

논문 2008-45SC-5-2

다입력 다출력 비선형 시스템의 상태 관측기 설계

(A State Observer for MIMO Nonlinear Systems)

이성렬*

(Sungryul Lee)

요약

본 논문에서는 미지의 외란이 존재하는 불확실한 비선형 시스템에 대한 강인 상태 관측기 설계 방법을 제안한다. 제안한 관측기는 추정 오차에 대한 외란의 영향을 원하는 수준까지 감소시킬 수 있다. 또한, 제안한 관측기의 이득행렬은 선형 행렬 부등식을 이용하여 얻을 수 있다. 제안한 설계 방법은 기존의 적응관측기에서 다룬 파라미터 불확실성 보다 더 넓은 범위의 외란을 다룰 수 있다는 장점을 가진다. 마지막으로 제안한 결과의 유효성을 증명하기 위하여 모의실험 예제를 제공한다.

Abstract

In this paper, the robust state observer for nonlinear systems with unknown disturbance is proposed. The proposed method has an advantage in that it can reduce the effect of disturbance on estimation error of observer up to a specified level. Therefore, our design approach can deal with a larger class of uncertain nonlinear system than the existing methods. The sufficient conditions on the existence of robust observer are characterized by well known linear matrix inequality. Finally, an illustrative example is given to verify the proposed design scheme.

Keywords : state observer, nonlinear systems, disturbance

I. 서론

최근 많은 연구자들이 비선형 시스템의 관측기 설계 문제를 활발히 연구하고 있다. 이 문제를 해결하기 위하여 오차 선형화를 이용한 방법, 삼각 구조를 이용한 고이득 관측기, 리아푸노프 또는 리카티 방정식을 이용한 방법 등과 같은 여러 가지 설계 방법들이 개발되었다. 그러나 이러한 대부분의 연구들은 불확실성이 존재하지 않는 즉, 정확한 모델 정보를 알고 있는 시스템만을 주로 다루고 있다. 따라서 파라미터 변동이나 미지의 외란이 존재하는 경우 관측기의 안정도를 보장할 수 없다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 최근 강인 관측기에 관한 연구가 주목받고 있으나 아직 많은 연구가

이루어지고 있지 못한 실정이다.

강인관측기 연구는 파라미터 불확실성이 존재하는 비선형 시스템에 대한 적응 관측기 연구에서 시작되었다. 적응관측기는 시스템의 상태 변수와 미지의 모델 파라미터를 동시에 추정하는 관측기를 의미한다. Marino는 [1]에서 적응 오차 선형화 기법을 이용한 적응 관측기 설계 방법을 제안하였다. [1]의 방법은 관측기 설계를 위하여 필요한 조건들이 제약이 너무 강하여 실제 시스템에 적용하기 어려운 단점을 가진다. [2]에서 Cho는 Lipschitz 특성을 갖는 비선형 항을 포함하는 시스템에 대한 적응 관측기를 제안하였다. Cho의 방법은 Marino의 방법보다 더 넓은 범위의 시스템에 적용가능한 장점이 있는 반면에 SPR(Strictly Positive Real) 특성을 필요로 하는 단점이 있다. [3]에서는 [2]의 이론을 능동현가시스템에 적용하여 실용성을 입증하였다. 최근에 [4]에서는 기존 연구보다 좀더 넓은 범위의 시스템에 적용 가능한 적응 관측기 형태와 조건들을 제안하였다.

* 정회원, 군산대학교 전자정보공학부
(School of Electronic & Information Eng., Kunsan National University)

※ 이 논문은 2007학년도 군산대학교 신입교수 연구비 지원에 의하여 연구되었음
접수일자: 2008년1월18일, 수정완료일: 2008년9월8일

다른 강인 관측기 연구로는 슬라이딩 모드이론을 이용한 관측기 연구가 있다. Walcott는 [5]에서 불확실한 비선형 항을 포함한 시스템에 대한 가변구조시스템 이론을 이용한 관측기 설계 방법을 제안하였다. 그러나 SPR 특성과 비선형함수에 대한 여러 제약조건을 필요로 하는 단점이 있다. Edwards는 [6]에서 슬라이딩 모드 관측기 설계를 위한 표준 형태를 정의하고 수치적인 방법을 이용한 관측기 설계 방법을 제시하였다. Xiong는 [7]에서 미지의 입력을 가지는 비선형 시스템에 대하여 슬라이딩 모드 관측기를 제안하였다. [8],[9]에서는 선형행렬부동식(LMI)를 이용하여 슬라이딩모드 관측기를 설계하는 방법을 제시하여 이득행렬의 계산을 쉽게 하였다.

지금까지 존재하는 강인 관측기는 시스템에 불확실성이 존재하는 경우에도 추정오차의 안정도를 보장하는 반면에 시스템에 대한 과도한 제약조건을 필요로 하는 단점이 있다. 강인 제어이론에서 알려진 대로 내부 안정도를 보장하는 동시에 추정오차에 대한 외란의 영향을 원하는 대로 작게 만들 수 있다면 실용적인 관점에서 충분하다. 따라서 본 논문에서는 미지의 외란이 존재하는 비선형 시스템에 대하여 추정오차에 미치는 외란의 영향을 원하는 수준으로 줄일 수 있는 강인 관측기 설계 방법을 제안한다.

II. 본 론

1. 문제 정의

본 절에서는 논문에서 다룰 비선형 시스템의 형태를 정의하고자 한다. 본 논문에서는 다음과 같은 형태의 미지의 외란을 포함한 비선형 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \Phi(x, u) + Bd \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $x \in R^n$ 는 시스템의 상태벡터, $y \in R^p$ 는 시스템의 출력, $u \in R^m$ 는 시스템의 입력, $d \in R^q$ 는 시스템의 외란, $A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times q}, C \in R^{p \times n}$ 은 모두 상수 행렬, $\Phi: R^n \times R^m \rightarrow R^n$ 는 비선형 함수를 나타낸다. 또한, 시스템의 외란 d 에 대해서는 어떤 정보도 알고 있지 않다고 가정한다. 그 외의 모든 행렬과 비선형 함수에 대해서는 정확한 정보를 알고 있다고 가정한다. 다음에서 본 논문에서 제안할 강인 관측기의 정의를 제공하겠다. 먼저 다음 식과 같은 시스템을 고려해 보자.

$$\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, u, y), \hat{x} \in R^n \quad (2)$$

정의 1: 만약 식 (2)가 식 (1)의 외란이 $d=0$ 인 경우 추정오차의 점근적 안정도를 보장하는 상태 관측기이고 외란이 $d \neq 0$ 인 경우 다음 식 (3)을 만족시키는 상수 $0 < \gamma < 1$ 가 존재할 때 식 (2)를 식(1)의 강인 상태 관측기라고 정의한다.

$$\int_{0^2}^t e^T(s)e(s)ds \leq \gamma^2 \int_0^t d^T(s)d(s)ds + \beta(e(0)), \forall t \geq 0 \quad (3)$$

여기서 $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ 이고 β 는 클래스 K 함수이다. 식 (3)은 강인 제어 이론에서 \mathcal{L}_2 외란 감쇄 성능 지표로 잘 알려져 있다. 본 논문은 \mathcal{L}_2 외란 감쇄 이론을 강인 관측기 설계 문제에 적용하고자 한다. 식 (3)을 만족시키는 관측기는 즉, 원하는 수준까지 외란의 영향을 충분히 감쇄시킬 수 있는 관측기는 실용적인 측면에서 충분히 가치가 있다. 한편, 기존의 관측기 설계가 요구하는 시스템에 대한 가혹한 요구조건을 완화함으로써 제안한 방법은 실용성을 확대시킬 수 있는 장점을 가진다. 다음에서 강인 관측기 설계를 위해 필요한 식 (1)에 대한 가정들을 제시한다.

가정 1: 식 (1)의 비선형 함수 Φ 는 모든 $x_1, x_2 \in R^n$ 와 모든 $u \in R^m$ 에 대하여 다음 식을 만족시키는 어떤 상수 $\alpha > 0$ 가 존재한다.

$$\|\Phi(x_1, u) - \Phi(x_2, u)\| \leq \alpha \|x_1 - x_2\| \quad (4)$$

가정 2: 시스템 (1)의 외란 d 의 크기는 유한하다. 즉, $\|d(t)\| \leq D$ 를 만족하는 상수 $D > 0$ 가 존재한다.

가정 1은 식 (1)의 비선형 함수가 Lipschitz 조건을 만족함을 의미한다. 이 조건은 현재 존재하는 관련 연구에서 비선형 함수에 대한 제약 조건 중 가장 완화된 형태의 조건이다. 실제로 로보틱스 모델에서 나타나는 삼각함수는 가정 1을 만족한다. 또한, 대부분의 비선형 함수들이 로컬한 영역에서는 가정 1을 만족시킨다. 가정 2는 실제 시스템이 쉽게 만족시키는 일반적인 가정으로 볼 수 있다.

본 논문에서 다룰 문제는 식 (1)과 같이 미지의 외란을 포함하는 비선형 시스템에 대하여 제시한 가정을 이용하여 식 (3)의 특성을 만족시키는 비선형 상태 관측기를 설계하는 문제이다.

2. 강인 비선형 관측기 설계

본 절에서는 앞 절에서 제시한 비선형 시스템에 대하여 강인 관측기 설계 방법을 제안한다. 먼저 식 (1)에 대하여 다음과 같은 비선형 관측기를 설계한다.

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \Phi(\hat{x}, u) + L(y - C\hat{x}) \quad (5)$$

위 식에서 $L \in R^{n \times p}$ 은 관측기의 이득 행렬이다. 다음에서 설계 방법을 제시할 것이다. 지난 절에서 제시한 가정 외에 다음 가정이 더 필요하다.

가정 3: 주어진 상수 $\alpha > 0$ 와 상수 $0 < \gamma < 1$ 에 대하여 다음 식 (6)을 만족시키는 양한정 대칭행렬 P 와 관측기 이득 행렬 L 이 존재한다. I_n 는 $n \times n$ 단위행렬을 의미한다.

$$(A - LC)^T P + P(A - LC) + \alpha^2 PP + 2I_n + \frac{1}{\gamma^2} PBB^T P < 0 \quad (6)$$

정리 1: 만약 비선형 시스템 (1)이 가정 1~3을 만족시킨다면 제안한 시스템 (5)는 외란 감쇄 성능을 갖는 강인 상태 관측기이다.

증명: 먼저 식 (1)과 (5)에 대하여 관측기의 추정오차를 다음과 같이 정의한다.

$$e = x - \hat{x} \quad (7)$$

식 (1)과 (5)를 고려하면 오차동역학을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Ax + \Phi(x, u) + Bd - A\hat{x} - \Phi(\hat{x}, u) - L(y - C\hat{x}) \\ &= (A - LC)e + \Phi(x, u) - \Phi(\hat{x}, u) + Bd \end{aligned} \quad (8)$$

가정 3에 의하여 주어진 상수 $0 < \gamma < 1$ 와 $\alpha > 0$ 에 대하여 식 (6)을 만족시키는 양한정 대칭행렬 P 가 존재하므로 오차 동역학 (8)에 대한 안정도 해석을 위하여 다음과 같은 리아푸노프 함수를 정의한다.

$$V = e^T P e \quad (9)$$

그러면, 식 (9)의 시간 도함수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \\ &= e^T [(A - LC)^T P + P(A - LC)] e \\ &\quad + 2e^T P [\Phi(x, u) - \Phi(\hat{x}, u)] + 2e^T P B d \end{aligned} \quad (10)$$

식 (4)를 이용하면 식 (10)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq e^T [(A - LC)^T P + P(A - LC)] e \\ &\quad + 2\alpha \|e^T P\| \|e\| + 2e^T P B d \\ &\leq e^T [(A - LC)^T P + P(A - LC)] e \\ &\quad + \alpha^2 e^T P P e + e^T e + 2e^T P B d \\ &\leq e^T [(A - LC)^T P + P(A - LC) + \alpha^2 P P + I_n] e \\ &\quad + 2e^T P B d \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)의 두 번째 부등식을 얻기 위해 다음 성질을 이용하였다.

$$2\alpha \|e^T P\| \|e\| \leq \alpha^2 e^T P P e + e^T e.$$

식 (6)을 이용하면 식 (11)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &< e^T [-I_n - \frac{1}{\gamma^2} P B B^T P] e + 2e^T P B d \\ &= -e^T e - \frac{1}{\gamma^2} e^T P B B^T P e + 2e^T P B d - \gamma^2 d^T d + \gamma^2 d^T d \\ &= -e^T e - (\frac{1}{\gamma} B^T P e - \gamma d)^T (\frac{1}{\gamma} B^T P e - \gamma d) + \gamma^2 d^T d \\ &\leq -e^T e + \gamma^2 d^T d \end{aligned} \quad (12)$$

식 (12)의 세 번째 등식은 완전제곱식을 이용하였다. $d = 0$ 인 경우 식 (12)으로부터 식 (8)은 지수 함수적 수렴성을 보장한다. $d \neq 0$ 인 경우 식 (12)의 양변을 시간 구간 $[0, t]$ 에서 적분하면 다음과 같다.

$$\int_0^t \dot{V} ds = V(t) - V(0) \leq \int_0^t [-e^T e + \gamma^2 d^T d] ds \quad (13)$$

V 는 양한정 함수이므로 식 (13)으로부터 다음을 쉽게 유도할 수 있다.

$$\int_0^t (e^T e) ds \leq \gamma^2 \int_0^t (d^T d) ds + V(0) \quad (14)$$

따라서 식 (14)으로부터 식 (5)는 강인 상태 관측기이다. ■

식 (6)을 만족시키는 P 와 L 을 해석적으로 구하기는 매우 어렵다. 따라서 다음 정리처럼 식 (6)을 선형행렬 부등식(LMI)를 이용하여 표현함으로써 수치적으로 P 와 L 을 구할 수 있다.

정리 2: 만약 비선형 시스템 (1)이 가정 1, 2를 만족시키고 주어진 상수 $\alpha > 0$ 와 상수 $0 < \gamma < 1$ 에 대하여 아래 식 (15)를 만족시키는 양한정 대칭 행렬 P 와 어떤 행렬 X 가 존재한다면 시스템 (5)는 강인 상태 관측기

이다. 관측기 이득행렬은 $L = P^{-1}X$ 이다.

$$\begin{pmatrix} A^T P - C^T X + PA - XC + 2I_n & PB & P \\ * & -\gamma^2 I_q & 0 \\ * & * & -\frac{1}{\alpha^2} I_n \end{pmatrix} < 0 \quad (15)$$

증명: 식 (6)은 비선형 행렬 부등식이다. 선형행렬부등식이론에서 알려진 대로 Shur Complements를 이용하여 2차 비선형 행렬 부등식을 선형 행렬 부등식으로 변환할 수 있다. 식 (6)에서 $X = PL$ 으로 정의하고 Shur Complements를 이용하면 식 (6)을 식 (15)와 같은 변수 P, X 에 대한 선형행렬부등식으로 바꿀 수 있다. 따라서 식 (15)가 만족한다면 정리 1의 결과를 그대로 얻을 수 있다. ■

III. 모의 실험

이번 장에서는 제안한 관측기 설계 방법의 유효성을 입증하기 위하여 모의실험 결과를 제공한다. 식 (1)의 형태를 가지는 다음과 같은 비선형 시스템을 고려해보자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \Phi(x, u) + Bd \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (16)$$

위 식에서 $x \in R^2$ 는 상태 변수, $u \in R$ 는 입력, $y \in R$ 는 출력, $d \in R$ 는 미지의 외란을 나타낸다. 그리고 시스템의 각 행렬 및 비선형 함수는 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \Phi(x, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ u - 1.5\sin(x_1) \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

식 (16)의 Φ 는 $\alpha = 1.5$ 일 때 가정 1을 만족시킨다. 가정 2를 만족하도록 $d(t) = 2$ 으로 설정한다. 또한, 모의실험을 위하여 $u(t) = 5\sin 3t$, $x(0) = [2, 2]^T$, $\hat{x}(0) = [0, 0]^T$ 으로 설정한다. Matlab의 feasp 명령어를 이용하여 $\gamma = 0.1, 0.3, 0.5$ 인 경우 식 (15)의 P 와 L 을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \gamma = 0.5 \text{인 경우,} \\ P &= \begin{pmatrix} 0.7113 & 0.1769 \\ 0.1769 & 0.3167 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1.3493 \\ 2.7521 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\gamma = 0.3$ 인 경우,

$$P = \begin{pmatrix} 1.3782 & 0.2528 \\ 0.2528 & 0.8116 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 5.2772 \\ 18.1136 \end{pmatrix}$$

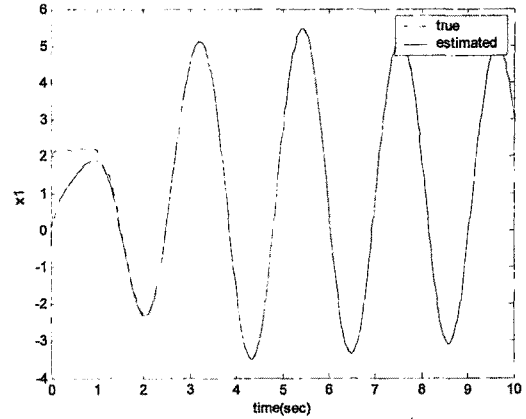


그림 1. $\gamma = 0.1$ 인 경우 x_1 의 실제값과 추정값
Fig. 1. True and estimated value of x_1 in case of $\gamma = 0.1$.

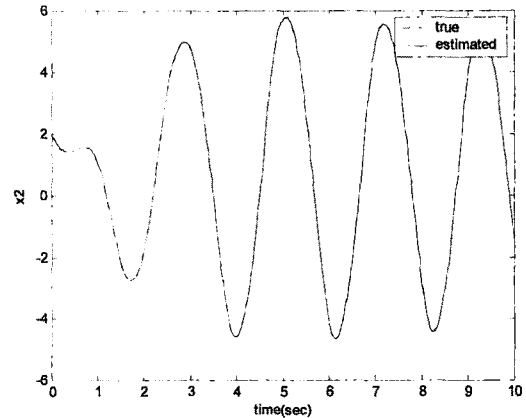


그림 2. $\gamma = 0.1$ 인 경우 x_2 의 실제값과 추정값
Fig. 2. True and estimated value of x_2 in case of $\gamma = 0.1$.

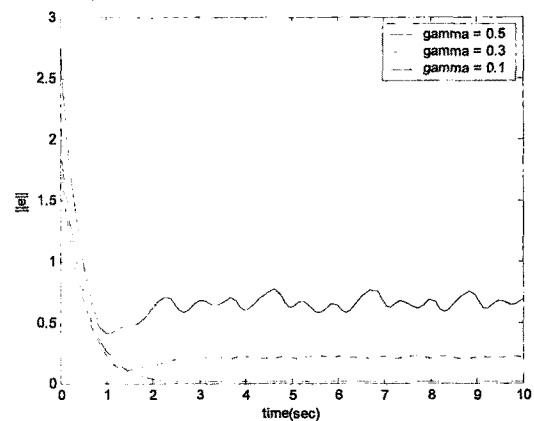


그림 3. γ 에 대한 $\|e\|$
Fig. 3. $\|e\|$ with respect to γ .

$\gamma = 0.1$ 인 경우,

$$P = \begin{pmatrix} 1.3695 & 0.0161 \\ 0.0161 & 1.1340 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 3.9613 \\ 132.6632 \end{pmatrix}$$

따라서 시스템 (16)이 정리 2의 모든 가정을 만족시키므로 식 (17)과 같은 외란 감쇄 성능을 갖는 강인 상태 관측기가 존재한다.

$$\dot{\hat{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ u - 1.5 \sin(\hat{x}_1) \end{pmatrix} + L(y - \hat{x}_2) \quad (17)$$

그림 1, 2는 $\gamma = 0.1$ 인 경우 시스템 (16)의 실제 값과 관측기 (17)의 추정 값을 비교한 것이다. 추정오차에 대한 외란의 영향이 원하는 만큼 감쇄되었음을 잘 보여주고 있다. 그림 3은 $\gamma = 0.5, 0.3, 0.1$ 인 경우 추정오차 벡터의 크기(norm)를 보여준다. 감쇄 수준 γ 가 작아질수록 추정오차가 감소하고 있음을 보여준다.

IV. 결 론

본 논문에서 미지의 외란을 포함하는 비선형 시스템에 대한 강인 관측기 설계 방법을 제안하였다. 제안한 관측기는 추정 오차에 대한 외란의 영향을 원하는 만큼 감쇄할 수 있는 특성을 가진다. 또한, 기존의 관측기 연구에서 요구하는 대부분의 강한 제약 조건을 필요로 하지 않는다. 관측기의 이득 행렬은 선형행렬부등식을 이용하여 구할 수 있다. 마지막으로 모의실험을 통하여 제안한 방법의 타당성을 입증하였다.

참 고 문 헌

- [1] R. Marino, "Adaptive observers for single-output nonlinear systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 35, no. 9, pp. 1054-1058, 1990.
- [2] Y. M. Cho, and R. Rajamani, "A Systematic Approach to Adaptive Observer Synthesis for Nonlinear Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 42, no. 4, pp. 534-537, 1997.
- [3] R. Rajamani and J. K. Hedrick, "Adaptive Observers for Active Automotive Suspensions: Theory and Experiment", *IEEE Trans. Contr. Sys. Tech.*, vol. 3, no. 1, pp. 86-93, 1995.
- [4] G. Besancon, "Remarks on nonlinear adaptive observer design", *Systems & Control Letter*, vol. 41, pp. 271-280, 2000.
- [5] B. L. Walcott and S. H. Zak, "State Observation of Nonlinear Uncertain Dynamical Systems",

IEEE Trans. on Automat. Contr., vol. 32, no. 2, pp. 166-170, Feb. 1987.

- [6] C. Edwards and S. K. Spurgeon, "On the Development of Discontinuous Observers", *International Journal of Control*, vol. 59, pp. 1211-1229, 1994
- [7] Y. Xiong and M. Saif, "Sliding mode observer for nonlinear uncertain systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 46, no. 12, pp. 2028-2042, 2001.
- [8] C. P. Tan and C. Edwards, "An LMI approach for designing sliding mode observers", *International Journal of Control*, vol. 74, no. 16, pp. 1559-1568, 2001.
- [9] H. H. Choi and K. S. Ro, "LMI-based sliding-mode observer design method", *IEE Proc.-Contr. Theory & Appl.*, vol. 152, no. 1, pp. 113-115, 2005.

저 자 소 개



이 성 렬(정회원)

2003년 연세대학교 전기전자 공학과 박사졸업.

2003년~2006년 삼성전자 책임연구원

2007년~현재 군산대학교 전자 정보공학부 전임강사

<주관심분야 : 비선형제어 및 응용>