. H. and Seering, W. P., "Reducing Residual Vibration in Systems with Uncertain Resonances," IEEE Cont. Syst. Mag., Vol. 8, No. 2, pp. 73-76, 1988.
4. Meckl, P. H. and Seering, W. P., "Experimental Evaluation of Shaped Inputs to Reduce Vibration for a Cartesian Robot," ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 112, No. 2, pp. 159-165, 1990.
5. Singhose, W., Singer, N. and Seering, W., "Preshaping command inputs to reduce system vibration," ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 112, Issue 1, pp. 76-82, 1990.
6. Shin, Y., "A Control Strategy for Systems with Single Flexible Mode to Reduce Residual Vibration," Journal of the Korean Society for Precision Engineering, Vol. 24, No. 11, pp. 91-100, 2007.
7. Meckl, P. H. and Seering, W. P., "Minimizing residual vibration for point-to-point motion," ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 107, No. 4, pp. 378-382, 1985.
8. Fujisaki, Y. and Ikeda, M., "A Two-Degree-of-Freedom Design of Optimal Servosystems for General Reference Signals," Proc., 32nd Conf. on Decision & Cont., Vol. 4, pp. 3808-3810, 1993.
9. Shin, Y. and Meckl, P. H., "Controller Design Procedure for Systems with Flexible Modes," ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 130, Issue 3, pp. 031002.1-031002.13, 2008.
10. Wie, B. and Bernstein, D. S., "A Benchmark problem for Robust Control Design," Proc. American Control Conference, 1990.