韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2008. 08. 제 47권, 제 3호, 291-310

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
August. 2008, Vol. 47, No. 3, 291-310

예비 초등 교사들의 분수 나눗셈에 대한 지식 분석

방 정 숙 (한국교원대학교)
Yeping Li (Texas A & M University)

I. 시작하는 말

"교육의 질은 교사의 질을 능가할 수 없다"는 말은 교사교육의 중요성을 단편적으로 드러낸 말이다. 최근 연구에서 학생들의 높은 수학 성취도를 설명하는 주요 요인 중의 하나가 유능한 교사임이 강조되면서(예, Kim, 2001; Leung & Park, 2002) 수학교육 연구에서 교사를 대상으로 하는 연구들이 늘어나고 있다.

이와 같은 연구들은 다시 연구 초점이나 목적에 따라서 여러 가지로 분류할 수 있으나, 가장 연구가 활발한 분야 중의 하나는 교사 지식에 관한 것이다. 이는 교사 지식이 가르치는 데 결정적인 영향을 미치는 중요한 요소이기 때문이며(방정숙, 2002; Ma, 1999), 교사교육 프로그램을 통해서 지식을 가르칠 수 있고 이를 통해 교사의 전문성을 향상시키는 데 구체적으로 기여할 수 있다는 생각을 바탕으로 하고 있다.

이런 측면에서 특히 예비교사를 중심으로 특정한 수학 개념에 대해서 교사가 가지고 있는 지식에 대한 연구가 진행되어 왔다. 초등수학 분야에서는 단연 분수와 관련된 연구가 많으며 특히 최근에는 분수의 나눗셈과 관련된 연구가 상대적으로 많이 진행되어 왔다. 분수 또는 분수의 연산은 초등학교 학생들에게뿐만 아니라 교사들에게도 흔히 개념적으로 이해하기 어려운 분야이고 결과적으로 가르치기 어려운 것으로 인식되어 왔다(Flores, 2002; Lamon, 2007; Ma, 1999). 최근의 연구를 살펴보면, 공통적으로 예비교사들은 분수 연산을 정확하게 수행(계산)하여 정답을 구하는 데는 성공적인 반면에, 그 연산이 의미하는 다양한 해석이나 표현 방법은 제대로 이해하지 못하고, 각 연산에 적합한 문장제를 만드는 것을 매우 어려워하는 것으로 드러났다(김민경, 2003; 김상룡, 2004; 박교식·송상헌·임재훈, 2004; 서관석·전경순, 2000; 이대현·서관석, 2003).

본 연구는 예비교사들의 지식에 관한 관심에서 출발하였으나, 선행연구와 다음 세 가지 측면에서 유의미한 차이가 있다. 첫째, 거의 모든 선행 연구의 주된 대상은 학부 2학년 또는 3학년을 대상으로 하고 있다. 즉, 초등 교사교육 프로그램 중 초등수학교육론이나 방법론을 거의 수강하지 않았거나 막 수강하기 시작한 상태(즉, 분수에 대해서는 전혀 배우지 않은 상태)에서 예비교사들의 지식을 조사하였다. 둘째, 대부분의 선행 연구가 교사 지식 중 내용 지식(subject matter knowledge) 자체에 초점을 두고 있다. 셋째, 대부분의 선행 연구가 하나의 특정 대학교를 중심으로 소수의 예비교사를 대상으로 특정한 문제(예를 들어, Ma(1999)의 연구를 바탕으로 $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$에 적합한 문장제 만들기)나 소수의 문제를 통해 분수 나눗셈에 관한 교사 지식을 조사하였다.

이에 반해, 본 연구에서는 첫째, 연구 대상을 4학년 2학기에 있는 예비교사로 하였다. 즉, 예비교사교육 프로그램 중 초등수학교육론과 방법론을 모두 수강한 학생들을 대상으로 하였다. 이는 선행연구처럼 저학년의 예비교사들을 대상으로 할 경우 각 대학의 교사교육 프로그램에 영향을 받지 않고, 있는 상태 그대로 자연스럽게 가지고 있는 분수에 대한 개념 또는 분수 나눗셈에 대한 의미를 잘 드러내 준다는 측면에서는 장점이 되지만, 예비교사들이 수학교육과 관련하여 공통적으로 배우는 과목을 모두 수강한 상태에서, 즉, 현장에 나가기 전 예비교사로서 어느 정도로 수학을 가르칠 준비가 되었는지에 대한 시사점을 찾기는 어렵기 때문이다.

* 2008년 2월 투고, 2008년 5월 심사 완료.
* ZDM분류 : B52
* MSC2000분류 : 97C70
* 주제어 : 교사 지식, 분수 나눗셈, 교과 내용 지식, 교수 내용 지식, 예비 초등 교사 교육

둘째, 교사 지식을 탐색함에 있어서 분수 나눗셈과 관련된 내용 지식뿐만 아니라 '어떻게 가르칠 것인가?'와 관련된 지식, 즉 교수 내용 지식(pedagogical content knowledge)을 대등한 정도로 조사하였다. 또한 교사 (내용) 지식을 보다 의미 있게 해석하기 위해서 예비교사들이 초등 수학과 교육과정 전반에 걸쳐서, 그리고 특히 분수 나눗셈과 관련하여 어느 정도로 이해하고 있다고 스스로 평가하는지를 알아보았다. 그리고 수학 교수·학습 전반에 걸쳐서 예비교사들이 가지고 있는 신념을 함께 조사해 봄으로써, 분수 나눗셈에 대한 교수 내용 지식을 면밀히 이해하는 데 기초 자료로 활용하였다.

셋째, 선행 연구에 비해서 연구 결과의 일반화를 고려하여 연구 대상을 세 개의 대학교에서 상대적으로 많은 예비교사를 선택하여 실시하였다. 또한 연구 문제 역시 분수의 나눗셈만을 초점으로 하여 집중적으로 살펴보되, 선행 연구에 비해 여러 가지 문제를 통해 예비교사들의 지식을 종합적으로 탐색해 보고자 하였다.

이와 같은 연구 배경을 바탕으로, 본 연구는 분수의 나눗셈을 중심으로 예비교사들이 스스로 평가하는 이해의 정도, 교수·학습 방법에 대한 신념, 교수 내용 지식을 체계적으로 살펴봄으로써, 예비교사가 초등 수학을 가르칠 준비가 얼마나 되어 있는지 탐색하고 이를 통해 교사교육 프로그램에 시사점을 제공하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 분수의 나눗셈의 여러 가지 모델

분수 나눗셈은 여러 가지 모델로 해석될 수 있다. Ma(1999)는 미국 교사와 중국 교사들이 제시한 $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$에 적합한 문장제 유형을 분석하면서 측정모델, 분할모델, 곱과 인수모델로 나눠서 제시하였다[1]. 한편, Sinicrope, Mick과 Kolb(2002)는 이를 보다 정교하게 나눠서 분할 모델을 '분할'과 '단위비율의 결정'으로 세분하고, 곱과 인수 모델을 '곱셈의 역'과 '카테시안 곱의 역'으로 세분하여 설명한다(박교식 외, 2004). 여기서는 위의 나눗셈식을 예로 들어 이 다섯 가지 세분된 유형에 대해서 간단하게 알아본다.

첫째, 측정 모델(measurement division)은 포함제로써 주어진 양과 같은 종류의 양으로 나누는 경우에 해당한다. 예를 들어, "$1\frac{3}{4}$m의 색 테이프에는 $\frac{1}{2}$m가 몇 번 포함되어 있는가?"와 같이 $1\frac{3}{4}$안에 포함된 $\frac{1}{2}$의 개수를 알아내거나 $1\frac{3}{4}$은 $\frac{1}{2}$의 몇 배인지 알아내는 것을 의미한다.

둘째, 분할 모델(partitive division)은 등분제로써 주어진 양을 그 양과는 다른 종류의 양으로 나누는 경우에 해당한다. 측정 모델은 자연수에서의 의미가 그대로 분수에서도 적용되는 반면에, 분할 모델의 경우는 약간의 변형을 필요로 한다(Siebert, 2002). 예를 들어, "어떤 색 테이프 전체의 길이의 $\frac{1}{2}$이 $1\frac{3}{4}$m라면, 전체 테이프 길이는 몇 m인가? "와 같이 어떤 수의 $\frac{1}{2}$이 $1\frac{3}{4}$이 되는 그 어떤 수를 알아내는 것을 의미한다[2].

셋째, 단위비율의 결정(determination of a unit rate)은 위의 분할 모델에서 나누는 수가 자연수인 경우에만 일상적인 의미에서의 "등분"과 잘 연관된다는 측면에서 구분한 것으로써(박교식 외, 2004), 몫을 구하는 대신에 비율을 구한다는 의미이다. 예를 들어, "$\frac{1}{2}$시간동안 $1\frac{3}{4}$km를 걷는다면, 1시간 동안에는 몇 km를 걸을 수 있는가?"와 같이 분수로 주어진 값을 1단위에 해당하는 값으로 변환하여 구하는 경우이다.

넷째, 곱셈의 역(division as the inverse of multiplication)은 뺄셈이 덧셈의 역연산인 것처럼 나눗셈은 곱셈의 역연산임을 이용하는 것을 의미한다. 예를 들어, "빨간색 테이프의 길이가 $1\frac{3}{4}$m이다. 이 테이프의

1) 우리나라에서는 흔히 나눗셈을 포함제와 등분제라는 용어를 사용하여 구별하는데, 외국에서는 이에 대응하는 개념으로 측정 모델과 분할 모델이라는 용어를 사용한다. 본 논문에서는 원어의 의미를 살리고자 외국 문헌 분석에서는 해당 용어를 사용한 반면에, 그 이외의 경우는 우리나라에서 주로 사용되는 용어를 사용하였다.

2) 자연수의 나눗셈에서처럼 나누는 수가 자연수라는 점에 초점을 두지 않고, 1인당 또는 1단위당 얼마씩 가져야 하는가에 주목함으로써 나눠지는 수의 얼마만큼이 나누는 수의 1단위와 관련되는지 찾는다는 점에서 등분제로 해석될 수 있다(Ma, 1999; Siebert, 2002).

길이는 파란색 테이프의 $\frac{1}{2}$배라고 한다. 파란색 테이프의 길이는 얼마인가?"의 계산과정에서 $\frac{1}{2}$로 나눈다는 것은 결국 2로 곱하는 것을 의미한다.

마지막으로, 카테시안 곱의 역(division as the inverse of a cartesian product)은 양과 양의 곱의 역 상황 또는 차원과 차원의 곱의 역 상황에 해당한다. 예를 들어, "넓이가 $1\frac{3}{4}\mathrm{m}^2$인 직사각형의 가로의 길이가 $\frac{1}{2}\mathrm{m}$일 때, 세로의 길이는 몇 m인가?" 또는 "$1\frac{3}{4}\mathrm{km}$의 거리를 가는 데 $\frac{1}{2}$시간이 걸렸을 때 속력을 구하라"(박교식 외, 2004, p. 246)의 경우가 이에 해당한다.

2. 분수 나눗셈 학습 과정에서의 오류 및 원인

교사가 가르치는 데 필요한 핵심적인 지식은 가르치는 내용과 방법을 망라한 교수 내용 지식이다. 교수 내용 지식에는 여러 가지 하위 요소가 포함되는데, 교사에게 특히 부족한 부분이 해당 주제에 대한 학생들의 수학적 이해·사고·학습에 대한 지식이다(방정숙, 2007). 분수는 비례 추론 발달의 주요한 기초가 되기 때문에, 학생들이 분수를 제대로 학습하기 위해서는 교사의 많은 노력이 필요하다(Clarke, Roche, & Mitchell, 2008). 분수의 학습과정에서 상당한 혼동은 분수의 여러 가지 다른 의미와 표현(모델), 자연수 연산 과정의 지나친 일반화 등에서 비롯된다(Streefland, 1991). 한편, Tirosh(2000)는 학생들이 분수 나눗셈과 관련하여 경험하는 전형적인 오류를 다음과 같이 세 가지 종류로 체계적으로 구분한다.

첫째, 알고리듬에 기초한 오류로써 학생들이 흔히 분수 나눗셈의 표준 알고리듬, 즉, 제수의 역수를 취해 곱한다는 것을 암기하는 과정에서 나타나는 오류이다. 예를 들어, 제수의 역수 대신 피제수의 역수를 취하는 경우나 제수와 피제수 모두의 역수를 취해 계산하는 경우가 이에 해당된다.

둘째, 직관에 기초한 오류로써, 학생들이 흔히 자연수의 나눗셈에 대해서 가지고 있는 직관으로부터 비롯된 오류이다. 예를 들어, 자연수의 나눗셈의 경우를 분수의 경우에 과도하게 일반화하고 나눗셈의 일차적인 의미, 즉 분할 모델(등분제)로만 해석함으로써, 제수는 반드시 자연수여야 한다거나, 제수는 반드시 피제수보다 작아야 한다거나, 몫은 제수보다 작아야 한다고 생각하는 경우가 이에 해당된다.

셋째, 형식적 지식에 근거한 오류로써, 학생들이 분수의 개념에 대해 이해가 제한되어 있고 연산의 성질과 관련하여 적절하지 못한 지식을 가지고 있어서 잘못 수행하는 오류이다. 예를 들어 나눗셈에서 교환법칙이 성립한다고 생각하는 경우가 이에 해당한다. 이와 같은 오류의 원인은 다양하여 알고리듬에서 일종의 버그(bug)가 생긴 것일 수도 있고(예를 들어, 피제수의 역수를 취하는 것), 연산에 대한 직관적 신념(예를 들어, 피제수는 제수보다 커야 하므로, 단순히 피제수와 제수의 순서를 바꾸는 것)에서 비롯될 수도 있다.

예비교사들은 주로 학생들이 겪는 오류를 알고리듬에 기초한 오류로만 제한하여 해석하는 경향이 있다. 하지만, 분수에 대한 내용 지식과 교수 내용 지식을 중점적으로 다룬 교사교육 프로그램에 참여함으로써 학생들의 오류가 형식적 지식이나 직관에 근거할 수 있음을 깨닫고 학생들의 대안적인 개념을 예측하고 이해함으로써 적절히 대처할 수 있다(Tirosh, 2000). 해당 학습 주제를 가르칠 때, 학생들이 어디서 어떠한 인지적 장애를 경험하는지, 어떤 오개념을 가지고 있는지를 교사가 미리 안다면 가르치는 데 상당한 도움이 될 것이다.

3. 예비교사들의 분수 나눗셈에 대한 지식

예비 초등 교사들의 분수 나눗셈과 관련된 지식에 대한 연구는 예비교사들이 분수와 관련한 내용을 배우기 이전, 주로 내용 지식에 중점을 두고 연구되어 왔다[3]. 대개 Ma(1999)의 연구를 토대로, $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$에 적합한 문장제를 만들어보도록 하는 형태로 조사하였다. 최근의 연구를 중심으로 연구결과를 살펴보면 다음과 같다. 우선, 김상룡(2004)은 초등학교, 4, 5, 6학년 문장제를 중심으로 예비교사 2학년과 편입생 4학년 학생들의 전반적인

3) 연구자에 따라서는 예비교사 4학년을 포함한 경우가 있으나, 대상의 특성(예를 들어, 편입생)이나 검사 시기의 특성상(예를 들어, 학기 초) 분수의 개념이나 분수 나눗셈에 대한 의미를 정식으로 학습하지 않은 상태에서 조사했다는 점에서 공통적이다.

초등수학 내용 지식에 관한 연구를 수행하였는데, 이 중 $1\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}$을 나타내는 문장제를 만들어 제시하고 계산해 보도록 하였다. 연구결과 10.6%의 정답율을 보여 전체 20문항 중 가장 낮은 성취율을 보였으며, 계산은 주로 알고리듬을 이용하여 역수를 취하여 곱하는 것으로 수행하였다.

한편, 박교식 외(2004)는 예비교사 3학년을 대상으로 $1\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}$에 적합한 문장제를 최대 10개까지 만들고 이 때 나타나는 오류 유형과 만든 문장제 유형을 분석하였는데, 71명 중 문장제를 하나라도 적어낸 학생이 48명이었고, 이들이 만들어 낸 150개의 답안 중 32명(약 67%)이 제시한 88개가 오류를 포함(약 59%)한 것으로 드러났다. 실제로는 이 중 48개(32%)만이 분수 나눗셈의 오류 유형으로 분류될 수 있었는데, 대표적인 오류유형을 살펴보면, 1/2로 나누기를 2로 나누기(15명)와 계산결과만 생각하여 $1\frac{3}{4}\times 2$에 적합한 문장제를 만든 경우(7명)가 있었다. 또한 올바른 문장제의 경우 약 90%가 포함제였는데, 사람, 병, 봉지의 수 등 이산량을 소재로 사용한 것이 대부분이었다. 즉, 개념적으로는 옳게 만든 문제라도 대부분은 실제 문제 상황의 해(자연수)와 계산 결과(분수)가 일치하지 않는 문제점을 지닌 포함제 상황의 문제를 만든 것이다. 이에 대해 연구자들은 몫이 자연수가 아닌 분수 나눗셈 상황에서 단위비율의 결정, 곱셈의 역, 카테시안 곱의 역 상황이라는 의미에 대한 예비교사들의 이해가 매우 부족하다는 것을 강조하였다.

이대현과 서관석(2003)은 예비교사 4학년 학생들의 분수에 대한 표상을 분석하면서 그 중 $1\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}$의 풀이과정과 답을 제시하고 이 문제의 의미를 정확히 나타낼 수 있는 문장제를 기술하게 하였는데, 39명 중 16명(41%)만이 문제 상황에 맞는 문장제를 만들었고, 구체적으로 포함제로 11명, 곱과 인수 모델로 5명이 만들었다. 또한 김민경(2003)의 경우, 예비교사 3, 4학년을 대상으로 나눗셈 개념에 대한 이해도를 분석하였는데, 그 중 3/5을 1/5로 나누는 문장제를 만들고 분수 나눗셈을 처음 학습한 아동의 입장에서 풀이과정을 서술하게 했을 때, 97명(54.5%)의 예비교사들만이 성공적으로 문장제를 만들 수 있었다.

한편, 분수 나눗셈을 초등학교 학생들에게 어떻게 가르칠 것인가를 다룬 연구는 상대적으로 적다. 우선 김상룡(2004)의 연구에서, "$1\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}$의 계산과정을 어떻게 지도하겠는가?" 라는 물음에 대해 예비교사들은 대부분 답만 구하는 데 그치고 부적절한 구체적 활동을 제시하거나 잘못된 그림의 이해로 혼란만을 야기시키는 경우가 많다고 분석하였다. 또한 서관석과 전경순(2000)의 연구에서는 예비교사 3학년, 63명을 대상으로 하였는데, $\frac{3}{5}\div\frac{2}{7}$의 분수 연산을 어떻게 가르칠 것인가에 대해 정답을 구할 수는 있었으나 대부분의 예비교사들이 과정에 대한 명확한 이해 없이 제수의 역수로 계산하는 표준 알고리듬만으로 정답을 이끌어내는 데 그치고 있었다. 예외적으로 개념적인 설명을 시도한 학생들도 결과적으로는 표준 알고리듬으로 결론지어 설명을 마치는 경향이 짙었고, 대수적 풀이 방법을 사용한 경우도(예를 들어, 분모를 통분한 후 분자간의 나눗셈으로 설명하거나 번분수 계산을 이용하여 분모를 1로 만들어 계산하는 경우), 왜 분자와 분모에 제수의 역수를 곱하게 되는지에 대한 과정의 이해는 동반하지 못했다.

나눗셈 및 분수 나눗셈에 대한 교사 지식과 어려움에 관한 선행 연구를 검토하면서 Li와 Smith(2007)는 다음 5가지 종류의 어려움을 지적하였다. 즉, 분수 나눗셈에 대한 계산 절차를 여러 가지 표현 방법으로 설명하는 방법, 왜 "역수를 취한 다음 곱하는지"를 설명하는 방법, 분수 나눗셈과 다른 수학 지식(예, 분수 개념, 분수의 덧셈/뺄셈/곱셈/나눗셈)간의 수학적 관계, 관련된 오개념(예, 작은 수를 큰 수로 나눌 수 없다, 나눗셈은 항상 수를 작게 만든다), 분수 나눗셈을 포함하는 문제를 해결하는 것이다. 한편, Flores(2002)는 관점을 달리하여 Ma(1999)의 연구를 토대로 연결성, 다중 관점, 기본 아이디어, 종적 일관성 측면에서 분수 나눗셈과 관련하여 깊이 있는 이해를 한 교사의 특징을 상세히 기술하기도 하였다.

이와 같은 일련의 연구 결과를 종합해 볼 때, 분수 나눗셈은 예비교사들에게도 개념적으로 이해하기 어려운 주제이고, 특히 이를 초등학교 학생의 수준에 맞춰 의미있는 방법으로 지도하기는 더욱 어려운 주제임을 알 수 있다. 또한 상대적으로 공통된 연구의 제한점을 고려해

볼 때, 예비교사 4학년 학생들의 분수 나눗셈에 대한 지식, 특히 교수 내용 지식에 대한 보다 심도 있는 연구가 필요함을 알 수 있다.

III. 연구방법 및 절차

1. 연구대상

본 연구에 참여한 예비교사들은 초등교사교육 프로그램을 제공하는 3개의 대학교(2개의 교육대학교와 1개의 종합교원양성대학교)에 재학 중인 4학년 학생들로 전체 291명이고 이 중 초등수학교육 심화과정[4] 중에 있는 학생은 82명이다[5]. 각 대학교의 강의 일정 및 형편에 따라 본 연구에 응할 수 있는 집단을 편의로 사용하였으나, 각 대학의 4학년 전체 학생들의 분포와 견주어볼 때 우리나라 예비 초등교사라는 대표성에 큰 무리가 없을 것으로 판단된다.

2. 자료 수집 및 분석

자료는 설문지를 통해 수집되었는데, 이 설문지는 아시아권 국가들의 예비 초등 교사들의 전반적인 수학적 준비도를 알아보기 위한 국제공동연구의 일환으로 개발되었다(Li, Ma, & Pang, 2008). 설문지는 크게 두 부분으로 구성되어 있다. 첫 번째 부분은 예비교사들의 초등학교 수학과 교육과정, 특히 분수와 관련된 교육과정의 이해 및 준비 정도를 스스로 평가하고 초등수학 교수·학습에 관한 신념을 알아보도록 구성하였다. 두 번째 부분은 분수 나눗셈과 관련하여 예비교사들의 일반적인 내용 지식과 교수내용지식을 집중적으로 알아보도록 구성하였다. 설문지는 전체 10개 항목으로 구성되었는데, 각 항목의 필요에 따라 최대 9개까지 하위 질문을 포함하도록 하였다.

4) 본 연구에 참여한 대학교에 따라 초등수학심화, 초등수학교육과, 수학교육과로 달리 불리지만, 모두 초등교원을 양성한다는 측면에서 초등수학교육 심화과정으로 적었다.

5) 연구 초반에 초등수학교육 심화과정 학생들과 타 심화과정 학생들을 구별하여 분석하였으나 학생 집단 간 반응에서 의미 있는 차이는 나타나지 않아서 전체 학생을 대상으로 하여 분석하였다.

연구의 목적상 조사 시기를 9월로 하여 모든 예비교사들이 초등수학교육과 관련하여 필수로 수강해야 하는 과목(예를 들어, 초등수학교육론과 초등수학교육방법론)을 모두 학습한 상태에서 자료를 수집하였다. 자료 분석은 설문지 개발과 대응되게 크게 두 부분으로 실시되었다. 우선 설문지 전반부에 대한 예비교사들의 답변을 바탕으로 교육과정에 대한 이해와 준비성, 수학 및 수학 교수법에 대한 신념 측면으로 나눠서 예비교사의 전반적인 준비성과 신념을 알아보았다. 다음으로, 설문지 후반부에 대한 예비교사들의 반응을 중심으로 계산능력과 연산감각 측면에서 분수 나눗셈에 대한 내용 지식을 분석하였고, (분수)÷(자연수)와 (분수)÷(분수)의 비교, 분수의 나눗셈 알고리듬에 대한 설명, 분수 연산간의 관계 및 대안적 알고리듬 측면으로 나눠서 분수 나눗셈에 대한 교수 내용 지식을 심층적으로 살펴보았다.

IV. 연구결과

1. 예비교사의 초등수학에 대한 준비성과 신념

가. 교육과정에 대한 이해와 준비성

본 연구에 참여한 예비교사들에게 수학과 교육과정에 대해 얼마나 알고 있는지 물어본 결과 '많이 알고 있다'에 2.4%(7명), '익숙하다' 에 17.9%(52명), '제한적으로 알고 있다'에 65.6%(191명), '별로 모른다'에 13.7%(40명)가 응답하였다[6]. 예비교사들의 교육과정에 대한 이해를 보다 자세히 알아보기 위해 분수와 관련된 내용을 초등학교에서 다루는 시기를 가장 잘 기술하는 답변을 선택하도록 하였는데, 대표적인 문항 분석 결과는 <표 1>과 같다.

<표 1>에 제시된 바와 같이 70%이상의 예비교사들이 분수의 덧셈과 뺄셈 및 동치분수를 포함한 분수와 분수의 크기 비교에 대해서 대부분 5학년 이전에 가르친다는 사실을 알고 있었다. 특히, 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈은 현행 교육과정에서 '5-가'단계에서 다루어진다는 것을 고려하면, 이에 대한 정답율은 더 높은 것으로 판단할 수도 있다. 이와 대조적으로, 약 60%의 예비

6) 본 논문에서 문항별로 소수의 무응답이 있는 경우와 반올림으로 인하여 합계가 291명 또는 100%가 안 되는 경우가 있다.

<표 1> 초등학교에서 분수 관련 내용을 다루는 시기에 대한 반응

내용 \ 반응*	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
분수의 덧셈과 뺄셈	**229 (78.7%)****	52 (17.9%)	3 (1%)	0	6 (2.1%)
동치분수를 포함한 분수, 분수의 크기 비교	**209 (71.8%)**	65 (22.3%)	5 (1.7%)	1 (0.3%)	9 (3.1%)
분수의 곱셈과 나눗셈	97 (33.3%)	**175 (60.1%)**	8 (2.7%)	2 (0.7%)	6 (2.1%)
분수와 소수를 말(word), 수(number), 또는 모델(model)을 활용하여 표현하기	**185 (63.6%)**	51 (17.5%)	11 (3.8%)	8 (2.7%)	32 (11%)

* (a) 대부분 5학년 이전에 가르친다. (b) 대부분 5~6학년 동안 가르친다.
(c) 가르치지 않거나 5~6학년 동안 간단하게 소개되는 정도이다.
(d) 수학과 교육과정에 포함되어 있지 않다. (e) 확실히 모르겠다.
** 표에서 진하게 표시된 부분이 정답임

교사들만이 분수의 곱셈과 나눗셈을 5~6학년 동안 가르친다는 사실을 알고 있었다. 초등학교 교육과정에서 분수의 곱셈은 '5-가'단계에서 처음 도입되고, 5~6학년 수와 연산 영역의 대부분이 분수와 소수의 곱셈과 나눗셈을 다룸에도 불구하고, 30%이상의 예비교사들이 5학년 이전에 가르치는 것으로 잘못 이해하고 있다는 점은 주목해볼만하다. 또한 "분수와 소수를 말, 수, 또는 모델을 활용하여 표현하기"와 관련하여 약 64%의 예비교사들이 5학년 이전에 가르친다고 답한 반면, '확실히 모르겠다'로 답한 비율이 다른 문항에 비해 예외적으로 11%로 높았다.

한편, 예비교사들에게 대학의 교사교육 프로그램을 통해 수학 내용 및 교수법을 배운 것을 토대로 초등수학 내용을 가르칠 준비가 얼마나 되어 있다고 생각하는지 물어본 결과 <표 2>에 제시한 바와 같이 85%이상의 예비교사들이 준비되어 있다고 스스로 평가하였다. 이와 같은 예비교사들의 자기 평가 정도를 분수와 관련된 학습 주제로 질문한 결과 '분수' 자체에 대해서는 거의 90%가까운 예비교사들이 준비되어 있다고 반응함으로써 전반적인 초등 수학 내용 보다 분수 자체에 대해서 더 잘 가르칠 준비가 되어 있다고 생각하는 것으로 드러났다. 하지만, 이와 대조적으로 말, 수, 또는 모델로 소수와 분수를 나타내거나 분수 계산을 나타내고 설명하는 것에 대해서는 약 77%의 예비교사들만이 준비되어 있다고 판단하였다. 비슷한 맥락에서 "매우 잘 준비되어 있다"는 선택지를 택한 비율을 비교해 보아도 분수보다 말, 수, 모델을 사용하는 것에 대해서 덜 준비된 것으로 판단하고 있었다.

한편, 약 10%의 예비교사들이 분수를 가르칠 준비가 되어 있지 않다고 답한 반면에, 20%이상의 예비교사들

<표 2> 초등 수학 내용을 가르칠 준비성에 대한 예비교사들의 자가 판단

내용 \ 반응	(a) 매우 잘 준비되어 있다.	(b)그런대로 준비되어 있다	(c)준비되어 있지 않다.
전반적인 초등 수학 내용	16 (5.5%)	232 (79.7%)	42 (14.4%)
분수	24 (8.2%)	236 (81.1%)	30 (10.3%)
말(word), 수(number), 또는 모델(model)로 분수와 소수를 나타내기	20 (6.9%)	206 (70.8%)	64 (22.0%)
말, 수 모델을 사용하여 분수 계산을 나타내고 설명하기	18 (6.2%)	204 (70.1%)	68 (23.4%)

이 분수 및 계산과 관련하여 말, 수, 모델을 사용하는 것에 대해서 준비되어 있지 않다고 응답하였다. 이는 <표 1>에서 30%의 이상의 예비교사들이 말, 수, 모델을 활용하여 분수를 표현하는 것을 언제 가르치는지 모르는 것과 잘 연결된다.

나. 수학 및 수학 교수법에 대한 신념

예비교사들의 수학 및 수학 교수법에 관한 신념을 조사한 결과는 <표 3>과 <표 4>에 제시되어 있다. 우선 <표 3>을 보면, 대부분의 예비교사들이 수학문제를 해결하는 데 여러 가지 다양한 방법이 있다는 것과 수학 문제 해결 과정에서 종종 가설을 세우기, 어림하기, 검증하기, 발견한 결과를 수정하기 등을 포함한다는 것에 동의하였다. 특히, 전자의 경우에는 약 58%, 후자의 경우에는 약 38%의 예비교사들이 상당히 동의하는 것으로 드러났다. 반면에, 수학 학습은 암기하는 것이라는 생각과 수학이 모든 가능성을 망라하는 알고리듬으로 학습되어야 한다고 생각하는 것에 각각 약 79%, 64%의 예비교사들이 반대한다고 하였다. 20%의 예비교사들이 여전히 수학 학습은 암기하는 것이라고 생각하고 있다는 결과와 약 34%의 예비교사들이 모든 경우를 망라하는 법칙으로 수학을 알고 있는 것은 주목해 볼 필요가 있다. 특히, 암기를 통해 수학을 학습해야 한다고 생각하는 교사는 실제로 학생들에게 수학을 가르칠 때 암기를 강조할 가능성이 높기 때문이다.

한편, <표 4>에 제시된 바와 같이 거의 모든 예비교사들이(97%) 수학을 가르칠 때 한 가지 이상의 표현 방법을 사용해야 한다는 것에 동의한 반면, 구체물을 사용함으로써 학생들이 추상적인 수학을 피하도록 도와줄 수 있다는 생각에 대해서는 20%이상의 예비교사들이 반대한다고 하였다. 또한 거의 모든 예비교사들이 수학을 가르칠 때 학생들이 공통적으로 범하는 오개념이나 어려움을 알 필요가 있다는 생각에 동의한 반면(신념에 관한 전체 하위 문항 중 가장 높은 동의율을 보임), 학생들이 수학을 배울 때 오류를 범하지 않도록 막아줘야 한다는 생각에 대해서 절반의 예비교사들은 동의하고 절반의 예

<표 3> 예비교사들의 수학에 관한 신념

내용	(a)상당히 동의한다	(b) 동의한다	(c) 반대한다	(d)상당히 반대한다
학생들은 수학이 모든 가능성을 망라하는 알고리듬 또는 법칙이라고 배워야 한다.	16 (5.5%)	84 (28.9%)	162 (55.7%)	24 (8.2%)
수학 문제를 해결한다는 것은 종종 가설을 세우기, 어림하기, 검증하기, 발견한 결과를 수정하기 등을 포함하는 것이다.	111 (38.1%)	162 (55.7%)	10 (3.4%)	3 (1.0%)
수학 학습은 주로 암기하는 것이다.	15 (5.2%)	43 (14.8%)	140 (48.1%)	89 (30.6%)
대부분의 수학 문제를 해결하는 데는 여러 가지 다양한 방법이 있다.	168 (57.7%)	112 (38.5%)	5 (1.7%)	2 (0.7%)

<표 4> 예비교사들의 수학 교수법에 관한 신념

내용	(a)상당히 동의한다	(b) 동의한다	(c) 반대한다	(d)상당히 반대한다
수학을 가르칠 때 한 가지 이상의 표현(그림, 구체물, 기호 등)을 사용해야 한다.	196 (67.4%)	87 (29.9%)	3 (1%)	0
구체적 조작물을 사용함으로써 학생들이 추상적인 수학을 피하도록 도와줄 수 있다.	108 (37.1%)	119 (40.9%)	54 (18.6%)	5 (1.7%)
교사는 수학을 가르칠 때 학생들이 공통적으로 범하는 오개념이나 어려움을 알 필요가 있다.	244 (83.8%)	40 (13.7%)	2 (0.7%)	1 (0.3%)
교사는 학생들이 수학을 배울 때 오류를 범하지 않도록 막아줘야 한다.	43 (14.8%)	104 (35.7%)	127 (43.6%)	10 (3.4%)

비교사들은 반대하였다. 이는 교사가 학생들이 흔히 범하는 오개념이나 어려움을 왜 알아야 하는지에 대한 생각이 다르기 때문일 것이다. 약 절반의 예비교사들은 교사가 학생들의 오개념을 미리 알아 그런 오개념을 범하지 않도록 막아줘야 한다고 생각한 반면에, 다른 절반의 예비교사들은 그런 오개념이나 어려움이 학습의 자연스런 과정이기에 교사가 특별히 오류를 막을 필요가 없다고 생각하는 것으로 유추할 수 있다.

2. 분수 나눗셈에 대한 내용 지식

가. 계산 능력

예비교사들은 전반적으로 분수의 나눗셈과 관련된 계산 문제에서 높은 정답율을 보였다. 예를 들어, $5\frac{1}{4}\div3\frac{1}{2}$의 값을 구하는 단순한 문제에서 약 97%(281명)의 정답율을 보였을 뿐만 아니라, 문장제 문제[7]에서도 93%(270명)의 높은 정답율을 보였다. 이는 비슷한 문제에 대해서 미국이나 중국 예비교사들의 정답율(각각, 39%, 75%)과 비교[8]해 볼 때(Li & Smith, 2007; Ma & Dongchen, personal communication) 상당히 높은 결과라고 볼 수 있다.

한편, "$\frac{14}{15}\div\frac{?}{9}=\frac{3}{10}$에서 ?은 얼마입니까?"에 대해서 약 14%(41명)의 예비교사들이 오답을 제시했다. 이를 보다 구체적으로 살펴보면, 7%(20명)의 예비교사들이 계산하는 과정에서 수를 잘못 적었고, 3%(10명)의 예비교사들은 곱셈과 나눗셈의 혼동으로 역수를 취하지 않고 계산하는 실수를 범했다. 오답자의 절반 가량이 단순히 수를 잘못 적는 실수를 하긴 했지만, 예비교사교육의 마지막 학기에 14%의 학생들이 정확한 계산을 수행하지 못했다는 것은 단순 실수로 간과하기가 어렵다.

또한, "$\frac{1}{3}$안에 $\frac{1}{2}$이 몇 번 들어갑니까?"에 대해서 15%(44명)의 예비교사들이 오답을 제시했다. 다른 계산 문제의 무응답율은 채 1%가 되지 않는 것에 비해 이 문제에 대해서는 예외적으로 6%(16명)에 이르렀다. 오답의 전형적인 예는 "0"으로 이유를 설명하지 않은 예비교사가 17명, "1/2은 1/3보다 크기 때문에"라고 응답한 예비교사는 13명, 주어진 문제에 대해서 2/3라고 정확하게 계산을 수행했음에도 불구하고 자연수가 아니기 때문에 0이라고 답한 예비교사가 10명 있었다. 사실, 이 문항은 "$\frac{1}{3}\div\frac{1}{2}$"를 말로 제시한 것이고, 실제 6학년 교과서에서 이와 같은 형태의 분수 나눗셈을 제시할 때 포함제의 의미로 도입한다는 점을 고려해 볼 때, 예비교사들이 분수의 나눗셈에 대한 기본적인 의미만 생각했다면 전혀 어렵지 않은 문제일 것이다. 하지만, 상대적으로 높은 무응답율이나 "0"이라고 답한 비율이 높음을 고려해 볼 때, 예비교사들이 가지고 있는 분수의 나눗셈에 대한 개념적 이해는 상당히 제한되어 있다고 유추해 볼 수 있다. 특히, 위의 피자 문제처럼 분수 나눗셈과 관련된 여러 단계의 계산을 수행하는 문장제 문제에서의 높은 계산 능력과 비교해 볼 때, 분수 나눗셈의 개념 이해 정도가 상당히 낮음을 단편적으로 반영하고 있다.

나. 연산 감각

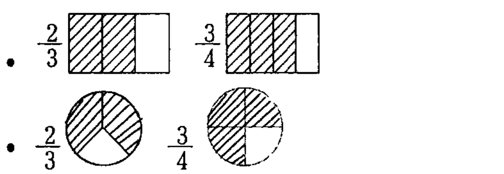
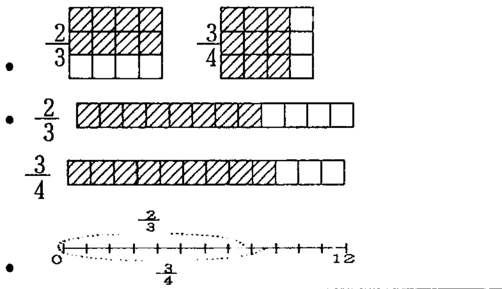
분수 나눗셈에 대한 예비교사들의 전반적인 연산 감각은 높게 나타났고 주어진 연산을 여러 가지 방법으로 설명할 수 있었다. 예를 들어, "직접 계산하지 말고 $\frac{9}{11}\div\frac{2}{3}$가 $\frac{9}{11}\div\frac{3}{4}$보다 큰지 작은지 말하시오. 어떻게 생각했는지 설명하시오."에 대해서 약 95%(276명)의 예비교사들이 연산의 결과를 정확하게 비교할 수 있었고 대부분 자신들의 사고 과정을 타당하게 설명할 수 있었다. <표 5>에 제시된 바와 같이, 분수의 나눗셈에서 '나누는 수가 작을수록 나눗셈의 결과는 더 커진다'는 사실을 여러 가지 방법으로 설명했는데, 2/3가 3/4보다 작다는 사실을 말로 설명한 경우가 68%(198명), 그림으로 설명한 경우가 5.2%(15명)였다. 또한 동치분수를 이용하여 8/12이 9/12보다 작다는 사실을 말로 설명한 경우가

---

7) 경민이네 피자 가게는 여러 가지 맛의 큰 사이즈 피자를 판매합니다. 어느 날, 24개의 페파로니 피자를 팔았습니다. 그 날 팔린 치즈 피자의 수는 (그 날 팔린) 페파로니 피자 수의 $\frac{3}{4}$이고, 디럭스 피자 수의 $\frac{2}{3}$입니다. 경민이네 피자 가게에서 (그 날 판매한) 디럭스 피자는 몇 개입니까?

8) 미국 자료의 경우 연구 대상의 대표성이나 빈도 측면에서 볼 때 엄밀한 의미에서 직접적인 비교는 할 수 없으나 대략적인 상대 비교는 가능할 것으로 판단된다.

<표 5> 직접 계산하지 않고 $\frac{9}{11} \div \frac{2}{3}$와 $\frac{9}{11} \div \frac{3}{4}$의 크기를 비교하는 방법

답	유형 (예)			합계(%)	
정답 (제수가 작은 수면 나눗셈의 결과는 더 큰 수가 된다)	$\frac{2}{3}$가 $\frac{3}{4}$보다 작다	[말] • $\frac{2}{3}$가 $\frac{3}{4}$보다 작다	184 (63.2%)	198 (68%)	276 (94.8%)
		• 전체를 1로 보았을 때, 셋으로 나눈 것 중 두 개가 넷으로 나눈 것 중 세 개 보다 작다	8 (2.7%)		
		• $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$은 1과의 관계에서 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$만큼 작은 수이므로 $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$	6 (2.1%)		
		[그림] 	9 (3.1%) 6 (2.1%)	15 (5.2%)	
	$\frac{2}{3}$ $(\frac{8}{12})$가 $\frac{3}{4}$ $(\frac{9}{12})$ 보다 작다	[말] • $\frac{2}{3}$ $(\frac{8}{12})$가 $\frac{3}{4}$ $(\frac{9}{12})$보다 작다	25 (8.6%)	33 (11.3%)	
		[그림] 	8 (2.7%)		
	간단한 자연수의 예를 들어 설명 (5÷3, 5÷4)			14(4.8%)	
	직접 계산 $\frac{9}{11} \div \frac{2}{3} = \frac{9}{11} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{22}$, $\frac{9}{11} \div \frac{3}{4} = \frac{9}{11} \times \frac{4}{3} = \frac{12}{11} = \frac{24}{22}$			4(1.4%)	
	÷를 ×로 변환하면 $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$를 곱하는 것과 같다			4(1.4%)	
	나누어지는 수가 1보다 작을 때 나누는 수가 클수록 몫은 작아진다			4(1.4%)	
	기타			4(1.4%)	
오답	$\frac{2}{3}$가 $\frac{3}{4}$보다 작아서 $\frac{9}{11} \div \frac{3}{4}$가 크다			6(2.1%)	13 (4.5%)
	$\frac{2}{3}$가 $\frac{3}{4}$보다 커서 몫이 작아진다			2(0.7%)	
	기타			5(1.7%)	
무응답				2(0.7%)	

8.6%(25명), 그림으로 설명한 경우가 2.7%(8명)였다. 한편, 자연수의 나눗셈과 연계하여 나누는 수가 작을수록 나눗셈의 결과, 즉 몫은 커진다는 사실을 설명한 학생들도 4.8%(14명)였다. 직접 계산한 결과를 제시하거나, 계산과정을 생각하여 2/3와 3/4으로 나누는 대신에 3/2과 4/3를 곱하는 것으로 설명한 경우가 각각 1.4%(4명)씩 있었다.

오답은 '2/3가 3/4보다 작다'라는 사실을 이유로 들었으나 나누는 수가 클수록 계산결과도 크다는 잘못된 추론을 한 경우가 소수 있었고, 2/3와 3/4의 크기를 잘못 비교한 경우도 소수 있었다. 한편, 이와 관련된 선행연구에서, 특히 우리나라 학생들은 "직접 계산하지 말고"라는 전제가 있는 문항에서는 높은 연산 감각을 보이다가도 그런 전제가 없으면 자연스럽게 계산하는 성향이 강하게 나타났다는 점을 고려해 보면(Markovits & Pang, 2007), 본 연구에서 예비교사들의 연산 감각 역시 문항에 제시된 전제를 바탕으로 하고 있다고 판단할 수도 있다.

3. 분수 나눗셈에 대한 교수 내용 지식

가. (분수)÷(자연수)와 (분수)÷(분수)의 비교

거의 모든 예비교사들이 초등학생들에게 (분수)÷(자연수)를 어떻게 설명할지를 타당한 근거로 제시할 수 있었다. 구체적으로, "학생들에게 왜 $\frac{2}{3} \div 2 = \frac{1}{3}$인지 어떻게 설명하겠습니까?"라는 질문에 대해서 <표 6>에 제시된 바와 같이, 약 98%의 예비교사들이 그림 활용(44.6%), 통분하여 계산하기(6.2%), 수직선 활용(5.5%), 구체적 조작물 활용(10.3%), 나눗셈과 분수의 의미 활용(7.6%), 실생활 문제 활용(5.2%)과 같이 다양한 방법을 제안하였다. 특히, 직사각형 모델을 활용한 그림 자료, 종이를 잘라보는 활동, 리본을 나누는 활동 등은 초등학교 학생들에게 "구체적 조작물을 사용함으로써 학생들이 추상적인 수학을 피하도록 도와줄 수 있다"는 신념을 상당부분 반영한 것으로 유추된다. 한편, 통분하여 계산하는 방법을 제시한 경우가 약 6%에 이르렀는데, 이 경우 대부분 자연수 2를 6/3으로 대치하여 동분모 분수의 나눗셈으로 변형함으로써 계산 과정을 설명하였다. 단지 약 3%의 예비교사들만 특별한 설명 없이 전형적인 알고리듬을 적용하였다.

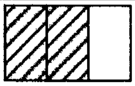
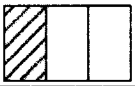
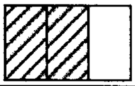
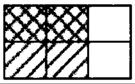
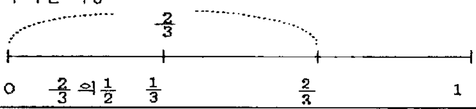
한편, 약 15%의 예비교사들은 2가지 이상의 방법으로 다양한 접근 방법을 제시하였다. 설문조사에서 다양한 방법으로 설명해 보라는 특별한 지시문이 없었음에도 불구하고, 상당한 예비교사들이 자발적으로 두 가지 이상의 방법으로 설명한 것은 "수학을 가르칠 때 한 가지 이상의 표현(그림, 구체물, 기호)을 사용해야 한다"는 자신들의 신념이 잘 반영된 것으로 유추된다.

(분수)÷(자연수)에 대한 설명에 비해 (분수)÷(분수)의 경우에 대해서 예비교사들의 설명은 다소 차이가 있었다. 우선 약 88%의 예비교사들이 초등학생들에게 (분수)÷(분수)를 어떻게 설명할 지에 대해서 타당한 근거를 제시할 수 있었다. 구체적으로 살펴보면 <표 7>에 제시된 바와 같이 그림 활용(33.3%), 통분하여 계산하기(22.7%), 수직선 활용(5.2%), 구체적 조작물 활용(4.8%), 나눗셈 의미 활용(2.7%), 분수간의 관계 활용(1%), 실생활 문제 활용(1.4%)과 같이 다양한 방법을 제안하였다.

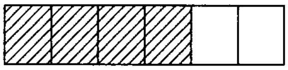
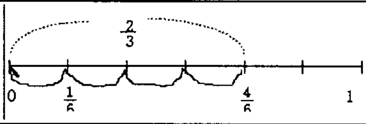
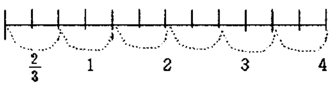
(분수)÷(자연수)에 대한 설명과 대조해 볼 때, 가장 두드러진 특징은 통분하여 계산하는 방법이 6.2%에서 22.7%로, 특별한 설명 없이 전형적인 알고리듬만 적용한 경우도 3.4%에서 10%로 급증하였다는 것이다. 상대적으로 그림 활용, 구체적 조작물 활용, 실생활 문제 활용 등의 방법을 사용한 비율은 감소하였다. 2가지 이상의 방법으로 다양한 접근 방법을 제시한 경우도 6%대로 감소하였다.

전체적으로 그림을 활용하는 방법이 가장 선호되는 방법이었으나 4.5%의 학생들이 그림으로 설명하는 데 실패하였고, 구체적으로 $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = 4$를 제시하지 못하고 $\frac{2}{3} \times \frac{1}{6}$를 나타낸 후 완성하지 못하거나 답이 4라는 것을 알고 주어진 문제를 변형하여 $4 \div \frac{2}{3} = 6$임을 설명하는 그림을 그리기도 하였다. 이는 $\frac{2}{3} \div 2 = \frac{1}{3}$의 경우는 자연수에서의 나눗셈의 의미, 특히 예비교사들에게 익숙한 등분제의 의미가 그대로 반영되는 반면에, $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = 4$의 경우는 포함제의 의미로 생각하거나 어떤 수의 1/6이 2/3일 때, 그 어떤 수를 알아내는 의미로 변형이 필요하기 때문에 그 설명 과정에서, 알고리듬 이외의 접근 방법에서 어려움을 겪는 것으로 유추된다.

<표 6> 왜 $\frac{2}{3} \div 2 = \frac{1}{3}$인지에 대한 예비교사들의 설명 방법

답	유형(예)		합계 (%)	
정답	그림	$\frac{2}{3}$  2로 나누면 $\frac{1}{3}$ 	115 (39.5%)	285 (97.9%)
		$\frac{2}{3}$  2로 나누면 $\frac{2}{6}$  이므로 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	12 (4.1%)	
		기타	3 (1%)	
	통분하여 계산	$\frac{2}{3} \div 2 = \frac{2}{3} \div \frac{6}{3} = 2 \div 6 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	14 (4.8%)	
		기타 (예) $\frac{2}{3} \div \frac{2}{1} = \frac{2\times1}{3\times1} \div \frac{2\times3}{1\times3} = \frac{2\times1}{2\times3}$ $= \frac{2}{2} \times \frac{1}{3} = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$	4 (1.4%)	
	수직선 이용 		16 (5.5%)	
	구체적 조작물 활용 (예) • 종이를 $\frac{2}{3}$ 만큼 자른 후, 2개로 나누었을 때 전체 종이의 $\frac{1}{3}$이 된다는 것을 알게 한다.		30 (10.3%)	
	나눗셈과 분수의 의미 활용 • $\frac{2}{3}$는 $\frac{1}{3}$이 두 개라는 뜻입니다. $\frac{2}{3}$를 두 개로 똑같이 나누면 $\frac{1}{3}$이 됩니다. • $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$		22 (7.6%)	
	실생활의 문장제 문제 활용 • 리본이 $\frac{2}{3}$m가 남았는데 2명이 나눠 가지려고 합니다. 한 사람 당 몇 m씩 갖게 될까요?		15 (5.2%)	
	알고리듬 접근방법 • $\frac{2}{3} \div 2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, • $\frac{2}{3} \div \frac{2}{1} = \frac{2\div2}{3\div1} = \frac{1}{3}$		10 (3.4%)	
	두 종류의 설명방법 • 그림 + 통분하여 계산 • 수직선 + 알고리듬		40 (13.7%)	
	세 종류의 설명방법		4 (1.4%)	
오답	그림으로 해결하다 실패함 통분하는 과정으로 설명하다가 완성하지 못함: $\frac{2}{3} \div 2 = \frac{3}{3} \div \frac{2}{1} = \frac{2\times1}{3\times1} \div \frac{2\times3}{1\times3} = ?$ 실생활 문장제 문제로 만들려다가 완성하지 못함		4 (1.4%)	
무응답			2 (0.7%)	

<표 7> 왜 $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = 4$인지에 대한 예비교사들의 설명 방법

응답	유형(예)	합계 (%)	
정답	그림 $\frac{2}{3}$  에는 $\frac{1}{6}$이 4번 포함되어 있다.	97 (33.3%)	254 (87.3%)
	통분하여 계산: $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = \frac{4}{6} \div \frac{1}{6} = 4 \div 1 = 4$	48 (16.5%)	
	통분하여 계산: 기타 • $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = \frac{2 \times 6}{3 \times 6} \div \frac{1 \times 3}{6 \times 3} = \frac{2 \times 6}{1 \times 3} = 4$	18 (6.2%)	
	수직선 활용 	15 (5.2%)	
	구체적 조작물의 활용 • 종이를 $\frac{2}{3}$ 만큼 자른 후, $\frac{2}{3}$에 $\frac{1}{6}$조각이 몇 번 들어가는 지 확인한다.	14 (4.8%)	
	분수간의 관계를 활용 $\frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$	3 (1%)	
	실생활 문장제 활용 • 피자가 $\frac{2}{3}$ 만큼 남았다. 한 사람 당 $\frac{1}{6}$ 씩 먹으려면 몇 명이 먹을 수 있습니까?	4 (1.4%)	
	알고리듬 접근방법 • $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \times \frac{6}{1} = 4$	29 (10 %)	
	학생들에게 $\frac{2}{3}$에 $\frac{1}{6}$이 몇 번 포함되어 있는지 물어보아 포함제로 설명한다.	8 (2.7%)	
	두 종류의 설명방법 • 그림 + 통분하여 계산 • 수직선 + 알고리듬	16 (5.5%)	
	세 종류의 설명 방법	2 (0.7%)	
오답	그림으로 해결하다 실패함 •  ?	13 (4.5%)	25 (8.6%)
	문제를 변형하여 설명함  $(4 \div \frac{2}{3} = 6$으로 문제를 변형함)	6 (2.1%)	
	기타 • 피자 $\frac{2}{3}$를 6등분해서 똑같은 개수로 담을 때 필요한 컵의 개수는? • $\frac{2}{3}$가 6번 쌓이면 얼마가 될까?	6 (2.1%)	
무응답		12 (4.1%)	

나. 분수의 나눗셈 알고리듬에 대한 설명

분수의 나눗셈에서 가장 흔히 사용하는 알고리듬은 나누는 수의 역수를 취하여 곱하는 것이다. 예비교사들에게 "당신이 '분수의 나눗셈' 알고리듬을 가르치고 있는데(예를 들어, $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$), 학생들이 왜 '나눗셈'을 '곱셈'으로 바꾸고 두 번째 분수의 분자와 분모를 서로 바꾸는지 질문했습니다. 학생들에게 어떻게 설명하겠습니까?"라고 질문하였다. <표 8>은 예비교사들의 응답을 유형별로 분석한 것이다.

우선 68%(198명)의 예비교사들이 수학적으로 타당한 설명을 제시할 수 있었는데, 가장 빈번한 유형은 41.2%(120명)의 예비교사들이 응답한 유형으로 통분을 활용하여 분모를 같게 한 다음 동분모분수의 나눗셈 원리를 이용하는 것이었다. 실제 이 방법은 현행 6학년 교과서에서 사용하고 있는 방법이다. 즉, 동분모 분수끼리의 나눗셈에서는 '생활에서 알아보기'를 통해 포함제의 상황으로 나눗셈 의미를 생각하면서 연산을 수행하도록 안내하고 있는데 반해, 이분모 분수의 나눗셈에서는 알고리듬을 중점적으로 소개하고 있다. 두 번째 빈번한 설명 방법은 13.4%(39명)의 예비교사들이 응답한 유형으로 자연수의 나눗셈을 예로 들어 자연수로 나누는 것과 자연수의 역수를 곱하는 것이 같다는 것을 학생들이 찾도록 유도한다는 것이다. 이와 관련하여 약 2%의 학생들은 간단한 분수의 나눗셈을 통해 그림이나 수직선을 이용하여 포함제의 의미로 나눗셈 알고리듬을 설명하기도 하였다. 이외에 수학적으로 타당하기는 하나 현재 초등학교 수학과 교육과정에서 다루지 않는 번분수를 직접 또는 간접적으로 사용한 경우도 9%이상 있었다.

한편 오답을 제시한 예비교사들의 경우는 대개 알고리듬을 설명하지 않고 그대로 활용하거나 동분모 분수의 나눗셈으로 바꾸는 과정에서 분모에 그대로 동분모 분수를 제시함으로써 오류를 보인 학생들이 대부분이었다. 무응답율은 24%로 본 설문지 분석에서 가장 높았다.

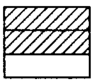
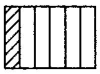
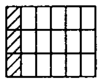
다. 분수 연산 간의 관계 및 대안적 알고리듬

분수 연산에서 학생들이 개념적으로 이해하기 어려워하는 것 중의 하나는 덧셈과 뺄셈의 알고리듬과 곱셈과 나눗셈의 알고리듬이 다르다는 것이다. 이에 대해서 예비교사들이 어떻게 이해하고 있고 실제 초등학생들에게 어떻게 설명할 것인지 다음 질문(Tirosh, 2000)을 통해 알아보았다. 또한 곱셈과 나눗셈의 관계에서 나눗셈도 곱셈처럼 계산하면 어떠한지 설명하도록 해 보았다.

> 당신은 학급에서 분수 연산에 대해서 논의하고 있는 중입니다. 논의 중에 보람이는 다음과 같이 말했습니다.
>
> *분수의 곱셈은 쉬워. 분자는 분자끼리 분모는 분모끼리 곱하면 되니까. 나는 이와 유사한 방법으로 다음과 같이 분수의 다른 연산도 정의해야 된다고 생각해.*
>
> 덧셈 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(a+c)}{(b+d)}$
>
> 뺄셈 $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{(a-c)}{(b-d)}$
>
> 나눗셈 $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{(a \div c)}{(b \div d)}$
>
> 보람이의 제안을 어떻게 생각합니까? (덧셈, 뺄셈, 나눗셈의 경우를 각각 다루시오.)

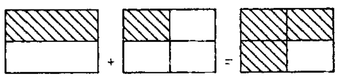
덧셈과 뺄셈의 반응 유형은 대동소이하기 때문에, 여기서는 덧셈의 경우만 다룬다(<표 9> 참조). 무응답을 제외한 모든 예비교사들은 분수의 덧셈에서 분모끼리 더하면 안된다는 알고리듬을 알고 있었다(유일한 오답은 통분과정에서 계산실수인 경우). 가장 많은 학생들이 통분을 언급했는데, 말로만 분수의 덧셈에서는 공배수로 통분한다고 응답한 경우가 29.2%(85명), 구체적인 통분과정을 제시한 경우가 22.7%(66명), 통분의 필요성을 포함하여 구체적인 설명을 제시한 경우가 4.8%(14명)였다. 또한 두 번째로 많은 응답유형은 보람이의 제안대로 덧셈을 하는 경우 수학적인 모순이 발생한다는 것을 쉬운 예를 들어 설명한 경우였다. 구체적으로 이런 설명에는 수, 그림, 어림셈 등 다양한 방법이 제안되었다. 예외적으로 보람이의 계산법이 덧셈에서 성립하지 않는다고 답은 하였으나 어떻게 설명한 것인지에 대해서는 기술하지 않은 학생들도 7.2%(21명)가 있었다.

<표 8> 분수의 나눗셈 알고리듬에 대한 설명

답	유형(예)	합계(%)	
정답	[통분을 활용하여 분모를 같게 한 후 나눗셈을 하는 방법] 예 : $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\div\frac{bc}{bd}=\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$	120 (41.2%)	198 (68%)
	[예를 들어 알고리듬을 유도] ① $\frac{1}{2}\div3=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$이므로 이러한 과정을 여러 번 거치게 한 후 학생 스스로 알고리듬의 규칙 발견 ② $4\div2=4\times\frac{1}{2}$: 전체를 반으로 나누는 것과 $\frac{1}{2}$을 곱하는 것은 같다. 따라서 ÷와 ×는 역연산의 관계가 있다.	39 (13.4%)	
	[번분수 계산법 이용] 예 : $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$	13 (4.5%)	
	[분자와 분모에 같은 수를 곱하는 방법] 예 : ① $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\div b}{c\div d}=\frac{a\div b\times d}{c\div d\times d}=\frac{a\div b\times d}{c}=\frac{a\div b\times d\times b}{c\times d}=\frac{a\times d}{b\times c}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$ ② $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{\frac{a}{c}\times c}{\frac{b}{d}\times c}=\frac{a}{\frac{bc}{d}}=\frac{a\times d}{\frac{bc}{d}\times d}=\frac{a\times d}{b\times c}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$	12 (4.1%)	
	[그림 또는 수직선을 그려 나눗셈 포함제로 설명] 예 : $\frac{2}{3}\div\frac{1}{6}$: 에 이 몇 번 들어가는지 직접 세어 본다.  작은 사각형 세 칸이 $\frac{1}{6}$이므로 $\frac{2}{3}$에는 $\frac{1}{6}$이 4번 들어감.() 따라서 $\frac{2}{3}\times6=4$ 의 결과와 같다.	6 (2.1%)	
	$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\left(\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}\right)\div\left(\frac{c}{d}\times\frac{d}{c}\right)=\left(\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}\right)\div1=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$	3 (1%)	
	6÷2는 6을 2등분 한 것 중의 하나 : $6\times\frac{1}{2}$를 이용하여 $\frac{a}{b}$를 $\frac{c}{d}$등분한 것 중의 하나 : $\frac{a}{b}\times\frac{1}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$	2 (0.7 %)	
	기타: 연산기호의 분배법칙을 이용 • $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=(a\div b)\div(c\div d)=a\div b\times d\div c=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$	3 (1%)	

답	유형(예)	합계(%)	
오답	[곱셈의 역연산을 설명해야하나 설명 없이 그것을 이용하여 설명하고 있음] 예 : ① $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div \frac{c}{d}}{b} = \frac{a \times \frac{d}{c}}{b} = \frac{\frac{ad}{c}}{b} = \frac{ad}{bc}$ ② $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \div \frac{c \times \frac{1}{d}}{d \times \frac{1}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{\frac{c}{d}}{1}$ 이고 $\frac{c}{d} = A$라고 하자. $\frac{a}{b} \div A = \frac{a}{b} \times \frac{1}{A} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$	13 (4.5%)	23 (7.9%)
	[알고리듬 설명과정에서의 오류] $\frac{ad}{bd} \div \frac{bc}{bd} = \frac{ad \div bc}{bd}$ ① $= \frac{a \times d}{c \times b} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ ② 이미 동분모 분수끼리의 나눗셈은 분자를 계산한 값이므로 $\frac{ad}{bc}$ 즉 $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ ③ $= \frac{\frac{ad}{bc} \times bc}{bd \times bc} = \frac{ad}{bd \times bc}$ (?)	6 (2.1%)	
	계산 실수 또는 불충분한 설명	4 (1.4%)	
무응답		70 (24.1%)	

<표 9> 보람이의 덧셈 방법에 대한 설명

답	유형		합계 (%)	
정답	통분	(말) 공배수로 통분해야 한다.	85 (29.2%)	257 (88.3%)
		(증명) 통분 과정을 제시함. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$	66 (22.7%)	
		(자세한 설명) • 분모는 나누는 기준을 나타내는데 두 분수의 분모가 다르므로 서로 기준량이 다르다. 따라서 기준량을 같게 하는 통분이 필요하다.	14 (4.8%)	
	예를 들어 설명	(수) • $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$이지만 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$이므로 성립하지 않는다.	38 (13.1%)	
		(어림셈) • $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$이라는 보람이의 방법은 반에 어떤 수를 더했는데 반보다 작은 수가 되므로 옳지 않다.	16 (5.5%)	
		(그림) • $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{6}$가 아니라 	12 (4.1%)	
	덧셈은 성립하지 않는다고 답은 하였으나 추가 설명은 없음		21 (7.2%)	
	기타		5 (1.7%)	
오답	계산과정에서 실수			1 (0.3%)
무응답			33 (11.3%)	

한편, 보람이의 나눗셈에 대한 제안에 대해서 <표 10>에 분석된 바와 같이 단지 37.8%(110명)의 예비교사들만 옳다고 판단하였다. 구체적으로 예비교사들의 반응을 분석해 보면, 보람이의 계산 방법과 나눗셈의 전형적인 알고리듬(나누는 수의 역수를 취하여 곱하는 것)이 서로 같다는 것을 증명한 경우가 13%(38명)인 반면에, 보람이의 계산 방법이 나눗셈에서 적용된다는 사실만을 아는 것으로 답한 경우가 14.4%(42명), 예를 들어 설명함으로써 수학적인 일반화는 추구할 수 없는 방법을 제시한 경우가 3.4%(10명)였다. 예외적으로 5.2%(15명)의

<표 10> 보람이의 나눗셈 방법에 대한 설명

답	유형		합계 (%)	
정답	증명 (알고리듬 설명)	$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$ 와 $\frac{a\div c}{b\div d}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}}=\frac{ad}{bc}$ 가 같음	30 (10.3%)	110 (37.8%)
		$\frac{ad}{bd}\div\frac{bc}{bd}=ad\div bc=\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\div c}{b\div d}$	5 (1.7%)	
		$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}=\frac{a}{c}\times\frac{d}{b}=\frac{a}{c}\div\frac{b}{d}$ 이므로 $\frac{a\div c}{b\div d}$	2 (0.7%)	
		$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=(a\div b)\div(c\div d)=(a\div c)\div(b\div d)=\frac{a\div c}{b\div d}$	1 (0.3%)	
	나눗셈은 성립한다(답만 있고 설명 없음)		42 (14.4 %)	
	예를 들어 설명 $\frac{1}{2}\div\frac{4}{9}=\frac{1\div 4}{2\div 9}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{9}}=\frac{9}{8}$		10 (3.4%)	
	• 나눗셈이 성립하지만 방법이 복잡하므로 초등수학에서 지양(예: 번분수가 되므로) • 나눗셈은 성립하지만 분수의 곱셈으로 계산하는 것이 더 쉽다		15 (5.2%)	
	불충분한 설명		5 (1.7%)	
오답	전형적인 알고리듬 제시 또는 설명 • $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$ • $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\div\frac{bc}{bd}=\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$ • $\frac{ad}{bd}\div\frac{bc}{bd}=\frac{ad\div bc}{bd}=\frac{a\times d}{b\times c}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$ 와 $\frac{a\div c}{b\div d}$ 가 같지 않다.		81 (27.8%)	112 (38.5%)
	불충분한 설명이나 해석 • $\frac{a}{b}$에 $\frac{c}{d}$가 몇 번 있는가 포함제로 생각해야 한다 • 분수의 분자와 분모를 각각 하나의 수로 인식하지 않고 분수 전체를 하나의 수로 인식해야 한다.		13 (4.5%)	
	동분모일 때만 가능함이라고 설명		5 (1.7 %)	
	예를 들어 설명하는 과정에서 계산 실수 • $\frac{12}{6}\div\frac{3}{3}=2\div 1=2$가 되야 하지만 $\frac{12}{6}\div\frac{3}{3}=\frac{12\div 3}{6\div 3}=\frac{4}{3}$		3 (1%)	
	$\frac{1}{2}\div\frac{0}{3}=\frac{1\div 0}{2\div 3}$ 이고 1÷0은 답이 존재하지 않으므로		2 (0.7%)	
	설명 없음		8 (2.7%)	
무응답			69 (23.7%)	

예비교사들은 보람이의 계산 방법이 타당하지만, 계산과정에서 번분수가 나올 수도 있기 때문에 초등학생들에게 적합하지 않다거나, 역수를 취하는 다른 알고리듬이 더 쉽다고 판단한 경우도 있었다.

한편, 보람이의 알고리듬이 타당함에도 불구하고 틀린 알고리듬이라고 생각한 예비교사들이 무려 38.5%(112명)에 이르렀고, 무응답율도 23.7%(69명)로 상당히 높은 편이었다. 오답을 한 경우를 보다 구체적으로 분석하면, 가장 많은 27.8%(81명)의 예비교사들이 보람이의 계산 방법은 전형적인 나눗셈 알고리듬이 아니기 때문에 (즉, 두 식이 동치임을 깨닫지 못하였기 때문에) 단순히 틀린 것이라고 판단하고, 전형적인 알고리듬을 설명하는데 주력하였다. 다음으로, 4.5%(13명)의 예비교사들은 나눗셈 개념이나 연산결과에 대해서 잘못된 설명을 제시하였다. 또한 동분모일때만 가능하다고 대답하거나, 예를 들어 설명하는 과정에서 계산실수를 하거나 반례를 찾으려고 시도한 경우 등이 있었다.

V. 맺는 말

본 연구는 우리나라 예비교사 4학년 학생들이 대학의 교사교육 프로그램을 마치기 전, 초등학교 수학을 가르칠 준비가 얼마나 되어 있다고 스스로 평가하는지를 알아보고, 분수의 나눗셈을 중심으로 내용 지식과 교수 내용 지식을 상세히 분석함으로써, 초등 예비 수학교사교육의 현주소를 알아보고 이에 대한 시사점을 얻고자 하였다. 연구결과 예비교사들은 분수의 덧셈과 뺄셈보다는 곱셈과 나눗셈을 다루는 시기, 그리고 분수의 연산보다는 말, 수, 또는 모델을 활용하여 분수를 표현하고 설명하는 것에 대해서 상대적으로 덜 준비된 것으로 드러났다.

분수 나눗셈에 대한 내용 지식 측면에서는 단순한 계산 문제, 문장제, 연산감각 측면에서 높은 정답율을 보인 반면에, 간단한 단위 분수끼리의 나눗셈을 포함제의 의미로 해석하여 말로 제시한 경우에는 약 15%의 오답율과 6%의 무응답율을 보였다. 이는 선행연구에서 예비교사들이 분수 나눗셈의 계산 과정을 개념적으로 이해하지 못하고 있다는 것을 지지한다. 특히, 선행연구 경향과 다르게 본 연구는 초등수학교육과 관련된 모든 강의를 마친 시기에 실시한 연구라는 점에서 적어도 20%의 예비교사들이 분수 나눗셈의 기본적인 "의미"를 이해하지 못하고 있다는 것을 드러냈다고 볼 수 있다.

교사 스스로 개념적으로 이해하지 못한 내용을 초등학교 학생들에게 의미 있게 지도하기를 기대할 수는 없을 것이다. 초등학교에서 가장 알고리듬에 기초하여 지도되고 있는 주제로 인식되는 내용이 분수 연산임을 고려해볼 때(Tirosh, 2000), 예비교사교육에서 분수 나눗셈 지도에 대한 보다 세심한 주의가 요구된다. 특히, 자연수 나눗셈에서의 등분제와 포함제 의미가 그대로 분수 나눗셈에 일반화되지 않는다는 점에서(Flores, 2002), 예비교사들이 두 연산간의 공통점과 차이점을 명확하게 인지하도록 지도할 필요가 있다.

분수 나눗셈에 대한 교수 내용 지식 측면에서 분수를 자연수로 나누는 경우에 비해 분수를 분수로 나누는 경우 예비교사들의 전체 정답율이 약 10% 감소하였고, 초등학생들에게 설명하는 방법에서 구체적인 표현(그림이나 수직선, 조작물 등의 활용) 방식을 택하는 대신에 통분하여 계산하는 경우와 아무런 설명 없이 전형적인 알고리듬만 소개하는 경우가 각각 3배 이상 증가하는 것으로 나타났다. 이는 분수 나눗셈 내에서 피제수와 제수에 각각 자연수와 분수가 제시되는 경우 그 의미가 어떻게 다른지에 대한 명확한 이해가 부족하다는 것을 단편적으로 드러낸 것이라고 유추된다. 이런 경우 예비교사들은 초등학교 학생들에게 통분이나 알고리듬과 같이 계산 방법 자체에만 초점을 둔 설명을 할 수 밖에 없다.

한편, 분수의 전형적인 알고리듬에 대한 설명에서 68%의 예비교사들만이 계산 과정에서 왜 제수의 역수를 취해 곱하는 형태가 되는지 설명할 수 있었다. 하지만, 이들 중 수학적으로는 타당하나 현행 초등수학 교육과정에서 다루지 않는 번분수 계산을 사용한 비율을 제외하면, 정답율은 훨씬 낮아진다. 초등학교 학생들이 계산 원리는 이해하지 못한 채, 마술과도 같은 분수 나눗셈 계산 방법을 외워서 아는 것과 마찬가지로 상당수의 예비교사들이 교사교육을 통해서도 그와 같은 계산 원리를 명확히 이해하지 못하고 있다는 점은 정말 주목할 필요가 있겠다. 적어도 초등학교 수학 교실에서 의미나 이해를 강조한 수업을 하기를 원한다면, 예비교사들이 교사교육 프로그램을 통해서 그런 방법으로 지도받아야 한다.

또한 본 연구 결과에서 주목해야 할 것은 예비교사들이 분수 연산 간의 관계 및 대안적 알고리듬에 대해서 매우 취약한 교수 내용 지식을 가지고 있다는 점이다. 특히, 분수의 곱셈에서는 분자끼리, 분모끼리 각각 곱하는 알고리듬을 당연하게 받아들이면서, 나눗셈에서는 분자끼리, 분모끼리 각각 나누는 방법은 단지 전형적인 알고리듬이 아니기 때문에 잘못된 것이라고 생각하는 예비교사의 비율이 상당히 높은 반면에, 수학적으로 타당한 설명을 제시할 수 있었던 비율은 고작 13%에 머문다. 이는 초등학교 현장에서 학생들이 교사가 미처 생각해보지 못한 해결 방법이나 새로운 아이디어를 제시할 경우, 교사가 적절히 대처하지 못할 가능성이 매우 높다는 것을 의미한다. 이와 같은 측면에서 수학에서의 표준 알고리듬이 가장 효율적이며 결과적으로 최선의 교수방법이라는 인식을 벗어나서, 예비교사가 전형적인 알고리듬과 관련된 내용을 이해하는 것뿐만 아니라 대안적인 알고리듬, 또는 유사 알고리듬 등에 민감해지도록 지도할 필요가 있다.

마지막으로, 분수 나눗셈과 관련된 내용 지식과 교수 내용 지식의 관계 측면에서 내용(이론) 따로, 방법(실제) 따로의 전형적인 교사교육 패턴을 재고할 필요가 있겠다. 잘 가르치기 위해서 필요한 교사 지식의 형태는 분명 가르칠 내용에 대한 깊이 있는 이해를 기반으로 할 것이다. 하지만, 그러한 이해는 교사 자신의 이해로 그치는 것이 아니라 자신이 가르칠 장래의 학생들에게 어떻게 설명할 수 있는가와 밀접히 연관될 필요가 있겠다. 본 연구에서 예비교사들이 수학적으로는 타당한 설명을 제시할 수 있음에도 불구하고, 그런 설명 방법이 초등학교 학생들의 수학적 이해 수준을 벗어나는 것이라면, 교육적 측면에서 적합한 설명이라고 할 수 없을 것이다. 또한 계산은 할 수 있고, 정답 여부를 판별할 수는 있으면서도 이를 초등학교 학생들에게 개념적으로 설명할 수 없거나 다소 모호한 설명에 그친다면 이 또한 교사 지식으로 충분치 않을 것이다. 예비교사들이 가르칠 내용을 단순히 아는 수준에서 벗어나서 왜 그런지 해당 학생들에게 의미 있는 방법으로 설명할 수 있는 지식을 충분히 쌓을 수 있도록 교사교육 프로그램에서 특정한 내용 지식과 이를 지도하기 위한 구체적인 방법을 통합한 형태의 교수법을 설계해야 한다.

참 고 문 헌

김민경 (2003). 나눗셈 개념에 대한 초등예비교사의 이해도 분석. 학교수학, **5(2)**, pp.223-240.

김상룡 (2004). 예비교사의 초등수학 내용지식에 관한 연구. 대구교육대학교 논문집, **39**, pp.169-186.

박교식 · 송상헌 · 임재훈 (2004). 우리나라 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈의 의미 이해에 대한 연구. 학교수학, **6(3)**, pp.235-249.

방정숙 (2002). 수학교사의 교수방법에 영향을 미치는 요소에 관한 소고. 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육>, **41(3)**, pp.257-271.

방정숙 (2007). 교사 지식에 대한 이해. 제7회 청람교과교육 정책 포럼(pp.14-19). 한국교원대학교부설 교과교육공동연구소.

서관석 · 전경순 (2000). 예비초등교사들의 분수 연산에 관한 내용적 지식과 교수학적 지식 수준에 대한 연구: 교사교육적 관점. 수학교육학연구, **10(1)**, pp.103-113.

이대현 · 서관석 (2003). 초등수학 예비교사들의 분수에 대한 표상의 분석. 한국수학교육학회 시리즈 C <초등수학교육>, **7(1)**, pp.31-41.

Clarke, D. M., Roche, A., & Mitchell, A. (2008). 10 practical tips for making fractions come alive and make sense. *Mathematics Teaching in the Middle School*, **13(7)**, pp.372-380.

Flores, A. (2002). Profound understanding of division of fractions. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp.237-246). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kim, H. S. (2001). Towards achieving high quality pre-service teacher training in Korea. In Y. C. Cheng, M.M.C. Mok, & K. T. Tsui (Eds.), *Teaching effectiveness and teacher development* (pp.431-452). The Hong Kong Institute of Education. Hong Kong: Kluwer Academic Publishers.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second* *handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.629-668). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Leung, F.K.S & Park, K.M. (2002). "Competent students, competent teachers?" *International Journal of Educational Research*, **37(2)**, pp.113-129.

Li, Y., Ma, Y., & Pang, J.S. (2008). Mathematical preparation of prospective elementary teachers. In T. Wood (Seres Ed.) & P. Sullivan (Vol. Ed.), *Handbook of mathematics teacher education: Vol. 1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development* (pp.37-62). Rotterdam, The Netherlands: Sense.

Li, Y & Smith, D. (2007). Prospective middle school teachers' knowledge in mathematics and pedagogy for teaching: The case of fraction division. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, **Vol.3**, pp.185-192. Seoul: PME.

Ma (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah, MJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Markovits, Z. & Pang, J.S. (2007). The ability of sixth grade students in Korea and Israel to cope with number sense tasks. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, **Vol.3**, pp. 241-248. Seoul: PME.

Siebert, D. (2002). Connecting informal thinking and algorithms: The case of division of fractions. In B. Litwiller & G. Bright (Eds)., *Making sense of fractions, ratios, and proportions*. (pp.247-256). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sinicrope, R., Mick, H. W., & Kolb, J. R. (2002). Interpretations of fraction division. In B. Litwiller & G. Bright (Eds)., *Making sense of fractions, ratios, and proportions*. (pp.153-161). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research*. Dordrecht: Kluwer Adademic Publishers.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, **31(1)**, pp.5-25.

An Analysis on the Prospective Elementary Teachers' Knowledge in the Case of Division of Fractions

JeongSuk Pang
Korea National University of Education
Gangnae-myeon, Cheongwon-gun, Chung-buk 363-791, Korea
E-mail: jeongsuk@knue.ac.kr

Yeping Li
Texas A & M University
4232 TAMU, College Station,TX 77843-4232, USA
E-mail: yepingli@tamu.edu

This article is based on an international collaborative study that aimed to investigate mathematical preparation of prospective elementary teachers in several selected education systems in East Asia. This article reports the Korean portion of the study. A survey instrument was developed to explore not only prospective teachers' knowledge of elementary mathematics curriculum and their beliefs in their preparation and mathematics instruction but also their subject matter knowledge and pedagogical content knowledge on the topic of fraction division. A total of 291 seniors in 3 universities participated in the survey. The results reveal these prospective teachers' strengths and weaknesses with regard to their knowledge of fraction division, and suggest that content-specific pedagogical knowledge needs to be emphasized in the teacher preparation program.

* ZDM classification : B52
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C70
* Key Words : teacher knowledge, fraction of division, subject matter knowledge, pedagogical content knowledge, education for prospective elementary school teachers