Journal of the Korean Association for Spatial Structures
Vol. 8, No. 4 (통권 32호), pp. 47~55, August, 2008

지오데식 돔의 구조최적화에 대한 연구

A Study on the Structural Optimization for Geodesic Dome

이 상 진* 배 정 은**
Lee, Sang-Jin Bae, Jung-Eun

요 약

이 논문은 지오데식 돔 구조물의 구조최적화에 대한 연구내용과 관련이론 그리고 수치해석결과를 기술하고 있다. 지오데식 돔의 공간 효율성을 알아보기 위해 돔의 기저인 정이십면체의 외피면적과 내부공간의 비율을 계산하고 건축구조물에서 나타나는 다른 입방체의 값과 정량적으로 비교하였다. 지오데식 돔을 형성하기 위한 절차를 세부적으로 정리하고 이를 프로그래밍하여 설계최적화프로그램 ISADO-OPT에 연동하였다. 본 연구에서는 반구 형태의 지오데식 돔이 집중하중에 효율적으로 저항할 수 있는 최적의 부재크기 패턴을 조사하기 위하여 수학적 프로그래밍 기법을 도입하였다. 이때 최소화해야하는 돔 전체 부재의 중량을 목적함수로 이용하고 하중이 가해지는 절점에서 발생하는 변위 값과 각 부재에서 발생하는 응력 값을 허용치 이하로 제한하는 제약조건으로 사용하였다. 목적함수와 주어진 제약조건을 만족하는 최적 설계변수값을 검색하기 위해 설계변수에 대한 목적함수의 민감도 값을 유한차분법을 이용하여 계산하였다. 본 연구에서 기술한 지오데식돔을 위한 설계최적화 기본이론을 바탕으로 도출한 최적 부재패턴은 향후 돔의 최적설계에 기본 벤치마크테스트결과로 유용하게 사용될 것으로 판단된다.

Abstract

This paper deals with basic theories and some numerical results on structural optimization for geodesic dome. First of all, the space efficiency of geodesic dome is investigated by using the ratio of icosahedron's surface area to the internal volume enclosed by it. The procedure how to create the geodesic dome is also provided in systematic way and implemented and utilized into the design optimization code ISADO-OPT. The mathematical programming technique is introduced to find out the optimum pattern of member size of geodesic dome against a point load. In this study, total weight of structure is considered as the objective function to be minimized and the displacement occurred at loading point and member stresses of geodesic dome are used as the constraint functions. The finite difference method is used to calculate the design sensitivity of objective function with respect to design variables. The SLP, SQP and MFDM available in the optimizer DoT is used to search optimum member size patterns of geodesic dome. It is found to be that the optimum member size pattern can be efficiently obtained by using the proposed design optimization technique and numerical results can be used as benchmark test as a basic reference solution for design optimization of dome structures.

키워드 : 지오데식돔, 구조최적화, 설계민감도, 수학적 프로그래밍, 목적함수, 유한차분법

Keywords : Geodesic Dome, Structural Optimization, Design Sensitivity, Mathematical Programming, Objective Function, Finite Difference Method

1. 서 론

최근 활발히 전개되고 있는 건축구조물의 고층화와 대형화는 건설에 사용되는 새로운 재료의 개발, 구조물의 해석기법 그리고 시공법에 대한 새로운 접근방법을 요구하고 있다. 이러한 요구와 더불어 고층화 그리고 대형화된 건축물을 설계하고 건설하기 위해서는 구조시스템에 대한 정확한 이해가 반드시 필요하다는 공감대가 형성되고 있다. 특히 공간구조물의 대형화가 급격히 진전됨에 따라 효율적인 공간창출과 활용에 대한 엄격한 기준 그리고 관련 구조시스템의 저항성능에 대한 정량적인 분석결과가 그 어느 때보다도 절실히 필요한 시점이다. 더 나아가 최적설계 원천기술의 확보[1]가 새로운 대공

* 교신저자, 정회원 · 경상대학교 건축공학과 부교수, Ph.D.
Tel : 055-751-6541 Fax : 055-757-7022
E-mail : lee@gnu.ac.kr
** 경상대학교 건축공학과 계산역학연구실, 초빙연구원

간구조물의 해석과 설계에 있어서 반드시 필요하다는 인식이 점차적으로 확대되고 있다.

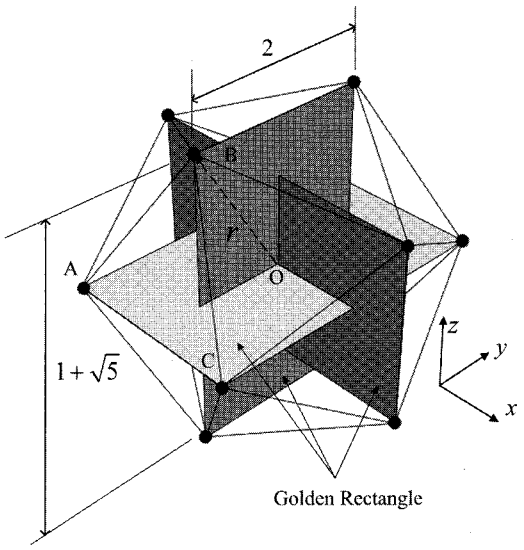
공간구조물의 형식은 매우 다양하나 그 중에서 넓은 공간을 손쉽게 에워쌀 수 있는 구조형식이 돔이다. 우리가 일상에서 흔히 볼 수 있는 돔 구조물의 형태는 반구형인데 본 연구에서는 우리와 친숙하고 공간을 쉽게 형성할 수 있는 반구형의 일종인 지오데식 돔을 형성하는 기법과 돔의 부재의 크기를 최적화 하는 기법에 대한 연구를 수행하고 그 결과를 이 논문에 제시하고자 한다. 먼저 본 연구에서는 지오데식 돔을 형성하는 과정을 체계적으로 정리하고 기술하였다. 또한 지오데식 돔의 공간 효율성을 알아보기 위해 지오데식 돔의 기저인 정이십면체의 외피면적과 정이십면체가 차지하는 내부공간의 비율을 계산하고 다른 입방체의 값과 정량적으로 비교하였다. 지오데식 돔 구조시스템의 효율성을 개선할 수 있는 수학적 프로그래밍 기법을 바탕으로 하는 구조최적화 프로세스를 제시하고 이를 통하여 지오데식 돔에 사용된 부재의 크기최적화를 수행하고자 한다. 이러한 과정을 통하여 지오데식 돔의 설계최적화기법에 대한 성능을 검증하고 새로운 구조시스템을 도출하는데 필요한 기본 참고 해를 제시하고자 한다.

2. 지오데식돔의 형성 및 공간효율성

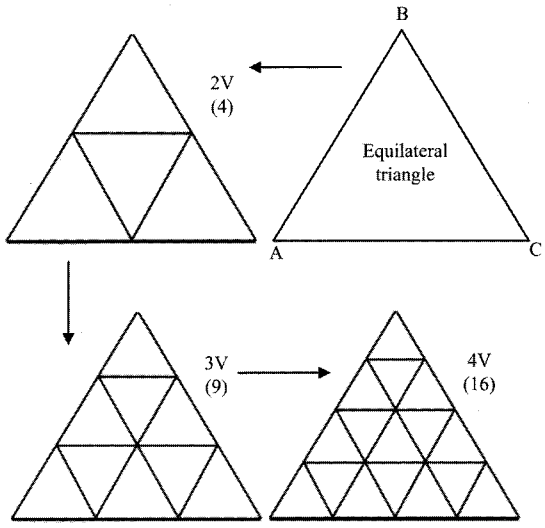
지오데식 돔은 1922년에 Walther Bauersfeld에 의해서 처음 건설된 것으로 알려져 있으며 이후에 Buckminster Fuller에 의해서 돔 건설에 대한 방법론과 제반이론이 세부적으로 정리되었으며 "지오데식 돔"이라는 공식용어를 가지게 되었다.

지오데식 돔은 <그림 1>에 도시된 정이십면체(icosahedron)의 다면체를 이용하여 다음과 같이 형성할 수 있다:

① 정이십면체는 <그림 1>에 도시된 바와 같이 직각좌표계에 준하여 표현될 수 있는데 원점 O를 중심으로 한 변의 길이가 2인 경우 12개 꼭지점의 좌표는 다음과 같다: $(0, \pm 1, \pm \phi)$, $(\pm 1, \pm \phi, 0)$, $(\pm \phi, 0, \pm 1)$. 이때 $\phi = (1+\sqrt{5})/2$는 황금비를 나타낸다. 참고로 <그림 1>에 도시된 정이십면체는 한 변의 길이가 1인 팔면체(octahedron)의 각 변을 황금비로 다시 구획 짓는 방법으로 구할 수 있다.



〈그림 1〉 한 변의 길이가 2인 정이십면체

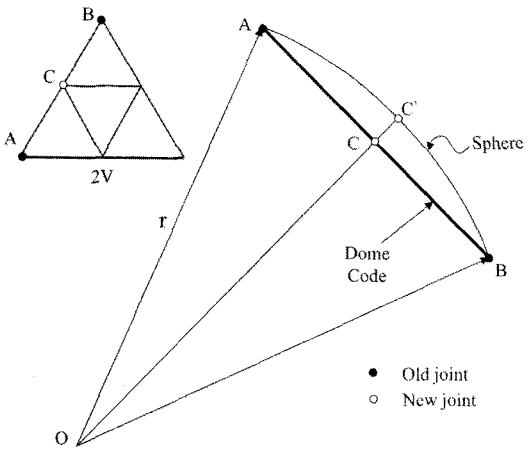


〈그림 2〉 삼각형의 분할차수 αV 분할에 의한 삼각형의 수(n)

② 전 단계에서 정의된 정이십면체를 바탕으로 지오데식 돔을 형성할 수 있는데 그 순서는 다음과 같다. 정이십면체의 외면을 이루고 있는 크기가 같은 20개의 삼각형을 분할한다. 삼각형의 분할 방법은 <그림 2>에 도시된 바와 같이 각 삼각형을 짝수 혹은 홀수로 분할한다. 분할로 생성된 새로운 교차점은 반지름이

$r=\sqrt{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2+1^2}$ 인 구의 표면으로 사상되어 최종적인 지오데식 돔의 꼭지점을 구하게 된다.

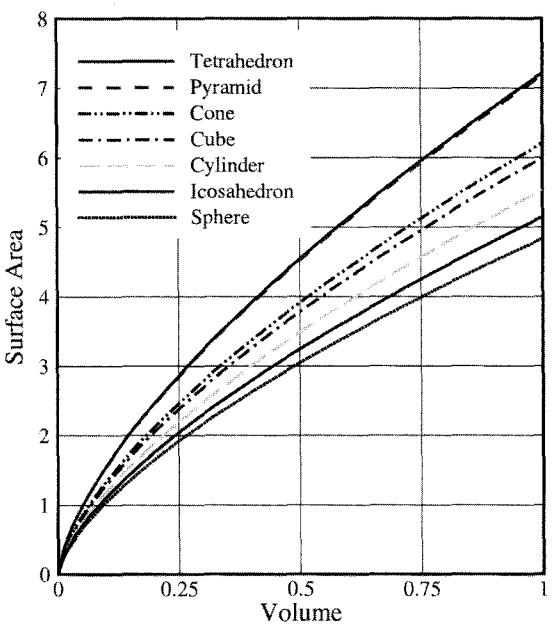
③ <그림 3>에 도시된 바와 같이 삼각형의 분할에 의해서 생성된 새로운 접합부 C를 구에 사상하면 지오데식 돔의 꼭짓점 C'을 구할 수 있는데 사상하는 방법은 <그림 3>에 도시된 바와 같다.



〈그림 3〉 사상법에 의한 지오데식 돔의 절점 생성 방법

지오데식 돔의 특성중의 하나는 정이십면체의 각 삼각형을 짝수로 분할했을 때만 반구를 적절히 표현 할 수 있다는 것이다. 따라서 본 연구에서는 2배수(2V)로 분할 된 지오데식 돔을 해석과 최적화에 이용하고자 한다.

지오데식 돔의 구조적 성능과 최적부재패턴에 대해서 분석하기 전에 돔의 공간효율성을 알아보기 위해 지오데식 돔의 기저인 정이십면체의 외피를 덮는 면적과 이에 따라 생성되는 내부공간의 비를 다른 입방체의 값과 비교하였다. <그림 4>에 도시된 바와 같이 정이십면체의 외피면적/내부공간 비는 구를 제외한 다른 입방체의 비보다는 작게 나타났다. 그리고 정이십면체의 외피면적/내부공간 비는 삼각형의 분할 수가 많아질수록 더 구에 근접한 값을 가지게 되므로 분할 수가 많아질수록 공간 효율성이 더 좋아짐을 알 수 있었다. 다시 말하면 정이십면체는 구에 근접하게 다른 입방체에 비해서 동일한 공간을 창출하기 위하여 적은 외피면적을 필요로 함을 알 수 있었다.



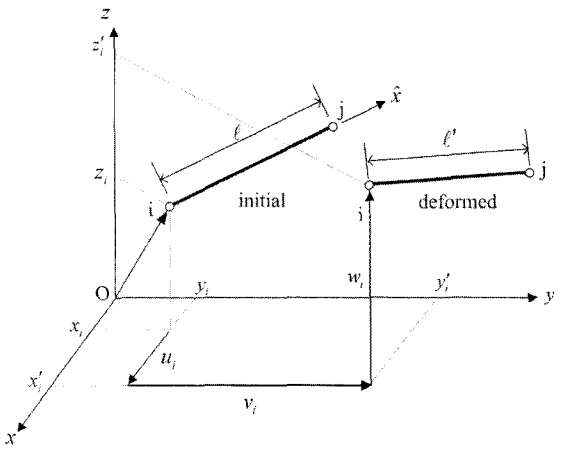
〈그림 4〉 지오데식 돔의 공간효율성

3. 돔의 반응해석에 이용된 유한요소

본 연구에서는 설계최적화과정에서 필요한 반응해석을 위해서 2절점 트러스 요소를 도입하였다.

3.1 국소좌표계에 준하는 요소 강성행렬

두개의 절점 i, j를 가지는 선형 트러스요소는 삼차원공간에서 <그림 5>와 같이 나타낼 수 있다.



〈그림 5〉 2절점 트러스 요소

트러스의 변위가 부재 축을 따라 선형적으로 변화한다고 가정하면 변위장은 선형의 형상함수를 이용하여 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{u}(x)=\hat{u}(\xi)=N_i\hat{u_i}+N_j\hat{u_j} \tag{1-a}$$

$$N_i(\xi)=1-\xi \quad N_j(\xi)=\xi \tag{1-b}$$

$$\xi=\frac{x}{\ell},\ \ 0\le\xi\le 1 \tag{1-c}$$

위의 식을 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\hat{u}=[N_i\ N_j]\begin{bmatrix}\hat{u_i}\\ \hat{u_j}\end{bmatrix}=\mathrm{N}\hat{\mathrm{u}} \tag{2}$$

일차원 트러스요소의 변형률은 다음과 같다.

$$\varepsilon=\frac{d\hat{u}}{dx} \tag{3}$$

따라서 식(1)을 이용하여 식(3)의 변형률-변위 관계식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\varepsilon=\frac{d\hat{u}}{dx}=\left[\frac{d}{dx}\mathrm{N}\right]\hat{\mathrm{u}}=[\mathrm{B}]\hat{\mathrm{u}} \tag{4}$$

여기서 $[B]$는 요소 변형률 · 변위 관계행렬을 나타내며 다음과 같다.

$$\begin{aligned}[\mathrm{B}]&=\frac{d}{dx}[N_i(\xi)\ \ N_j(\xi)]\\ &=\frac{d}{d\xi}[N_i(\xi)\ \ N_j(\xi)]\cdot\frac{d\xi}{dx}\\ &=[-1/\ell\ \ 1/\ell]\end{aligned} \tag{5}$$

여기서 ℓ은 요소의 길이를 나타낸다.

이때 트러스의 응력 · 변형률 관계식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma=E\varepsilon=E\mathrm{B}\hat{\mathrm{u}} \tag{6}$$

여기서 E는 탄성계수를 나타낸다.

트러스 요소 내부의 변형에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}U&=\frac{1}{2}\int_V\sigma^T\varepsilon dV=\frac{1}{2}\int_V(\hat{\mathrm{u}}^T[\mathrm{B}]^TE\mathrm{B}\hat{\mathrm{u}})dV\\ &=\frac{1}{2}\hat{\mathrm{u}}^T\left[\int_V(\mathrm{B}^TE\mathrm{B})dV\right]\hat{\mathrm{u}}\end{aligned} \tag{7}$$

또한 두 절점에 작용하는 힘에 의한 일 에너지는 다음과 같다.

$$V=\frac{1}{2}\hat{f}_i\hat{u}_i+\frac{1}{2}\hat{f}_j\hat{u}_j=\frac{1}{2}\hat{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathrm{f}} \tag{8}$$

에너지 보존의 법칙을 이용하면 트러스 요소내부에서 발생하는 에너지와 힘에 의해서 발생하는 에너지는 같다. 즉 $U=V$이다.

$$\frac{1}{2}\hat{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\left[\int_{\mathrm{V}}([\mathrm{B}]^TE\mathrm{B})dV\right]\hat{\mathrm{u}}=\frac{1}{2}\hat{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathrm{f}} \tag{9}$$

위의 식을 정리하면 다음과 같다.

$$\hat{\mathrm{K}}\hat{\mathrm{u}}=\hat{\mathrm{f}} \tag{10}$$

여기서 요소강성행렬 K는 다음과 같은 방법으로 구하였다.

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{K}}&=\int_V[\mathrm{B}]^TE\mathrm{B}\,\mathrm{d}V\\ &=\int_0^L\begin{bmatrix}-1/\ell\\ 1/\ell\end{bmatrix}E[-1/\ell\ \ 1/\ell]Ad\hat{x}\\ &=\frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix}1&-1\\ -1&1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{11}$$

여기서 A는 요소의 단면적을 나타낸다.

3.2 전체좌표계에 준하는 요소 강성행렬

전절에서 계산된 국부좌표계에 준하는 요소강성행렬은 돔 구조물을 해석하기 위해서 전체 좌표계에 준하는 강성행렬로 변환해야 한다. 국부좌표계에 준하여 발생하는 절점의 변위 $\hat{u}$는 트러스 재축방향으로 하나이나 전체좌표계에 준하여 이를 표현하면 벡터의 분해를 통하여 u, v, w세 개로 변환되게 된다.

이러한 변환을 위해서는 방향코사인을 성분으로 하는 변환매트릭스를 이용하게 되며 전체좌표계에서의 요소강성 매트릭스는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathrm{K}=\frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma & -\alpha^2 & -\alpha\beta & -\alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma & -\alpha\beta & -\beta^2 & -\beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 & -\alpha\gamma & -\beta\gamma & -\gamma^2 \\ -\alpha^2 & -\alpha\beta & -\alpha\gamma & \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ -\alpha\beta & -\beta^2 & -\beta\gamma & \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ -\alpha\gamma & -\beta\gamma & -\gamma^2 & \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

여기서 전체좌표계로 변환하기 위해 이용된 방향코사인 성분 α,β,γ는 다음과 같다:

$$\alpha=\frac{x_j-x_i}{\ell},\beta=\frac{y_j-y_i}{\ell},\gamma=\frac{z_j-z_i}{\ell} \tag{13}$$

그리고 x_i,y_i,z_i는 절점 i의 x,y,z값을 나타낸다.

4. 민감도해석

목적함수에 대한 설계변수의 민감도를 계산하기 위해 범용프로그램에서 일반적으로 사용하는 유한차분법을 이용하였다. 유한차분법[2]은 구조물의 변위, 진동수, 응력의 설계변수에 대한 민감도 값을 구하기 위하여 일차의 차분법을 이용한다. 제 i번째 설계변수 s_i와 관련된 어떤 항 q의 미분 값은 다음의 식을 이용하여 근사값으로 계산할 수 있다.

$$\frac{\partial q}{\partial s_i}\simeq\frac{\triangle q}{\triangle s_i}=\frac{q(s_i+\triangle s_i)-q(s_i)}{\triangle s_i} \tag{14}$$

여기서 i번째 설계변수 s_i는 미세변화량 $\triangle s_i$에 의해 교란되어지며 그에 의한 새로운 값 $q(s_i+\triangle s_i)$가 구해진다. 예를 들면 전체 강성행렬과 전체 하중벡터의 미분 값은 다음 식으로 계산되어진다.

$$\frac{\partial K}{\partial s_i}\simeq\frac{\triangle K}{\triangle s_i}=\frac{K(s_i+\triangle s_i)-K(s_i)}{\triangle s_i} \qquad \frac{\partial f}{\partial s_i}\simeq\frac{\triangle f}{\triangle s_i}=\frac{f(s_i+\triangle s_i)-f(s_i)}{\triangle s_i} \tag{15}$$

여기서 미분된 값은 다음 아래의 식을 이용하여 조합되기 전에 요소별로 계산되어진다.

$$\frac{\triangle K}{\triangle s_i}=A_{e=1}\left(\frac{K^{(e)}(s_i+\triangle s_i)-K^{(e)}(s_i)}{\triangle s_i}\right) \qquad \frac{\triangle f}{\triangle s_i}=A_{e=1}\left(\frac{f^{(e)}(s_i+\triangle s_i)-f^{(e)}(s_i)}{\triangle s_i}\right) \tag{16}$$

여기서, $K^{(e)}$와 $f^{(e)}$는 각각 요소 e의 강성행렬과 하중벡터를 나타내며 $A_{e=1}$는 행렬의 합의 기호를 나타낸다.

5. 최적화문제 정의

최적화문제는 그 적용분야에 상관없이 일반적으로 다음과 같은 표준식[3]으로 정의 될 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } \Psi(s) \\ &\text{Subjected to } g_j(s)\le 0, j=1,m \\ &\qquad\qquad h_k(s)\le 0, k=1,\ell \\ &\qquad\qquad s_i^{\ell}\le s_i\le s_i^{u}, i=1,ndv \end{aligned} \tag{17}$$

여기서 $\Psi(s)$는 목적함수, $g(s)$는 부등제약함수, $h(s)$는 등제약함수, s는 설계변수벡터를 나타낸다. 그리고 s_i^l와 s_i^u는 i번째 설계변수가 가질 수 있는 하한값과 상한값을 나타내며 ndv는 최적화에 사용된 전체 설계변수의 수를 의미한다.

본 연구에서는 최적화문제의 목적함수로는 트러스 건설에 사용된 재료의 전체중량을 사용하고 각 부재에서 발생하는 응력과 절점에서 발생하는 변위가 허용치를 초과하지 않는 제약조건을 채택하였다. 따라서 본 연구에서는 식(17)에 정의된 설계최적화 문제를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\text{Minimize } \Psi(A_e)=\sum_{e=1}^{nel}W_e=\sum_{e=1}^{nel}\rho_e A_e\ell_e \tag{18}$$

$$\text{subjected to } \left|\frac{\sigma_e}{\sigma_{allow}}\right|-1\le 0, \tag{19}$$

$$\left|\frac{u_k}{u_{allow}}\right|-1\le 0$$

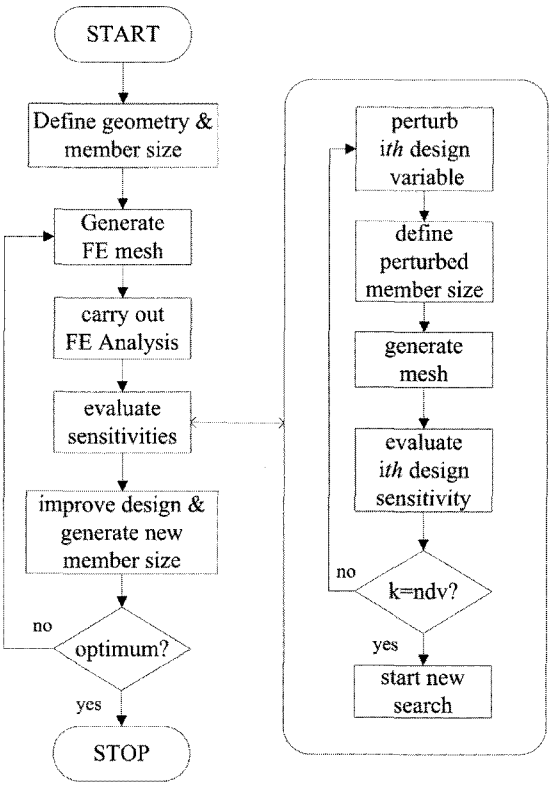
여기서 Ψ는 설계최적화 문제의 목적함수이며 W_e, ρ_e, A_e, ℓ_e는 각각 유한요소 e의 중량, 밀도, 단면적,

부재의 길이 그리고 neℓ은 유한요소의 수이다. σ_e는 요소 e의 응력 값을 나타내고 σ_{allow}는 부재의 허용 응력 값 그리고 u_k는 절점 k에서 발생하는 변위 값을 나타내며 u_{allow}는 허용 변위 값을 나타낸다.

최적화를 수행하기 위해서 DOT[4]에서 제공하는 세 가지 수학적 프로그래밍 알고리즘 Sequential Linear Programming(SLP), Sequential Quadratic Programming(SQP) 그리고 Modified Feasible Direction Method(MFDM)의 세 방식을 이용하여 최적값을 검색하였다.

6. 최적화 알고리듬

본 연구에서 제시한 돔의 최적화는 다음과 같은 다섯 가지의 기본 과정을 거친다.



〈그림 6〉 돔 최적화 기본 알고리듬 및 민감도 해석 절차

① 최적화 문제 정의 : 돔의 초기형상과 부재의 크기를 정의한다. 유한요소해석을 위해서는 하중과 경계조건 등을 준비한다.

② 유한요소망의 생성 : 제2절에서 설명한 돔의 생성절차를 이용하여 돔의 유한요소 망을 생성한다.

③ 유한요소해석 : 제 3절에서 언급한 트러스 요소를 사용하여 유한요소 해석을 수행한다. 이 단계에서 목적함수에 해당하는 돔의 중량과 제약함수인 구조물의 변위값과 응력치를 계산한다.

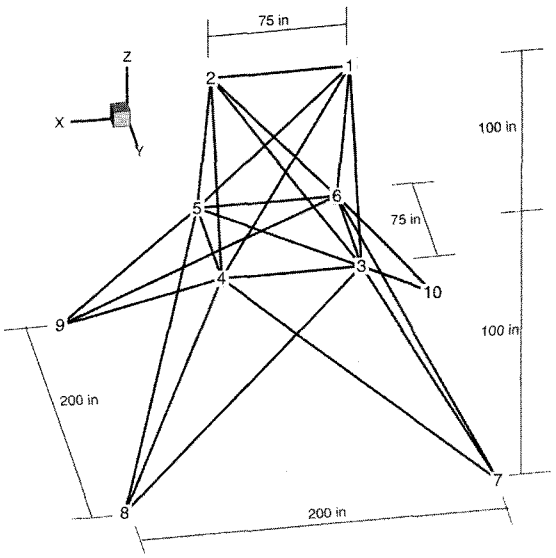
④ 민감도해석 : 민감도 해석은 설계변수의 변화가 구조물의 중량에 끼치는 영향의 정도를 파악하는 단계이다. 본 연구에서는 유한차분법을 사용하여 설계민감도를 계산한다.

⑤ 최적값검색 : 민감도 해석에서 계산된 각 변수에 대한 설계민감도값으로 최적값을 검색한다. 최적값이 구해 질 때까지[2-5]과정을 반복한다.

7. 수치예제

7.1 25개의 부재를 가지는 3차원 트러스

이 예제에서는 본 연구에서 제시한 지오데식돔의 설계최적화기법에 대한 성능을 평가하기 위하여 <그림 7>에 도시된 25개의 부재를 가지는 3차원 트러스[5]에 대한 최적화를 수행하였다.



〈그림 7〉 25개의 부재를 가지는 트러스의 형상

반응해석에는 제3절에서 기술한 2절점 트러스 요소를 이용하였고 트러스를 모두 10개의 절점과 25

개의 유한요소로 모델링하였다. 트러스의 부재는 모두 8개의 설계변수로 연계되었고 정리하면 <표 1>과 같다. 해석에 사용된 탄성계수는 $E=10\times10^6 psi$이고 질량은 $0.1lb/in^3$ 그리고 하중은 절점 1, 2, 3, 6번에 x, y, z방향으로 각각(1.0, -10.0, -10.0), (0.0, -10.0. -10.0), (0.5, 0.0, 0.0), (0.6, 0.0, 0.0) $kips$를 적용하였다. 본 예제에서는 트러스의 중량을 목적함수로 채택하였고 부재의 응력은 인장과 압축영역 모두 $40ksi$를 넘지 못하게 하였으며 트러스의 최상부의 절점 1과 절점 2에서 발생하는 변위가 $\pm0.35in$를 넘지 못하게 하였다. 참고로 이 예제에서는 기존 연구결과와 비교를 용이하게 하기 위하여 기존의 연구결과에서 사용한 단위를 그대로 이용하였다.

〈표 1〉 최적화에 사용한 부재의 연계

설계변수	부재연결 (절점-절점)
1	1-2
2	1-4, 2-3, 1-5, 2-6
3	2-5, 2-4, 1-3, 1-6
4	3-6, 4-5
5	3-4, 5-6
6	3-10, 6-7, 4-9, 5-8
7	3-8, 4-7, 6-9, 5-10
8	3-7, 4-8, 5-9, 6-10

<표 2>에는 본 예제에서 사용한 설계변수의 초기값, 상한치, 하한치 그리고 세 가지의 수학적인 프로그래밍 기법 MDFM, SLP, SQP를 이용하여 구한 최적값을 기술하였다.

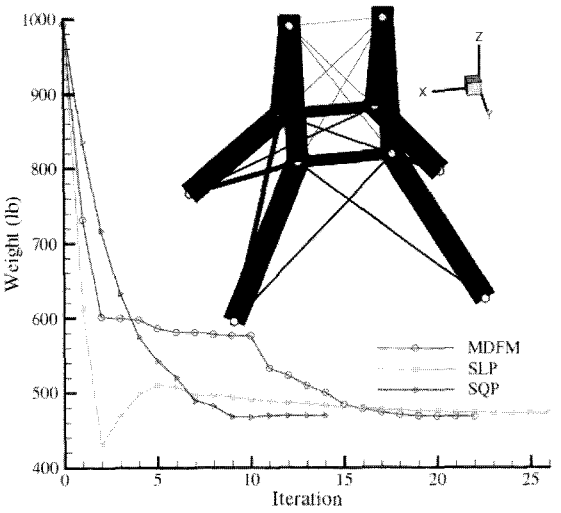
〈표 2〉 초기 설계변수값과 및 정규화된 목적함수값

i	s_i^o	s_i^ℓ	s_i^u	MFDM	SLP	SQP
1	0.25	0.01	5.0	0.0196	0.0144	0.0204
2	0.25	0.01	5.0	0.0769	0.0957	0.0768
3	0.25	0.01	5.0	3.6266	3.5357	3.6297
4	0.25	0.01	5.0	0.0100	0.0100	0.0100
5	0.25	0.01	5.0	1.9571	1.8894	1.9516
6	0.25	0.01	5.0	0.7779	0.7794	0.7743
7	0.25	0.01	5.0	0.1787	0.1849	0.1802
8	0.25	0.01	5.0	3.9051	3.9700	3.9071
$\bar{\Psi}(s)$	-	-	-	0.4702	0.4703	0.4702

* 구조물의 초기중량 : Ψ^o=991lb

** $\bar{\Psi}=\Psi/\Psi^o$: 정규화된 구조물의 중량

<그림 8>에는 최적화 이력값과 최적부재패턴을 함께 도시하였다. <그림 8>에 도시된 바와 같이 세 가지 수학적 프로그래밍 기법으로 구한 최종 중량값은 거의 같은 값으로 나타났으나 전체적인 반복계산의 이력을 보면 SQP가 가장 안정적인 기법으로 나타났다.

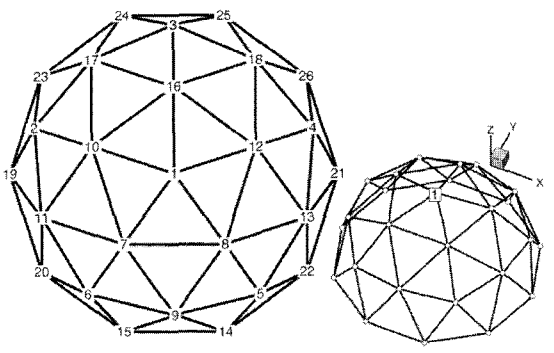


〈그림 8〉 25부재 트러스 설계최적화 이력값

7.2 지오데식 돔

지오데식 돔을 생성하기 위하여 제2절에서 기술한 방식을 이용하였으며 이 예제에서는 <그림 9>에 도시된 바와 같은 2배수(2V)로 분할된 반구 형태의 지오데식 돔을 이용하였다.

돔을 생성할 때의 황금비는 ϕ=50(1+$\sqrt{5}$) in를 사용하였다. 지오데식 돔의 최적 부재패턴을 도출하기 위하여 구조물의 대칭성을 이용하여 돔의 부재



〈그림 9〉 2V 지오데식 돔 (좌)xy평면, (우)3차원

를 모두 7개의 설계변수로 연계하였고 정리하여 <표 3>에 기술하였다.

〈표 3〉 최적화에 사용된 부재의 연계(7개의 설계변수)

설계변수	부재연결 (절점-절점)
1	1-7, 1-8, 1-10, 1-12, 1-16
2	7-8, 8-12, 12-16, 10-16, 7-10
3	7-11, 10-11, 10-17, 16-17, 16-18 12-18, 12-13, 8-13, 8-9, 7-9
4	10-2, 16-3, 12-4, 8-5, 7-6
5	2-11, 11-6, 6-9, 9-5, 5-13 13-4, 4-18, 18-3, 3-17, 17-2
6	2-19, 19-11, 11-20, 20-6, 6-15 15-9, 9-14, 14-5, 5-22, 22-13 13-21, 21-4, 4-26, 26-18, 18-25 25-3, 3-24, 24-17, 17-23, 23-2
7	15-14, 14-22, 22-21, 21-26, 26-25 25-24, 24-23, 23-19, 19-20, 20-15

반응해석에 사용된 탄성계수는 $E=10\times10^6 ksi$이고 질량은 $0.1 lb/in^3$ 그리고 하중은 절점 1번에 집중하중을 가하였다. 본 예제에서는 돔의 중량을 목적함수로 채택하였고 부재의 응력은 인장과 압축영역 모두 $30 ksi$를 넘지 못하게 하였으며 트러스의 최상부의 절점 1에서 발생하는 변위가 $\pm 0.25in$를 넘지 못하게 하였다. 전절의 검증예제에서와 마찬가지로 세 가지의 수학적인 프로그래밍기법을 최적값 검색에 사용하였다.

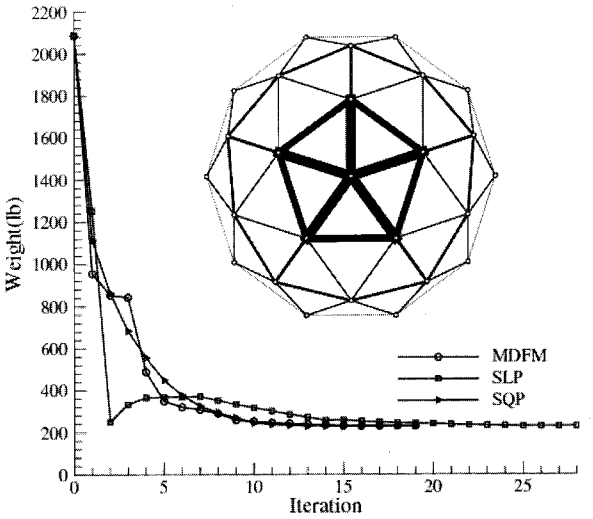
<표 4>는 설계변수의 초기값과 하한치와 상한치 그리고 각 최적화 검색알고리즘에 따른 최적화 결과를 기술하고 있으며 <그림 10>은 최적화 반복계산에 대한 목적함수의 이력값을 나타내고 있다. 세 가지 최적화 검색방법 모두가 초기중량의 89%정도 감소한 최적값을 도출하였다.

〈표 4〉 초기 설계변수값과 및 정규화된 목적함수값

i	s_i^o	s_i^ℓ	s_i^u	MFDM	SLP	SQP
1	0.25	0.12	0.5	1.4817	1.5586	1.5452
2	0.25	0.12	0.5	0.9924	0.9984	0.9975
3	0.25	0.12	0.5	0.1281	0.1379	0.1374
4	0.25	0.12	0.5	0.4654	0.3805	0.3868
5	0.25	0.12	0.5	0.3095	0.3066	0.3105
6	0.25	0.12	0.5	0.1345	0.1289	0.1297
7	0.25	0.12	0.5	0.0100	0.0100	0.0100
$\Psi(s)$	-	-	-	0.1095	0.1093	0.1094

* 구조물의 초기중량 : Ψ^o=2086lb

**$\bar{\Psi}=\Psi/\Psi^o$: 정규화된 구조물의 중량



〈그림 10〉 지오데식 돔의 최적화 이력

최적화로 구해진 부재의 크기 패턴은 집중하중이 가해지는 절점과 연결된 부재가 매우 두꺼워 졌고 집중하중이 가해지는 절점에서 떨어진 부재는 하중이 가해지는 절점에 연결된 부재에 비해 비교적 두께가 작게 계산되어 졌다. 이러한 결과는 하중의 직접적 영향 정도와 하중에 저항하는 부재의 수와 관련되었다고 할 수 있다.

8. 결 론

본 연구에서는 수학적 프로그래밍 기법을 바탕으로하는 지오데식 돔 구조물의 설계최적화기법을 제시하고 이를 2배수(2V)로 분할된 반구형 지오데식 돔에 적용한 뒤 다음과 같은 결론을 도출하였다.

- 본 연구에서 개발한 지오데식 돔의 유한요소망 자동생성기를 통하여 돔과 같은 이산화된 구조물의 최적화에는 유한요소망 자동생성기의 개발과 역할이 매우 중요한 것으로 나타났으며 공간구조물의 타입별로 이러한 개발이 진행되어야 할 것으로 판단된다.
- 2배수(2V)로 분할된 지오데식돔의 최적화를 위해 본 연구에서는 부재 연계를 통하여 설계변수를 감소시켰으며 이를 통하여 부재수가 많은 돔

일수록 적절한 부재 연계전략이 필요한 것으로 판단된다. 특히 이러한 연계전략의 성공을 위해서는 돔의 구조시스템별 특성분석이 먼저 선행되어야 할 것으로 판단된다.

- 본 연구에서는 MFDM, SLP, SQP와 같은 세 가지 수학적 프로그래밍 기법을 이용하여 3차원 트러스와 지오데식 돔의 중량을 최소화한 결과로부터 세 가지 검색기법 모두 최종 중량은 유사하게 도출되었으나 최적화 이력 및 수렴과정은 SQP가 더 유용한 것으로 나타났다.
- 지오데식돔의 최적화를 위해서 개발된 지오데식돔 생성기는 설계최적화에 매우 유용한 것으로 나타났으나 유사 돔에 대한 형상최적화를 위해서는 범용의 기하학적 모델을 바탕으로 하는 유한요소생성기가 필요할 것으로 판단된다.

본 연구를 통하여 제시된 지오데식돔의 설계최적화 기법은 다양한 형태의 돔 구조물에도 유사하게 적용될 수 있을 것으로 판단된다. 그러나 본 연구에서 제시한 방법을 공간구조물의 형상최적화에 적용하기 위해서는 이산화된 구조물을 연속체 구조물과 같은 형식으로 상호 변환하여 표현할 수 있는 기하학적 모델에 대한 연구가 선행되어야 할 것으로 사료된다.

감사의 글

본 연구는 건설교통부가 출연하고 한국건설교통기술평가원에서 위탁 시행한 첨단도시개발사업비로 수행되었음(과제번호: C106A1030001-06A0503 00120).

참고문헌

1. Lee, S.J. and Hinton, E., "Dangers inherited in shells optimized with linear assumptions," Computers and Structures, Vol. 78, 2000, pp. 478-486.
2. Haftka R.T. and Adelman, H.M., "Recent developments in sensitivity analysis," Structural Optimization, Vol. 1, 1989, pp. 137-151.
3. Vanderplaats, G. N., Numerical Optimization Techniques for Engineering Design, McGraw-Hill, 1984, p. 9.
4. DoT manual VMA Engineering, 1996.
5. Rajeev, S. and Krishnamoorthy, C.S. "Discrete optimization of structures using genetic algorithms," J. of Structural Engineering, Vol. 118, No. 5, 1992, pp. 1233-50
6. Kripka, M. "Discrete Optimization of Truses by Simulated Annealing," J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng., Vol. 26, No. 2, 2004, pp. 170-173.

접수일자 : 2008년 4월 12일
심사완료일자 : 2008년 7월 29일