

구배법 알고리즘에 의한 슬래브축열의 최적제어 해석

정재훈[†]

호서대학교 건축공학과

An Analysis of the Optimal Control of Air-Conditioning System with Slab Thermal Storage by the Gradient Method Algorithm

Jae-Hoon Jung[†]

Department of Architectural Engineering, Hoseo University, Chungnam 336-795, Korea

(Received May 27, 2008; revision received July 7, 2008)

ABSTRACT: In this paper, the optimal bang-bang control problem of an air-conditioning system with slab thermal storage was formulated by gradient method. Furthermore, the numeric solution obtained by gradient method algorithm was compared with the analytic solution obtained on the basis of maximum principle. The control variable is changed uncontinuously at the start time of thermal storage operation in an analytic solution. On the other hand, it is showed as a continuous solution in a numeric solution. The numeric solution reproduces the analytic solution when a tolerance for convergence is applied severely. It is conceivable that gradient method is effective in the analysis of the optimal bang-bang control of the large-scale system like an air-conditioning system with slab thermal storage.

Key words: Slab thermal storage(슬래브 축열), Optimal bang-bang control(최적뱅뱅제어), Gradient method(구배법), Analytic solution(해석해), Numeric solution(수치해)

기 호 설 명			
c_p	: 용적비열 [$J/m^3 \cdot K$]	θ	: 온도 [$^{\circ}C$]
g	: 열공급을 나타내는 단위계단함수 [-]	λ	: 열전도율 [$W/m \cdot K$]
K	: 열관류율 [$W/m^2 \cdot K$]		하첨자
n	: 환기횟수 [$1/s$]	a	: 공기
Q	: 취출풍량 [m^3/s]	c	: 천정
S	: 면적 [m^2]	f	: 바닥
u	: 공급열량 [W]	fp	: 바닥슬래브 플레넘측 표면
V	: 용적 [m^3]	fr	: 바닥슬래브 실내측 표면
	그리스 문자	ip	: 플레넘 내측
α	: 열전달률 [$W/m^2 \cdot K$]	ir	: 짐무실 내측
		o	: 실외
		p	: 플레넘
		r	: 짐무실
		sa	: 취출공기
		w	: 벽체

[†] Corresponding author

Tel.: +82-41-540-5775; fax: +82-41-540-5778

E-mail address: jungjh@hoseo.edu

1. 서 론

열용량이 비교적 큰 바닥슬래브를 축열체로 하는 슬래브축열은 하절기 및 동절기의 최고부하사감, 심야전력이용에 유효하다.⁽¹⁻²⁾ 또한, 슬래브축열 공조시스템은 바닥슬래브를 축열체로 하기 때문에 초기비용을 절감할 수 있으며, 복사열에 의한 열적 쾌적감도 기대할 수 있다.

반면, 슬래브축열을 포함한 각종 축열시스템은 운전에 따른 에너지소비, 외기로의 열손실 등으로 인해 효과적인 축열을 위하여 열손실과 비용 등을 고려하여 적절하게 운전할 필요가 있다.

이러한 배경 가운데 선행연구⁽³⁾에서는 슬래브축열의 최적제어에 대하여 설정실온으로부터의 실온편차의 2승과 제거열량의 1승(절대치)의 합을 최소화 하는 평가기준 하에, 최적제어이론인 최대원리⁽⁴⁾에 기초하여 검토하였다. 열원기기 및 공조기의 용량을 고려하여 공급열량에 상·하한의 제약조건을 설정했을 경우에 대하여 검토하였다.

최대원리는 비선형 및 구속조건이 주어지는 경우에도 적용할 수 있는 최적제어이론이나, 다수의 격자점으로 표현되는 대규모 시스템의 경우가 이론에 의한 해법은 극히 곤란하다. 이와 같은 경우에 용이하게 계산할 수 있는 수단으로 사용되는 것이 반복계산에 의한 수치해석이다.

본 논문에서는 최적제어문제를 푸는 수치계산법의 하나로 개발된 구배법에 의한 해법을 검토한다. 우선, 제 2장에서는 일반적인 구배법에 대하여 서술한 후, 제어변수에 상하한의 제약이 있을 경우에 사용되는 알고리즘 중 일례를 소개한다. 제 3장에서는 슬래브축열 공조시스템을 정식화한 후, 선행연구⁽³⁾와 동일한 계산예제를 구배법에 의한 최적제어문제로 정식화한다. 마지막으로 제 4장에서는 이상의 구배법 알고리즘에 의해 구해진 수치해를 선행연구에서 얻은 최대원리에 의한 해석해와 비교하여, 수치해의 특징 및 구배법의 유효성 등에 대하여 고찰한다.

2. 구배법의 알고리즘

시스템의 상태가 다음과 같이 주어질 때,

$$\dot{x}(t) = f\{x(t), u(t)\}, \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

다음의 평가함수를 최소로 하는 $u^o(t)$ 를 구하는 것을 목적으로 한다.

$$J = F\{x(t_f)\} + \int_{t_0}^{t_f} f_0\{x(t), u(t)\} dt \quad (2)$$

여기서, t_0, t_f 는 제어의 최초 및 최종시간이다. x 는 n 차원 상태변수 벡터, u 는 r 차원 제어변수 벡터이며, f, F, f_0 가 각 변수에 대하여 연속미분 가능할 때, 최적제어입력 $u^o(t)$ 를 구하는 일반적인 구배법의 알고리즘은 다음과 같다.

2.1 일반적인 경우⁽⁵⁾

스텝 1 : $k=0$ 으로 한다. 최적제어입력 추정함수 $u_k(t), t \in [t_0, t_f]$ 를 선택한다. 여기서 첨자 k 는 반복횟수를 나타낸다.

스텝 2 : 식(1)로부터 $x_k(t) = x(t; u_k)$ 를 계산한다.

스텝 3 : 최적성의 필요조건으로부터 공(共)상태 벡터 $p(t) = [p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)]^T$ 를 도입하여 해밀턴함수 $H(t, x, u, p)$ 를

$$H(t, x, u, p) = f_0(t, x, u) + p(t)f^T(t, x, u) \quad (3)$$

라 하면, 오일러 방정식의 횡단성 조건으로부터

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -f_{0x}(t, x, u) \\ &\quad - f_x^T(t, x, u)p(t), \\ p(t_f) &= -\frac{\partial F\{x(t_f)\}}{\partial x} \end{aligned} \quad (4)$$

가 된다. 식(4)로부터 공분산벡터 $p_k(t) = p(t; u_k)$ 를 계산한다. 이때 종단(終端)조건을 사용하여 $t = t_f$ 에서 $t = t_0$ 까지 역시간으로 해를 구한다.

스텝 4 : 평가함수 J 의 $u(t)$ 에 대한 구배함수 $g_k(t)$ 를 다음 식을 사용하여 구한다.

$$g(t) = \frac{\partial H(x, u)}{\partial u} \quad (5)$$

$g_k(t) = 0, t \in [t_0, t_f]$ 이라면 $u_k(t)$ 는 최적제어 입력이므로 계산을 종료한다. 그렇지 않으면 다음 스텝으로 간다.

스텝 5 : $J(u_k - \alpha g_k)$ 를 최소로 하는 $\alpha (\alpha > 0)$ 를 직선탐색으로 구해 α_k 라 한다.

스텝 6 :

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) - \alpha_k g_k(t) \quad (6)$$

로 두고, $k = k+1$ 로 하여 스텝 2로 되돌아간다.

2.2 제어변수에 상·하한의 제약이 있는 경우⁽⁶⁾

제어변수 $u(t)$ 가 다음과 같은 구속을 받는다고 하자.

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max} \quad (7)$$

이때, 사영법(射影法)을 이용한 구매법 알고리즘 중 하나를 소개하면 다음과 같다.

스텝 1 : $k=0$ 으로 한다. 허용되는 최적제어 입력의 추정함수 $u_k(t), t \in [t_0, t_f]$ 를 선택한다.

스텝 2 : 식(1)을 풀어 $x_k(t) = x(t; u_k)$ 를 구한다.

스텝 3 : 식(4)를 역시간으로 풀어 $p_k(t) = p(t; u_k)$ 를 구한다.

스텝 4 : 식(5)로부터 $g_k(t)$ 를 계산하여

$$\bar{u}_k = C(u_k - \gamma g_k), s_k = \bar{u}_k - u_k \quad (8)$$

로 둔다. 여기서, $\gamma (\gamma > 0)$ 는 임의로 정하며, $C\{u_i\}(t)$ 는 다음과 같이 상·하한에서 자르기 조작을 하는 clip off 작용소이다.

$$C\{u_i\}(t) = \begin{cases} u_{\min} & (u_{\min} > u_i(t)) \\ u_i(t) & (u_{\min} \leq u_i(t) \leq u_{\max}) \\ u_{\max} & (u_i(t) > u_{\max}) \end{cases} \quad (9)$$

스텝 5 :

$$\left(\int_{t_0}^{t_f} s_k(t)^T s_k(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon \quad (10)$$

을 만족하면 $u_k(t)$ 는 최적제어 입력이므로 계산을 종료한다. 그렇지 않으면 스텝 6으로 넘어간다.

스텝 6 : $J(u_k + \alpha s_k)$ 를 최소로 하는 $\alpha (0 < \alpha \leq 1)$ 를 직선탐색으로 구하여 α_k 라 한다.

스텝 7 :

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \alpha_k s_k(t) \quad (11)$$

로 두고, $k = k+1$ 로 하여 스텝 2로 되돌아간다.

3. 정식화

3.1 슬래브축열 공조시스템의 정식화

슬래브축열 문제로의 정식화는 참고문헌⁽³⁾과 동일하다. 실모델은 Fig. 1과 같으며, 열수지식, 공조운전방식은 다음과 같다.

3.1.1 열수지식

(1) 집무실 공기

$$\begin{aligned} c\rho_a V_r \frac{d\theta_r}{dt} = & (S_w K_w + c\rho_a V_r n)(\theta_o - \theta_r) \\ & + S_f \alpha_{ir} (\theta_{fr} - \theta_r) \\ & + (S_c K_c + c\rho_a Q_r)(\theta_p - \theta_r) + g_r u \end{aligned} \quad (12)$$

(2) 플레넘 공기

$$\begin{aligned} c\rho_a V_p \frac{d\theta_p}{dt} = & S_f \alpha_{ip} (\theta_{fp} - \theta_p) \\ & + (S_c K_c + c\rho_a Q_r)(\theta_r - \theta_p) + g_p u \end{aligned} \quad (13)$$

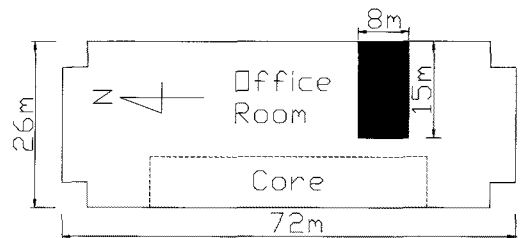


Fig. 1 Plan of typical floor in calculated building.

(3) 바닥슬래브

$$c\rho_f \frac{\partial \theta_f}{\partial t} = \lambda_f \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial x^2} \quad (14)$$

3.1.2 운전방식

(1) 축열시

$$\begin{aligned} Q_r &= 0, \quad g_r = 0, \quad g_p = 1 \\ u &= c\rho_a Q_p (\theta_{sa} - \theta_p) \end{aligned} \quad (15)$$

(2) 공조시

$$\begin{aligned} Q_r &= Q_{r0}, \quad g_r = 1, \quad g_p = 0 \\ u &= c\rho_a Q_r (\theta_{sa} - \theta_p) \end{aligned} \quad (16)$$

3.2 최적제어문제로의 정식화

선행연구⁽³⁾에서와 같이 바닥슬래브를 1격자점으로 간이화한 경우를 생각한다.

평가함수 J 와 제어변수 $u(t)$ 의 구속조건은 다음과 같다.

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} [r_1(\theta_r - \theta_s)^2 + r_2 u] dt \quad (17)$$

$$0 \leq u \leq u_{\max} \quad (18)$$

바닥슬래브에 관한 상태방정식은 참고문헌⁽³⁾으로부터

$$\dot{x}_1 = ax_1 + bu \quad (19)$$

이다. 따라서 해밀턴 함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$H = r_1(a_r x_1 + b_r u - \theta_s)^2 + r_2 u + p_1(a x_1 + bu) \quad (20)$$

공상태방정식은

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -2r_1 a_r (a_r x_1 + b_r u - \theta_s) - ap_1, \\ p(t_f) &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

가 되며, 구배함수 $g(t)$ 는

$$g(t) = \frac{\partial H}{\partial u} = 2r_1 b_r (a_r x_1 + b_r u - \theta_s) + r_2 + bp_1 \quad (22)$$

가 된다.

4. 계산예제 및 고찰

제 3장에서서의 정식화를 기초로 제 2장의 구배법 알고리즘에 의해 해석한 결과를 나타낸다. 계산조건으로서는 평가함수에 있어서의 공급열량의 가중함수 $r_2(t)$ 이의는 모두 참고문헌⁽³⁾과 동일한 조건을 사용하였다. 공급열량에 대한 가중함수 $r_2(t)$ 에 대해서는 식(22)에서 $r_2(t)$ 의 값이 너무 작으면 계산부하가 증가하므로 공조시의 가중 g_2 를 1.0×10^{-4} 으로 하였다. 또한, 축열시의 가중 g_2' 에 대해서는 $g_2' = g_2$ 인 경우와 심야전력을 고려하여 $g_2' = g_2/3.0$ 인 경우를 검토하였다.

수렴 판정에 있어서 본 해석에서는 식(10) 대신 매회 반복 계산할 때마다 평가함수의 값을 구하여 수렴 판정 기준치 ϵ 에 대하여 다음 식을 만족할 때 반복 계산을 종료하는 것으로 하였다.

$$|J_{k+1} - J_k| \leq \epsilon \quad (23)$$

또한, 최적제어입력의 초기추정값 $u_0(t)$ 에 대해서는, 전 시간 영역에 0.0을 사용하였다.

4.1 심야전력 미사용 시

우선, $g_2' = g_2$ 의 경우, 즉 주간과 야간의 전력 요금을 동일한 가중으로 설정했을 때의 공급열량 u 의 최대원리에 의한 해석해와 구배법에 의한 수치해를 Fig. 2에 나타내었다. 구배법에 의한 수치해에 대해서는 수렴 판정기준치 ϵ 을 1.0×10^{-5} 에서 1.0×10^{-10} 까지 변화시켰을 때의 결과를 나타내고 있다. $\epsilon = 1.0 \times 10^{-5}$ 의 경우, 공조시(08:00~22:00)에 있어서의 공급열량은 해석해와 거의 일치하나, 축열시(22:00~08:00)에 있어서는 해석해가 00:53경 장치 최대용량으로 축열운전을 개시하는데 대해, 수치해는 22:00에 약 3,500 W로 축열을 개시한 후, 축열속도를 서서히 높여 08:00에 약 4,100 W로 축열운전을 종료하고 있다. $\epsilon = 1.0 \times 10^{-6}$ 의 경우에는, 22:00에 약 1,900 W로 축열운전을 개시하여, $\epsilon = 1.0 \times 10^{-5}$ 의 경우보다 급속하게 축열속도를 증가시켜 06:35경에는 공급열량이 최대용량인 5,220 W에 달하고 있다. $\epsilon = 1.0 \times 10^{-7}$ 의

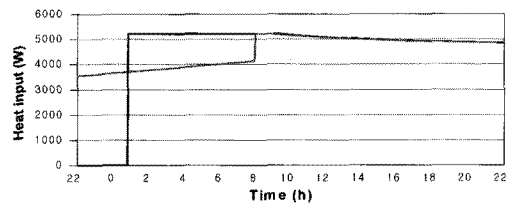
경우에는, 22:50경에 축열운전을 개시하여(혹은, 22:00~22:50까지 최소용량인 $u_{min} = 0$ 으로 축열운전), 급속히 축열속도를 높여 약 4시간 후에는 최대용량에 달하고 있다.

ϵ 을 작게 할수록 수치해는 해석해에 가까워진다. 그러나 수렴 판정 기준치인 ϵ 을 1.0×10^{-10} 까지 작게 하여도 구배법에 의한 수치해와 최대원리에 의한 해석해의 사이에는 편차가 존재한다. 00:53경에 장치 최대용량으로 축열을 개시하는 완전한 해석해를 얻기 위해서는 ϵ 을 0.0으로 해야 하며, 무한횟수의 계산이 필요하게 된다. 해석해의 경우, 00:53경에 u_{min} 에서 u_{max} 으로 불연속적으로 변화하는데 대해, 수치해는 제어변수 u 를 연속함수로 가정하여 해를 구하기 때문이다. 이와 같이 구배법에 의한 수치해의 경우, 제어변수 u 가 u_{min} 에서 u_{max} , 혹은 u_{max} 에서 u_{min} 으로 불연속적으로 변화하는 시간대에 있어서도 연속적인 결과를 나타내며, 수렴 판정 기준치인 ϵ 값을 보다 엄격하게 적용함으로써 해석해와 근사한 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 그러나 ϵ 값이 너무 작을 경우, 그와 더불어 계산부하도 기하급수적으로 증가하므로 이를 고려하여 해의 특징을 파악할 수 있을 정도의 적절한 수렴 판정 기준치를 적용할 필요가 있다.

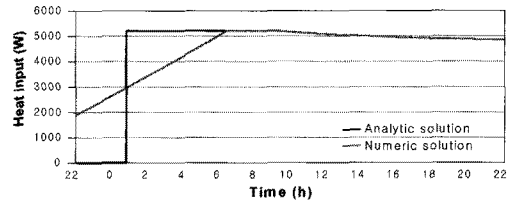
4.2 심야전력 사용 시

야간의 전력요금 비율을 주간의 1/3로 한 경우의 공급열량 u 의 해석해 및 수치해를 Fig. 3에 나타내었다. 구배법에 의한 수치해는 수렴 판정기준치인 ϵ 을 1.0×10^{-3} 에서 1.0×10^{-5} 까지 변화시켰을 때의 결과이다. $\epsilon = 1.0 \times 10^{-3}$ 의 경우, 축열시 및 공조시에 있어서 수치해는 해석해와 상당히 큰 차이를 보이고 있으나, $\epsilon = 1.0 \times 10^{-4}$ 로 작게 하였을 때, 축열시간대 중 06:00~08:00에 최대용량으로 열을 공급하고 있으며, 공조시의 열 공급도 해석해에 근접하고 있음을 알 수 있다. ϵ 을 1.0×10^{-5} 로 하면, 축열시·공조시에 있어서 수치해는 해석해를 거의 대부분 재현하고 있으며, 본 해석에 경우, $\epsilon = 1.0 \times 10^{-7}$ 일 때 수치해는 해석해와 완전히 일치하였다.

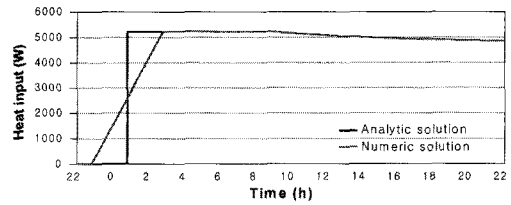
이상의 결과로부터 슬래브축열의 구배법에 의한 정식화는 그 해를 구하는데 있어서 상당히 유효함을 알 수 있다. 다수의 격자점을 가진 대규



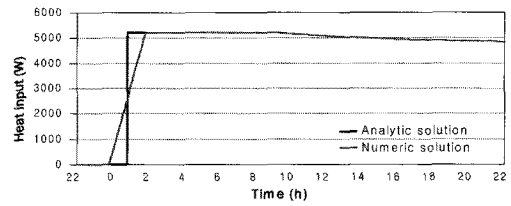
(a) $\epsilon = 1.0 \times 10^{-5}$



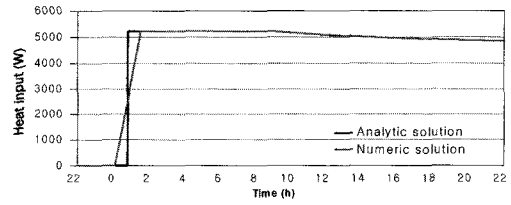
(b) $\epsilon = 1.0 \times 10^{-6}$



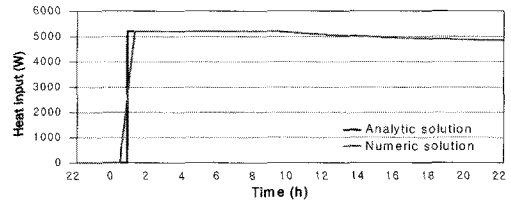
(c) $\epsilon = 1.0 \times 10^{-7}$



(d) $\epsilon = 1.0 \times 10^{-8}$



(e) $\epsilon = 1.0 \times 10^{-9}$



(f) $\epsilon = 1.0 \times 10^{-10}$

Fig. 2 Heat input when the nighttime electric power is not used.

모 시스템의 경우, 최대원리에 의한 최적제어문제 정식화는 가능하나, 그 해법은 일반적으로 거의 불가능하다. 이 같은 경우, 구배법에 의한 수치해법은 계산부하가 증가한다는 문제점을 감안하더라도 매우 유효할 것으로 생각된다. 나아가 선형 2차 형식의 최적제어문제에 있어서도 구배법에 의한 정식화로부터 최적레귤레이터에 의한 해를 재현할 수 있다. 구배법에 의한 수치계산법은 제어변수가 최소치에서 최대치, 혹은 최대치에서 최소치와 같이 ON-OFF 식으로 변화하는 뱅뱅(bang-bang) 제어문제뿐만 아니라 선형 2차 형식의 문제에도 대처할 수 있으며, 해석상의 정식화가 비교적 용이하므로 슬래브축열 및 공조시스템의 최적제어 설계에 있어 유효하게 활용될 것으로 사료된다.

5. 결 론

본 논문에서는 슬래브축열의 뱅뱅형 최적제어 문제를 구배법에 의하여 정식화하였다. 선행 연구의 계산예제에 관하여 구배법의 알고리즘을 사용하여 수치계산에 의한 해를 구하고, 최대원리에 의해 얻어진 해석해와 비교 검토하였다. 그 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 슬래브축열의 뱅뱅형 최적제어문제를 구배법에 의해 정식화하고 수치해석한 결과, 최대원리에 의해 얻어진 플레넘 및 집무실로의 최적열 공급열량의 해석해를 거의 완벽하게 재현할 수 있었다.

(2) 최대원리에 의한 뱅뱅제어 해석해에서는 축열운전 개시 시간 전후에서 제어변수 u 가 불연속적으로 변화하나, 구배법에 의한 수치해에서는 연속적인 해로 표현된다. 수렴판정 기준값을 엄격하게 적용함으로써 해석해와 근사한 해를 얻을 수 있으나, 동시에 계산부하가 증가하므로 이를 고려하여 적절한 수렴판정 기준값을 설정하여 시스템을 해석할 필요가 있다.

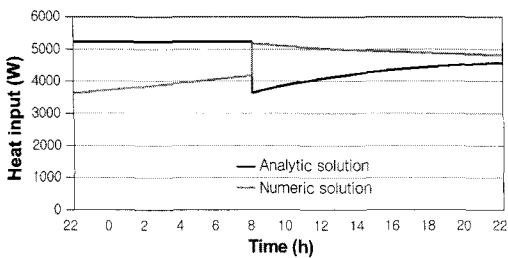
(3) 제어대상 격자점 수가 다수 존재하는 대규모 시스템의 뱅뱅형 최적제어문제에 있어서, 최대원리에 의한 정식화는 가능하나 그 해법은 극히 난해하다. 이 같은 경우, 구배법 알고리즘은 최적 제어입력을 구하는 유효한 수법이 되며, 슬래브축열 및 기타 공조시스템의 최적제어 시스템을 설계하는데 있어 유효하게 활용될 것으로 사료된다.

후 기

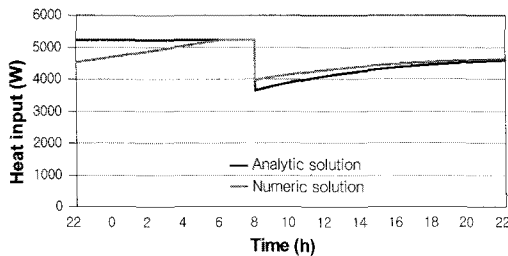
이 논문은 2007년도 호서대학교의 재원으로 학술연구비 지원을 받아 수행된 연구임(20070131).

참고문헌

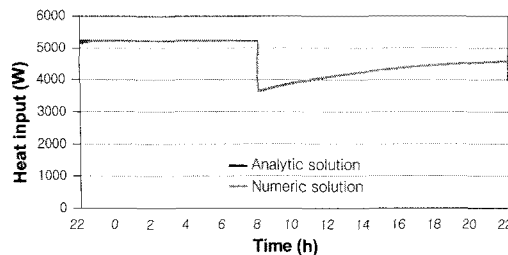
1. Shinkai, K.I., Kasuya, A. and Kato, M.H., 2000, Performance Evaluation of Floor Thermal Storage System, ASHRAE Transactions, Vol. 106, No. 1, pp. 311-316.
2. Jung, J.H. and Shin, Y.G., 2005, An Experimental Study on Thermal Storage Performance of an Air-Conditioning System with



(a) $\epsilon = 1.0 \times 10^{-3}$



(b) $\epsilon = 1.0 \times 10^{-4}$



(c) $\epsilon = 1.0 \times 10^{-5}$

Fig. 3 Heat input when the nighttime electric power is used.

- Slab Thermal Storage, Korean Journal of Air-Conditioning and Refrigeration Engineering, Vol. 17, No. 5, pp. 427-435.
3. Jung, J.H. and Shin, Y.G., 2006, A Study on the Optimal Control Strategy of Air-Conditioning System with Slab Thermal Storage, Results Influenced by the Choice of a Criterion Function, Korean Journal of Air-Conditioning and Refrigeration Engineering, Vol. 18, No. 11, pp. 896-905.
 4. Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V. and Mishchenko, E. F., 1986, L. S. Pontryagin selected works, Vol. 4, The mathematical theory of optimal processes, Gordon and Breach Science Publishers.
 5. The Society of Instrument and Control Engineers, 1983, Optimal Control Handbook, Basic edition, Ohmsha, Ltd.
 6. Shimizu, K. T., 1994, Optimal Control-Theory and Algorithms, Corona Publishing Co., Ltd.