논문 2008-45SC-5-1

변수 불확실성과 제어기 약성을 가지는 이산 특이시스템의 강인 안정화

(Robust Stabilization of Discrete Singular Systems with Parameter Uncertainty and Controller Fragility)

김 종 해*

(Jong Hae Kim)

요 약

본 논문에서는 변수 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템과 곱셈형 섭동의 약성(fragility)을 가지는 제어기에 대한 강인 안정화 기법과 강인 비약성(non-fragile) 제어기 설계방법을 제시한다. 강인 안정화를 만족하는 비약성 제어기가 존재할 조건과 제어기 설계방법 및 제어기의 비약성 척도를 볼록최적화(convex optimization)가 가능한 선형행렬부등식 접근방법을 이용하여 제안한다. 최대의 비약성 척도를 얻기 위하여 구한 제어기 충분조건은 모든 변수의 견지에서 선형행렬부등식으로 변형한다. 따라서, 제안한 강인 비약성 이산 제어기는 특이시스템의 변수 불확실성과 제어기의 약성에도 불구하고 안정성을 보장한다. 마지막으로, 수치예제를 통하여 제안한 알고리듬의 타당성을 확인한다

Abstract

This paper presents not only the robust stabilization technique but also robust non-fragile controller design method for discrete-time singular systems and static state feedback controller with multiplicative uncertainty. The condition for the existence of robust stabilization controller, the admissible controller design method, and the measure of non-fragility in controller are proposed via LMI(linear matrix inequality) approach. In order to get the maximum measure of non-fragility, the obtained sufficient condition can be rewritten as LMI optimization form in terms of transformed variable. Therefore, the presented robust non-fragile controller for discrete-time singular systems guarantees robust stability in spite of parameter uncertainty and controller fragility. Finally, a numerical example is given to show the validity of the design method.

Keywords : Discrete-time singular systems, robust stabilization, controller fragility, linear matrix inequality

I. 서 론

연속시간 시스템의 강인 안정화(robust stabilization) 문제와 더불어 이산시간에서의 강인 안정화 문제는 최근까지도 많은 관심을 가지고 연구되어져 왔다. 하지만, 플랜트의 변수에 대하여 강인성을 가지도록 설계하거나 성능지수를 최적화하도록 설계하는 궤환시스템(feedback system)은 매우 정확한 제어기의 구현이 요구된다. 일반적인 제어기 설계방법은 제어기가 정확하게 구현할 수 있다는 가정하에서 이루어진다. 현장에서의 제어기의 구현문제는 A/D 또는 D/A 컨버터, 반올림 오차(round-off error), 제한 워드 길이(finite word length) 등의 제어기 이득의 변동이 되는 요인이 발생한다. 따라서 제작하는 제어기의 이득변동과 같은 불확실성에도 성능과 안정성을 유지하는 제어기를 설계해야 한다. 또한, 정확한 제어기의 구현이 가능하다 하더라도 제어기의 이득조정(gain tuning)이 필요하므로 제어기 약성(fragility)에 대한 연구[1~4]가 시작된 이래로 최근까지 많은 연구들이 이루어져 왔다. 하지만 결과가 대부분 연속시간 시스템에 대한 결과이고 이산시간에 대한 비약성(non-fragile) 제어기 설계에 대한 연구결과는

* 정회원, 선문대학교 전자공학부
(Division of Electronic Eng., Sun Moon University)
접수일자: 2008년4월8일, 수정완료일: 2008년8월28일

미비한 상태이다. 또한, 이산시간 특이시스템에 대한 강인 안정화를 만족하는 강인 비약성 제어기 설계 알고리듬에 대한 결과는 없는 실정이다.

기존의 상태공간 모델을 가지고는 해결하기 어려운 특이시스템에 대한 해석과 설계방법은 특이시스템의 특별한 성질들로 인하여 대규모 시스템, 특이 섭동이론, 제약적 기계시스템 등에 광범위하게 적용되어지기 때문에 최근 특이시스템에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 또한, 연속시간 특이시스템[5~8]에 대한 연구결과 뿐만 아니라 이산시간 특이시스템[9~12]에 대한 안정화 문제와 제어기 설계방법에 대한 연구가 최근까지 관심사가 되고 있다.

Fang 등[9]은 변수 불확실성을 가지는 이산 특이시스템에 대한 강인 안정화 해석과 제어기 설계에 대한 문제를 행렬부등식 접근방법으로 제시하였다. 하지만, 구하고자 모든 변수에 대하여 최적화 문제의 조건을 구하지 않으므로 모든 변수를 한 번에 구할 수 없다. Xu 등[10]은 상태행렬에 시불변(time-invariant) 노옴 유계(norm-bounded)를 가지는 변수 불확실성을 가지는 이산 특이시스템에 대한 강인 안정화 문제를 다루었다. 하지만 다루는 불확실성이 시불변이고, 제어기의 존재조건이 모든 변수의 견지에서 최적화가 되는 조건이 아니라는 단점이 있다. Zhang와 Jia[11]는 일반적으로 이산시간 특이시스템에 대한 제어기 존재조건에서 포함되는 준정부호 조건(semi-definite condition)을 없애고, 선형행렬부등식 측면에서 이산 특이시스템에 대한 제어기 존재 조건을 제시하였다. 또한, 최근에 Wo 등[12]은 시불변 노옴 유계를 가지는 대규모 이산 특이시스템에 대한 강인 제어 문제를 선형행렬부등식 접근 방법으로 제시하였다. 하지만, 불확실성 이산시간 특이시스템에 대하여 제어기의 약성을 고려하는 제어기 설계방법은 없는 실정이다.

따라서 본 논문의 목적은 시변 변수불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템과 곱셈형 섭동(multiplicative uncertainty) 형태의 약성을 가지는 제어기 문제에 대한 강인 안정화를 보장하는 강인 비약성 제어기의 존재조건과 설계방법을 제시하는 것이다. 또한, 기존의 결과들이 최종 제어기를 설계하기 위해서는 몇 가지 변수들을 미리 선정하여야 하는 단점이 있으나 본 논문에서는 구하고자 하는 모든 변수의 견지에서 선형행렬부등식으로 제어기 존재조건과 설계방법을 표현하므로 최적화가 가능하다. 또한, 제어기의 비약성 척도를 제어기 설계와 동시에 계산하여 강인 안정화를 만족하는 제어기의 최대 이득변동을 알 수 있도록 한다. 뿐만 아니라, 기존 특이시스템에서 제어기 설계를 위한 시스템 행렬의 특이치 분해(singular value decomposition)를 하여 시스템의 원래 특성을 상실할 수 있는 단점을 해결하여 시스템 행렬의 분해과정을 거치지 않고 직접 제어기의 존재조건과 설계를 하는 장점도 있다. 또한, 변수 불확실성이 없는 경우에도 제안한 정리로부터 쉽게 유도됨을 보임으로써 제안한 강인 비약성 제어기 설계 알고리듬의 일반성을 보인다.

본 논문에서 사용하는 표기법을 정리한다. $(\bullet)^T$, $(\bullet)^{-1}$, $\deg(\bullet)$, $\det(\bullet)$ 및 $rank(\bullet)$는 $(\bullet)$에 대한 전치(transpose), 역(inverse), 차수(degree), 행렬식(determinant) 및 계수(rank)를 가진다. 그리고 I, R^r 및 $R^{n\times m}$은 적절한 차원(dimensions)을 가지는 단위행렬, $r\times 1$ 차원을 가지는 실수 벡터 및 $n\times m$ 차원을 가지는 실수 행렬을 각각 의미한다.

Ⅱ. 문제 설정

변수 불확실성을 가지는 이산 특이시스템

$$Ex(k+1) = [A + \Delta A(k)]x(k) + Bu(k) \tag{1}$$

을 다룬다. 여기서, $x(k)$ R^n는 상태변수, $u(k)$ R^m는 제어 입력변수, E는 $rank(E) = r \le n$을 만족하는 특이행렬(singular matrix), 그리고 모든 시스템 행렬은 적절한 차원을 가진다. 변수 불확실성은 노옴 유계를 가지는

$$\Delta A(k) = DF(k)H \tag{2}$$

의 형태이다. 여기서, D와 H는 알고 있는 상수행렬이고, $F(k)$는

$$F(k)^T F(k) \le I \tag{3}$$

을 만족하는 모르는 행렬이다. 비록 설계할 제어기의 형태가

$$u(k) = Gx(k) \tag{4}$$

와 같을지라도 구현하는 제어기의 형태를 곱셈형 섭동을 가지는

$$u(k) = (I + \alpha\Phi(k))Gx(k) \tag{5}$$

의 형태로 가정한다. 여기서, G는 제어기 이득(controller

gain), α는 양의 실수, 그리고 $\alpha\Phi(k)G$는 제어기 이득의 변동을 나타낸다. $\Phi(k)$는 유계를 가지는

$$\Phi(k)^T\Phi(k) \le I \tag{6}$$

과 같이 정의한다. 또한, α는 제어기 이득의 변동에 대한 비약성 척도(the measure of non-fragility)를 나타낸다. 변수 불활실성을 가지는 이산 특이시스템 (1)과 약성을 포함하는 제어기 (5)로 구성되는 폐루프시스템은

$$Ex(k+1) = [A + BG + \alpha B\Phi(k)G + \Delta A(k)]x(k) \tag{7}$$

과 같이 주어진다. 따라서, 제어기 설계의 목적은 변수 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템과 제어기 이득의 변동에도 불구하고 비약성 척도인 α의 범위이내에서 강인 안정성을 보장하는 강인 비약성 제어기를 설계하는 것이다.

정의 1[11,12]. $Ex(k+1) = Ax(k)$의 이산시간 특이시스템에 대하여,

(ⅰ) $\det(zE-A)$이 항등적으로(idntically) 영이 아니면 $Ex(k+1) = Ax(k)$는 정규적(regular)이고,

(ⅱ) $rank(E) = \deg[\det(zE-A)]$이고 정규적이면 코잘(causal)이고,

(ⅲ) 정규적이고 $\det(zE-A) = 0$의 모든 근이 단위원 내에 존재하면 안정하다.

또한, 주어진 이산 특이시스템이 정규적, 코잘 및 안정성을 만족하면 이산 특이시스템은 허용가능(admissible)하다라고 정의한다. 다음은 논문의 수식전개를 위하여 사용하는 보조정리들을 소개한다.

보조정리 1[11]. $Ex(k+1) = Ax(k)$이 허용가능하기 위한 필요충분조건은

$$A^T(P - Y^TSY)A - E^TPE < 0 \tag{8}$$

을 만족하는 양의 정부호 행렬(positive-definite matrix) P $R^{n\times n}$와 대칭행렬(symmetric matrix) S $R^{(n-r)\times(n-r)}$가 존재하는 것이다. 여기서, Y^T $R^{n\times(n-r)}$는 $E^TY^T = 0$과 $rank(Y^T) = n-r$을 만족하는 행렬이다.

보조정리 2[12]. 대칭행렬 X의 역행렬이 존재하고, $\epsilon I - X > 0$을 만족하는 양의 상수 ϵ이 존재하면, 아래의 조건

$$\begin{aligned}&[A+\Delta A(k)]^TX[A+\Delta A(k)]\\ &\le A^T[X + X(\epsilon I - X)^{-1}X]A + \epsilon\Delta A(k)^T\Delta A(k)\end{aligned} \tag{9}$$

가 성립한다.

보조정리 3[13]. 임의의 행렬 K_1과 K_2에 대하여, 아래의 수식

$$K_1^TK_2 + K_2^TK_1 \le K_1^TK_1 + K_2^TK_2 \tag{10}$$

을 만족한다.

Ⅲ. 강인 안정화를 위한 비약성 제어

본 절에서는 변수 불확실성을 가지는 이산 특이시스템과 제어기 이득의 변동에도 강인 안정화를 보장하는 강인 비약성 제어기 설계방법을 제시한다. 일반적으로 기존의 논문에서 많이 사용하는 시스템 행렬의 분해를 사용하지 않고 구하려는 모든 변수의 측면에서 볼록최적화가 가능한 선형행렬부등식 접근방법으로 강인 안정화를 보장하는 존재조건과 제어기 설계방법을 제안한다.

정리 1. 변수 불확실성과 제어기 약성을 가지는 이산시간 폐루프 특이시스템 (7)에 대하여, 아래의 행렬부등식

$$\begin{bmatrix} A_G^TXA_G^T + \Lambda & A_G^TX \\ * & X - \epsilon I \end{bmatrix} < 0 \tag{11}$$

을 만족하는 양의 정부호 행렬 P, 대칭행렬 S, 양의 상수 ϵ, α와 제어기 이득 G가 존재하면, 제어기 (4)는 강인 안정화를 만족하는 강인 비약성 제어기이다. 여기서, $*$는 대칭행렬(symmetric matrix)의 주 대각선 아래 놓이는 요소이고 Y는 보조정리 1의 정의와 동일하며 몇 가지 변수는 아래와 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}&X = P - Y^TSY\\ &A_G = A + BG\\ &\Lambda = 2\beta_1\alpha\epsilon G^TG + 2\beta_2\epsilon H^TH - E^TPE\\ &\beta_1 = \|B^TB\|,\ \beta_2 = \|D^TD\|,\\ &\alpha < 1.\end{aligned} \tag{12}$$

증명: 변수 불확실성을 가지는 이산 특이시스템과 곱셈

형 섭동을 가지는 제어기로 구성된 폐루프 시스템 (7)에 대하여 보조정리 1을 이용하면

$$\begin{aligned}&(A_G+\alpha B\Phi(k)G+\Delta A(k))^T\\&\times X(A_G+\alpha B\Phi(k)G+\Delta A(k))-E^TPE<0\end{aligned} \tag{13}$$

의 관계를 가진다. 행렬부등식 (13)에서 왼쪽수식의 첫 번째 항은 보조정리 2를 이용하면 행렬부등식 (13)은

$$\begin{aligned}&A_G^T[X+X(\epsilon I-X)^{-1}X]A_G\\&+\epsilon(\alpha B\Phi(k)G+\Delta A(k))^T(\alpha B\Phi(k)G+\Delta A(k))\\&-E^TPE<0\end{aligned} \tag{14}$$

가 된다. 식 (14)에서, 좌변의 두 번째 항은 식 (3), (6), (12) 및 보조정리 3의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}&\epsilon(\alpha B\Phi(k)G+\Delta A(k))^T(\alpha B\Phi(k)G+\Delta A(k))\\&\leq 2\epsilon\alpha\beta_1G^TG+2\epsilon\beta_2H^TH\end{aligned} \tag{15}$$

로 변형된다. 따라서 식 (14)와 (15)로부터 슈어 여수정리를 이용하면 식 (11)을 얻는다. ■

식 (12)에서 수식전개상 편의를 위하여 α의 변화율을 100% 이내로 $\alpha<1$과 같이 정의한다. 실제 물리적으로 제어기 이득이 100% 이상 변화하는 경우는 원하는 성능과 제어의 목적을 만족하기가 힘든 경우가 많다. 정리 1은 구하고자 하는 변수(P, S, ϵ, α, G)의 측면에서 비선형성을 포함하는 요소가 존재하므로 볼록최적화가 불가능하여 해를 구하기 쉽지 않다. 따라서 본 논문의 목적인 제어기 존재조건과 강안 비약성 제어기 설계방법을 변수치환과 슈어 여수정리를 이용하여 모든 변수의 견지에서 선형행렬부등식 형태로 정리 2에서 제안한다.

정리 2. 변수 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템 (1)과 제어기의 곱셈형 섭동을 가지는 제어기 (5)로 구성되는 폐루프 이산 특이시스템 (7)에 대하여, 구하려는 변수(P, S, ϵ, η)에 대하여 아래와 같은 선형행렬부등식으로 표현되는 최적화문제

Maximize η subjects to

(i)

$$\begin{bmatrix}\Omega_1 & A^TP-A^TY^TSY & A^TPB-A^TY^TSYB & 0\\ * & P-Y^TSY-\epsilon I & 0 & PB-Y^TSYB\\ * & * & \Omega_2 & 0\\ * & * & * & \Omega_2\end{bmatrix}<0 \tag{16}$$

(ii) $\eta-\epsilon<0$ (17)

을 만족하는 양의 정부호 행렬 P, 대칭행렬 S, 양의 상수 ϵ, η가 존재하면, 폐루프 시스템 (7)에 대하여 이산 특이시스템의 변수 불확실성과 제어기 약성에 대하여 강인 안정성을 보장하는 허용가능한 제어기 이득과 비약성 척도는

$$\begin{aligned}&G=-(2\eta\beta_1I+B^TXB)^{-1}B^T(P-Y^TSY)A\\&\alpha=\frac{\eta}{\epsilon}\end{aligned} \tag{18}$$

로 구할 수 있다. 여기서, 몇 가지 변수들은 아래와 같이 정의한다.

$$\Omega_1=A^TPA-A^TY^TSYA-E^TPE+2\epsilon\beta_2H^TH$$

$$\Omega_2=-2\beta_1\eta I-B^TPB+B^TY^TSYB$$

$$\eta=\alpha\epsilon.$$

증명: 행렬부등식 (11)은

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}A^TXA-E^TPE+2\epsilon\beta_2H^TH & A^TX\\ * & X-\epsilon I\end{bmatrix}\\&+\left\{\begin{bmatrix}G^T\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A^TXB\\XB\end{bmatrix}V^{-1}\right\}V\left\{\begin{bmatrix}G^T\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A^TXB\\XB\end{bmatrix}V^{-1}\right\}^T\\&-\begin{bmatrix}A^TXB\\XB\end{bmatrix}V^{-1}\begin{bmatrix}A^TXB\\XB\end{bmatrix}<0\end{aligned} \tag{19}$$

와 같이 되고, 식 (19)는 아래와 같은 등가의 식으로 정리된다.

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}A^TXA-E^TPE+2\epsilon\beta_2H^TH & A^TX\\ * & X-\epsilon I\end{bmatrix}\\&+\begin{bmatrix}\Gamma & G^TB^TX+A^TXBV^{-1}B^TX\\ * & 0\end{bmatrix}\\&+\begin{bmatrix}0\\XB\end{bmatrix}V^{-1}\begin{bmatrix}0\\XB\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}A^TXB\\XB\end{bmatrix}V^{-1}\begin{bmatrix}A^TXB\\XB\end{bmatrix}<0.\end{aligned} \tag{20}$$

여기서, 몇 가지 변수들은 아래와 같이 정의 한다.

$$\Gamma=G^TVG+G^TB^TXA+A^TXBG+A^TXBV^{-1}B^TXA$$

$$V=2\epsilon\alpha\beta_1I+B^TXB.$$

식 (20)에서 좌변의 두 번째 행렬표현은 식 (18)의 제어기 형태에 의하여 영행렬이 된다. 따라서 식 (20)은

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}A^TXA-E^TPE+2\epsilon\beta_2H^TH & A^TX\\ * & X-\epsilon I\end{bmatrix}\\&+\begin{bmatrix}0\\XB\end{bmatrix}V^{-1}\begin{bmatrix}0\\XB\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}A^TXB\\XB\end{bmatrix}V^{-1}\begin{bmatrix}A^TXB\\XB\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{21}$$

$$\leq \begin{bmatrix} A^TXA - E^TPE + 2\epsilon\beta_2 H^T H & A^TX \\ * & X - \epsilon I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^TXB & 0 \\ 0 & XB \end{bmatrix} V^{-1} \begin{bmatrix} A^TXB & 0 \\ 0 & XB \end{bmatrix} < 0 \tag{22}$$

의 관계를 가진다. 따라서 식 (22)는 슈어 여수정리와 $\eta = \alpha\epsilon$으로부터 식 (16)을 얻을 수 있다. 또한, 식 (17)은 식 (12)로부터 얻어진다. ■

참조 1. 정리 2에서는 구하고자 하는 모든 변수의 측면에서 볼록최적화가 가능한 선형행렬부등식으로 표현된다. 그리고 비약성 척도인 α의 최대값을 구하기 위한 최적화문제로 변형한다. 따라서 제안한 강인 비약성 제어기는 변수 불확실성을 가지는 이산 특이시스템과 제어기 이득의 변동에도 강인 안정화를 보장한다.

참조 2. $E = I$인 비특이 시스템에 대한 경우에도 제안한 정리 2의 강인 비약성 제어기 설계 알고리듬은 해를 제시하므로 일반적인 제어기 설계방법이다. 또한, 제어기 존재조건을 구하기 위하여 시스템 행렬을 특이치 분해 방법을 이용하여 전개하여 시스템의 원래 성질을 무시할 수 있으나 본 논문에서 제안하는 알고리듬은 시스템의 분해 없이 직접 모든 변수의 측면에서 선형행렬부등식으로 표현하므로 최적화된 제어기와 비약성 척도를 계산할 수 있다는 장점이 있다.

참조 3. 향후 연구과제로는 모든 시스템 행렬에 변수 불확실성을 가지는 이산 특이시스템과 제어기 약성을 가지는 문제에 대하여 강인 안정성을 보장하는 강인 비약성 제어기를 선형행렬부등식 접근방법으로 설계하는 것이다. 본 논문에서 사용하는 알고리듬을 사용하면 모든 시스템 행렬에 변수 불확실성을 가지는 이산 특이시스템에 대한 강인 비약성 제어기 설계 문제로 쉽게 확장가능하다. 그러나 구하고자 하는 모든 변수의 견지에서 볼록최적화가 가능한 선형행렬부등식을 구하기가 쉽지 않다. 구하고자 하는 변수의 견지에서 최적화가 가능한 문제에 대한 향후 연구가 계속되어져야 한다.

따름정리 1. 변수 불확실성이 없는 이산 특이시스템에 대한 비약성 제어기 설계알고리듬은 정리 1과 정리 2로부터 간단히 아래와 같은 제어기 존재조건과 제어기 설계방법을 얻을 수 있다. 이산시간 특이시스템

$$Ex(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{23}$$

과 제어기의 곱셈형 섭동을 가지는 제어기 (5)로 구성되는 폐루프 이산 특이시스템에 대하여, 구하려는 변수 (P, S, ϵ, μ)에 대하여 아래와 같은 선형행렬부등식으로 표현되는 최적화문제

Maximize μ *subjects to*

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 & A^TP - A^TY^TSY & A^TPB - A^TY^TSYB & 0 \\ * & P - Y^TSY - \epsilon I & 0 & PB - Y^TSYB \\ * & * & \Pi_2 & 0 \\ * & * & * & \Pi_2 \end{bmatrix} < 0 \tag{24}$$

을 만족하는 양의 정부호 행렬 P, 대칭행렬 S, 양의 상수 ϵ, μ가 존재하면, 이산시간 특이시스템 (23)과 제어기 약성에 대하여 강인 안정성을 보장하는 제어기 이득과 비약성 척도는

$$G = -(\mu\beta I + B^TXB)^{-1} B^T(P - Y^TSY)A \qquad \alpha = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \tag{25}$$

로 구할 수 있다. 여기서, 몇 가지 변수들은

$$\Pi_1 = A^TPA - A^TY^TSYA - E^TPE$$

$$\Pi_2 = -2\beta\mu I - B^TPB + B^TY^TSYB$$

$$\beta = \|B^TB\|$$

$$\eta = \alpha^2\epsilon.$$

으로 정의한다.

증명: 정리 1과 정리 2로부터 유사한 과정을 거쳐 얻을 수 있다. 정리 1에서 식 (15)의 불확실성을 다루는 문제에서 식 (23)과 식 (5)로 구성하는 폐루프 시스템의 불확실성으로부터

$$\epsilon(\alpha B\Phi(k)G)^T(\alpha B\Phi(k)G) \leq \epsilon\alpha^2\beta G^TG \tag{26}$$

의 과정을 거치고 여기서는 $\alpha < 1$이라는 수식전개상 편의를 위한 가정이 없어도 제어기의 존재조건이 변수치환($\mu = \alpha^2\epsilon$)과 슈어 여수정리로부터 구하고자 하는 모든 변수의 견지에서 선형행렬부등식으로 표현된다. 정리 1과 정리 2의 과정의 증명과정으로부터 쉽게 유도할 수 있으므로 자세한 증명은 생략한다. ■

III. 예 제

본 절에서는 제어기 설계 알고리듬의 타당성을 확인

하기 위하여 수치예제를 보인다. 변수 불확실성을 가지는 이산 특이시스템

$$\begin{bmatrix}10 & 4 & 2\\5 & 2 & 1\\15 & 4 & 7\end{bmatrix}x(k+1)$$
$$=\left\{\begin{bmatrix}0.5 & 0.2 & 0.3\\0.25 & 0.1 & 0.25\\0.6 & 0.2 & 0.1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.1\\0.1\\0.1\end{bmatrix}F(k)[0.1\ 0.1\ 0.1]\right\}x(k)$$
$$+\begin{bmatrix}1 & 0.5\\0.1 & 0\\0.5 & 1\end{bmatrix}u(k) \tag{27}$$

을 다룬다. 여기서, $rank(E)=2(<3)$를 만족하는 특이행렬이므로 주어진 시스템은 이산 특이시스템이다. 보조정리 1을 만족하는 행렬 $Y=[1-2\ 0]$로 잡으면 정리 2로부터 구하고자 하는 모든 해는 LMI 도구상자 [14]로부터 직접

$$P=\begin{bmatrix}2.1302\times10^8 & -4.2640\times10^8 & -4.8430\\ * & 8.5280\times10^8 & 7.3481\\ * & * & 9.1678\times10^{-1}\end{bmatrix}$$
$$S=2.1320\times10^8$$
$$\epsilon=91.8173$$
$$\eta=13.9666 \tag{28}$$

과 같이 동시에 구할 수 있다. 그리고 비약성 척도는

$$\alpha=\eta/\epsilon=0.1521 \tag{29}$$

와 같이 구한다. 여기서, 비약성 척도인 α의 의미는 제어기 이득이 $\pm15.21\%$의 범위내에서 변동하더라도 이산 특이시스템의 강인 안정화를 보장한다는 것이다. 따라서 허용가능한 강인 비약성 제어기는 식 (18)로부터

$$u(k)=\begin{bmatrix}-0.0390 & -0.0179 & -0.0194\\-0.0234 & -0.0103 & -0.0203\end{bmatrix}x(k) \tag{30}$$

으로 구할 수 있다. 따라서 제안한 허용가능한 강인 비약성 제어기는 이산 특이시스템의 변수 불확실성과 제어기의 곱셈형 섭동의 이득이 변화하더라도 강인 안정성을 보장하는 강인 비약성 제어기이다.

변수 불확실성이 없는 경우의 예제는 추론 1의 정리를 따라 비약성 제어기를 설계할 수 있다. 이산시간 특이시스템

$$\begin{bmatrix}10 & 4 & 2\\5 & 2 & 1\\15 & 4 & 7\end{bmatrix}x(k+1)=\begin{bmatrix}0.5 & 0.2 & 0.3\\0.25 & 0.1 & 0.25\\0.6 & 0.2 & 0.1\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1 & 0.5\\0.1 & 0\\0.5 & 1\end{bmatrix}u(k) \tag{31}$$

을 다룬다. 추론 1의 정리에 따라 LMI 도구상자[14]를 이용하여 해를 구하면

$$P=\begin{bmatrix}2.1320\times10^8 & -4.2640\times10^8 & -3.8266\times10^2\\ * & 8.5279\times10^8 & 5.0789\times10^2\\ * & * & 9.1777\times10^1\end{bmatrix}$$
$$S=2.1320\times10^8$$
$$\epsilon=6.7973\times10^3$$
$$\mu=1.7924\times10^3 \tag{32}$$

와 같이 동시에 구할 수 있고, 비약성 척도와 비약성 제어기는 식 (25)로부터

$$\alpha=\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}=0.5135$$
$$u(k)=\begin{bmatrix}-0.0398 & -0.0188 & -0.0220\\-0.0224 & -0.0100 & -0.0198\end{bmatrix}x(k) \tag{33}$$

으로 구해진다. 여기서, 제어기 약성의 최대변동을 의미하는 α는 변수 불확실성이 있는 식 (29)의 값보다 크다는 것을 알 수 있다. 변수 불확실성이 없는 경우에는 변수 불확실성이 있는 경우보다 큰 범위의 제어기 이득 변동의 변화에도 강인 안정성을 보장함을 알 수 있다. 따라서 제안하는 알고리듬은 비특이 시스템 뿐 만 아니라 변수 불확실성이 없는 이산시간 특이시스템에 대한 비약성 제어기도 직접 구할 수 있는 일반적인 알고리듬이다.

Ⅳ. 결 론

본 논문에서는 제어기에 곱셈형 섭동과 변수 불확실성을 가지는 이산 특이시스템에 대한 강인 안정화를 만족하는 허용가능한 강인 비약성 제어기 설계 알고리듬을 제시한다. 강인 비약성 제어기가 존재할 조건과 제어기 설계방법을 볼록최적화가 가능한 선형행렬부등식으로 표현하므로 구하고자 하는 모든 변수를 동시에 구할 수 있을 뿐 아니라 비약성 척도를 같이 계산할 수 있으므로 제어기 이득의 최대변동에 대한 강인 안정화 정도를 직접 계산할 수 있다. 제안한 강인 비약성 제어기 설계 알고리듬은 변수 불확실성과 제어기 약성이 존재하더라도 이산시간 특이시스템의 강인 안정화를 보장한다.

참 고 문 헌

[1] L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya, "Robust,

fragile, or optimal," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 42, pp. 1098-1105, 1997.

[2] W. M. Haddad and J. R. Corrado, "Resilient dynamic controller design via quadratic Lyapunov bounds," *Proc. Of IEEE Conf. on Dec. and Control*, pp. 2678-2683, 1997.

[3] P. Dorato, C. T. Abdallah, and D. Famularo, "On the design of non-fragile compensators via symbolic quantifier elimination," *World Automation Congress*, pp. 9-14, 1998.

[4] G. H. Yang and J. L. Wang, "Non-fragile H_∞ control for linear systems with multiplicative controller gain variations," *Automatica*, vol. 37, pp. 727-737, 2001.

[5] I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara, and N. Suda, "H_∞ control for descriptor systems: A matrix inequalities approach," *Automatica*, vol. 33, pp. 669-673, 1997.

[6] C. L. Lin, "On the stability of uncertain linear descriptor systems," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 336, pp. 549-564, 1999.

[7] C. H. Fang and F. R. Chang, "Analysis of stability robustness for generalized state-space systems with structured perturbations," *Systems and control Letters*, vol. 22, pp. 109-114, 1993.

[8] S. Xu and C. Yang, "An algebraic approach to the robust stability analysis and robust stabilization of uncertain singular systems," *International Journal of Systems Science*, vol. 31, pp. 55-61, 2000.

[9] C. H. Fang, L. Lee, and F. R. Chang, "Robust control analysis and design for discrete-time singular systems," *Automatica*, vol. 30, pp. 1741-1750, 1994.

[10] S. Xu, C. Yang, Y. Niu, and J. Lam, "Robust stabilization for uncertain discrete singular systems," *Automatica*, vol. 37, pp. 769-774, 2001.

[11] G. Zhang and Y. Jia, "New results on discrete-time bounded real lemma for singular systems: strict matrix inequality conditions," *Proc. of American Control Conference*, pp. 634-638, 2002.

[12] S. Wo, Y. Zou, M. Sheng, and S. Xu, "Robust control for discrete-time singular large-scale systems with parameter uncertainty," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 344, pp. 97-106, 2007.

[13] S. Xu, P. V. Dooren, R. Stefan, and J. Lam, "Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 47, pp. 1122-1128, 2002.

[14] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, The Math Works Inc., 1995.

저 자 소 개

김 종 해(정회원)
1993년 경북대학교
전자공학과 졸업.
1995년 경북대학교 대학원
전자공학과 공학석사.
1998년 경북대학교 대학원
전자공학과 공학박사.
1998년~2002년 경북대학교 센서기술연구소
전임연구원.
2000년~2001년 일본 오사카대학
컴퓨터제어기계공학과 객원연구원.
2002년~현재 선문대학교 전자공학부 부교수
<주관심분야 : 강인제어, 시간지연 시스템 해석 및 제어기 설계, 특이시스템 해석 및 설계, 산업응용제어, 신호처리 등.>