

## 분할격자체계를 이용한 천수흐름 수치모형의 개발

### Development of a Numerical Model of Shallow-Water Flow using Cut-cell System

김형준\* · 이승오\*\* · 조용식\*\*\*

Kim, Hyung-Jun · Lee, SeungOh · Cho, Yong-Sik

#### Abstract

Numerical implementation with a Cartesian cut-cell method is conducted in this study. A Cartesian cut-cell method is an easy and efficient mesh generation methodology for complex geometries. In this method, a background Cartesian grid is employed for most of computational domain and a cut-cell grid is applied for the peculiar grids where the flow characteristics are changed such as solid boundary to enhance the accuracy, applicability and efficiency. Accurate representation of complex geometries can be obtained by using the cut-cell method. The cut-cell grids are constructed with irregular meshes which have various shape and size. Therefore, the finite volume method is applied to numerical discretization on a irregular domain. The HLLC approximate Riemann solver, a Godunov-type finite volume method, is employed to discretize the advection terms in the governing equations. The weighted average flux method applied on the Cartesian cut cell grid for stabilization of the numerical results. To validate the numerical model using the Cartesian cut-cell grids, the model is applied to the rectangular tank problem of which the exact solutions exist. As a comparison of numerical results with the analytical solutions, the numerical scheme well represents flow characteristics such as free surface elevation and velocities in x-and y-directions in a rectangular tank with the Cartesian and cut-cell grids.

**Key words** : shallow-water equations, cut-cell method, finite volume method, HLLC approximate Riemann solver, TVD-WAF method

#### 요 지

본 연구는 Cartesian 격자망을 기본으로 하여 복잡한 지형을 위한 격자를 간편하고 효율적으로 생성할 수 있는 기법인 분할 격자체계를 제안하고자 한다. 분할격자기법은 전반적인 흐름영역의 격자는 균일한 크기의 Cartesian 격자로 표현하지만 수치모형의 정확성, 적용성 및 효율성을 증대시키기 위하여 흐름의 특성이 변하는 격자를 분할하여 처리하는 기법이다. 분할격자체계에 의한 격자망은 다양한 크기 및 형상을 지니게 되므로, 유한체적기법을 적용하여 복잡한 흐름영역을 위한 수치모형을 구성한다. HLLC Riemann 근사해법을 이용하여 지배방정식을 이산화하였으며, 수치해의 안정성을 기하기 위하여 TVD-WAF기법을 적용하였다. 분할격자체계를 이용한 수치모형을 검증하기 위하여 해석해가 존재하는 사각형수조의 자유수면흐름을 모의하였다. 해석해와 수치모의 결과를 비교하여 본 연구에서 제안된 기법이 균일격자 및 분할격자체계에서 자유수면변위 및 x-축 및 y-축 방향의 유속을 정확히 모의함을 확인하였다.

**핵심용어** : 천수방정식, 분할격자기법, 유한체적법, HLLC Riemann 근사해법, TVD-WAF기법

#### 1. 서 론

하천의 흐름을 수치모의함에 있어서, 복잡한 지형을 표현할 수 있는 격자체계의 생성은 수치모의 결과의 정확성에 매우 큰 영향을 미친다. 다양한 격자생성 기법을 통하여 자연상태의 불규칙한 지형을 표현하는 기법이 연구되고 있음에도 불구하고, 아직까지 쉽고 효율적인 격자생성기법에 대한 연구가 더욱 필요한 단계이다. 간편하고 빠르게 구성할 수 있는 균일한 크기의 격자망을 이용한 구조격자의 단점을 보완하기 위하여 다각도의 연구가 진행되었다. 다양한 크기의 구조격자

를 중첩하여 생성한 multi-block기법, 직교좌표계의 지배방정식을 곡선좌표계로 변환하고 타원형 방정식을 이용하여 생성된 직교격자망을 사용하는 곡선좌표계의 수치기법, 불균일 다각망을 사용한 비구조 격자체계의 수치격자를 이용한 적분형의 수치기법 등이 그 연구결과이다. 이러한 기존의 기법은 복잡한 이산화방정식을 갖거나, 격자망을 구성하기 위하여 필요한 복잡한 과정으로 인해 많은 노력과 시간을 소요하게 된다(Yang 등, 2000). 본 연구에서는 간단한 정보를 통하여 정확하고 효율적으로 수치격자를 생성하고 수치모형을 적용할 수 있는 기법을 제안하고자 한다.

\*정회원 · 한양대학교 일반대학원 토목공학과 박사수료(E-mail : john0705@hanyang.ac.kr)

\*\*정회원 · 홍익대학교 공과대학 건설도시공학부 전임강사

\*\*\*정회원 · 한양대학교 공과대학 도시건설환경공학부 교수 (교신저자)

국내에서 천수방정식의 수치해석에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있다. 이종욱과 조용식(2001)은 TVD기법을 이용하여 2차원 천수방정식을 해석함으로써 댐붕괴파를 수치모의하였으며, 윤태훈 등(2002)은 Roe의 기법과 경사제한자를 적용하여 댐붕괴파가 지류에 미치는 영향을 연구하였다. 전정숙 등(2003)은 HLLC Riemann 근사해법 TVD-WAF기법을 적용하여 불연속적인 천수흐름을 모의하여 해석해와 비교하여 매우 정확한 결과를 얻었으며, 김우구 등(2003)은 천수방정식을 HLLC기법과 TVD-WAF기법으로 이산화하여 Bellos 등(1992)의 댐붕괴파 실험을 수치모형으로 재현하였다. 김대홍과 조용식(2005)은 HLLC기법과 MUSCL-Hancock기법에 개선한 수정경사기법을 적용하여 플럭스항과 생성항이 수치적으로 균형은 이산화기법을 제안하였다. 이러한 국내의 천수흐름의 해석에 대한 연구는 흐름영역을 구조 혹은 비구조격자를 이용하여 이산화한 후, 수치모형을 적용하여 유도된 결과이다. 효율적인 격자생성 및 수치모형의 연구가 필요한 시점이다. 그러므로 본 연구에서는 균일한 크기의 구조격자의 장점인 생성의 용이함과 비구조격자의 장점인 곡선부 형상의 표현의 정확성을 동시에 만족할 수 있는 분할격자기법을 적용하여 수치격자를 생성하고, 유한체적기법의 수치모형을 적용하여 수치모형을 검증한다.

분할격자기법은 흐름의 특성이 변화하는 성질을 가지는 격자를 형상에 맞게 분할하여 흐름영역과 비흐름영역으로 구분하는 간편한 격자생성기법이다(Causon 등, 2000; Causon 등, 2001; Qian 등, 2001). 정확한 정보를 이용하여 구성된 분할격자는 곡선좌표계의 격자와 같은 정도의 정확한 곡선형의 계산격자를 생성할 수 있다(Qian 등, 2003). Zhou 등(2004)은 HLL(Harten, Lax and van Leer)기법과 MUSCL(Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws)-Hancock 기법으로 구성된 수치모형을 분할격자망에 적용하고, 45°와 90°로 굴절된 수로에서의 댐붕괴파의 흐름을 모의하여 CADAM(Concerted Action on Dam Break Modelling) 프로젝트(Morris, 2000)의 수리실험결과 비교하였다. Gao 등(2006)은 분할격자에 Roe기법의 수치모형을 적용하여 밀도차

에 의해 발생하는 Rayleigh-Taylor instability 문제를 다양한 크기의 격자에 적용하여 그 결과를 비교하였으며, 완만한 경사의 방파제에서 발생하는 흐름을 모의하여 해석해와 비교하였다.

본 연구에서는 제안하는 분할격자는 다양한 형태 및 크기를 갖는 격자로 구성되므로, 다양한 비구조격자에 적용이 용이한 적분형태의 수치기법인 유한체적법을 이용하여 지배방정식을 이산화하여 수치모형을 구성한다. 지배방정식인 천수방정식을 이산화하기 위하여 Riemann 근사해법인 HLLC(Harten, Lax, van Leer and Contact wave)기법을 이용하여 천수방정식의 흐름률을 계산하였으며, 1차원 수치기법의 단점을 보완하기 위하여 TVD-WAF(Total Variation Diminish-Weighted Average Flux)기법을 적용하여 해의 안정성을 기하였다.

## 2. 분할격자체계

분할격자기법은 구조격자와 비구조격자의 특성을 조합하여, 비구조격자의 장점인 계산격자를 실제 흐름영역과 유사하게 표현하는 능력과 구조격자의 계산의 효율성을 동시에 추구하는 기법이다. 분할격자를 생성하는 과정은 비구조격자의 생성과 비교하여 매우 간단한 과정으로 이루어진다. 기본적으로 전체의 흐름영역은 균일한 크기의 직사각형 구조격자로 구성된 기본격자로 표현한다. 흐름의 특성이 변화하는 지점, 침윤이 일어나는 지점 또는 유체의 특성이 다른 지점은 경계를 정의한 다각형 함수를 이용하여 표현하며, 경계영역의 다각형 함수와 기본격자를 비교하여 흐름의 영역을 분할한 분할격자를 구성한다(그림 1 참조).

흐름의 특성이 변하는 격자를 분할하여 분할격자를 생성하기 위하여, 분할점의 시점과 종점의 위치관계에 의하여 흐름의 특성을 정의한다. 일반적인 지형은 그림 1에서 보는바와 같이 곡선형의 형상을 가지게 된다. 이와 같은 곡선은 절점의 함수로 표현이 되며, 절점은 시계방향 또는 반시계방향의 일정한 방향성을 가지고 정의가 된다. 시점과 종점의 위치에 따른 위치벡터에서 시점을 기준으로 시계방향에 위치하는 격

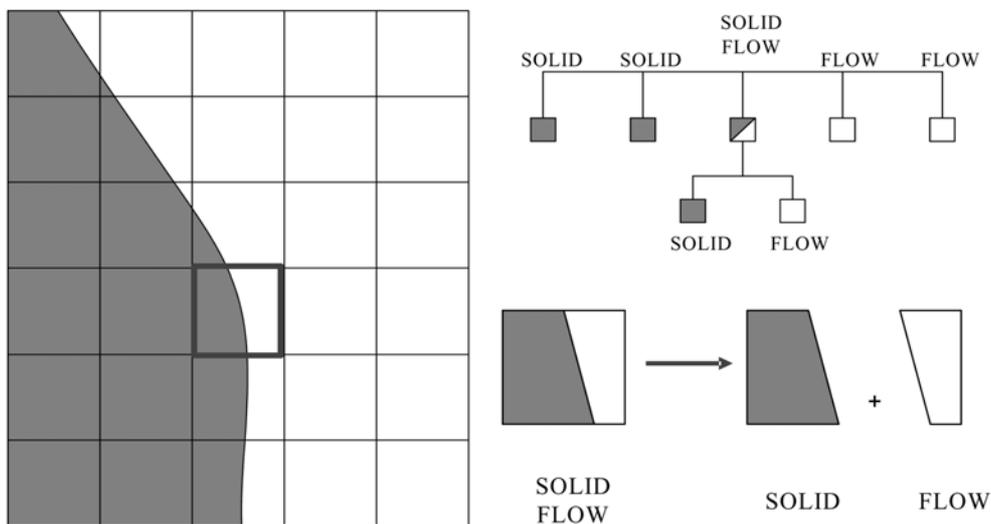


그림 1. 분할격자체계

자는 흐름격자로 정의되고, 반시계방향에 위치하는 격자는 비흐름격자로 정의된다. 그림 2에서 위와 같은 관계를 살펴보면, 시점이 종점에 좌측에 위치하고 있으므로, 우측하단부의 격자들은 흐름격자로 정의되고, 좌측상단의 격자들은 비흐름격자로 정의가 된다.

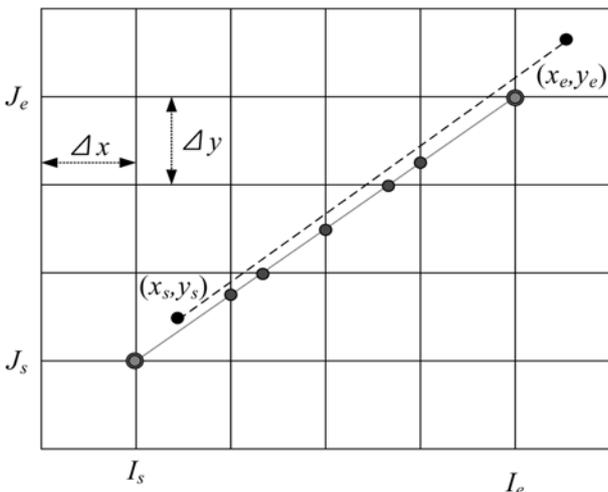
복잡한 자연지형에 대하여 정확한 분할격자를 생성하기 위해서는 기본격자와 곡선부가 교차하는 지점을 일일이 조사하여 분할격자망을 생성하는 것이 바람직하다. 하지만, 이와 같은 과정을 위하여 수반되는 작업의 양이 많고 복잡하므로 효율적이고 간편한 격자를 생성하기에 적합하지 않은 과정이다. 이와 같은 단점을 해결하기 위하여 Ingram 등(2003)은 지형을 하나의 곡선함수로 나타낸 후, 각 지점의 사이에 위치한 분할점을 추적하여 분할격자망을 생성하는 방법을 제안하였다.

$$P_i = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_j, y_j), \dots, (x_n, y_n)\} \quad (1)$$

식 (1)과 같이 정의된 곡선함수  $P_i$ 를 따라서 수치격자를 분할하기 위하여  $(x_i, y_i)$ 와  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ 를 시점  $(x_s, y_s)$ 와 종점  $(x_e, y_e)$ 으로 하는 선분을 추적하고, 선분과 직사각형격자가 겹치는 부분인 분할격자점을 계산한다. 지형을 나타내는 곡선함수  $P_i$ 는 실수의 좌표이고 계산격자망을 정수의 좌표를 갖게 되므로 그 위치가 정확히 교차하지 않는다. 시점과 종점을 이동하여 분할점이 포함된 격자망의 번지수에 대입하기 위하여 식 (2)와 같이 계산하여 시작점과 끝점의 격자망의 위치  $(I_s, J_s)$ 와  $(I_e, J_e)$ 를 계산한다. 여기서,  $(x_0, y_0)$ 는 계산영역의 원점의  $x$  및  $y$  좌표를 의미한다.

$$I_s = \text{int}\left(\frac{x_s - x_0}{\Delta x}\right) + 1, \quad J_s = \left(\frac{y_s - y_0}{\Delta y}\right) + 1$$

$$I_e = \text{int}\left(\frac{x_e - x_0}{\Delta x}\right) + 1, \quad J_e = \left(\frac{y_e - y_0}{\Delta y}\right) + 1 \quad (2)$$



- Given start and end points  $(x_s, y_s), (x_e, y_e)$
- Shifted start and end points  $(I_s, J_s), (I_e, J_e)$
- Found cut-cell points  $(x_n, y_n)$

그림 2. 절점 및 분할점의 계산

분할격자망을 구성하기 위한 분할격자점의 위치 등은 간단한 수식에 의하여 쉽게 결정할 수 있다. 격자분할은 시점과 종점의 위치에 따라서 세부적으로 총 48가지의 경우의 수가 발생한다. 분할된 격자망은 그 형태가 3각형에서부터 5각형의 형태를 이루게 된다.

### 3. 수치모형

#### 3.1 지배방정식

지배방정식인 비선형 천수방정식은 식 (3)과 같이 보존형의 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{S} \quad (3)$$

보존형 변수 벡터  $\mathbf{U}$ 와  $x$ -축 및  $y$ -축 방향의 흐름률벡터  $\mathbf{E}$ 와  $\mathbf{G}$  및 생성항  $\mathbf{S}$ 는 각각 다음과 같다.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \mathbf{E} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \\ huv \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + gh^2/2 \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ ghS_{ox} - ghS_{fx} \\ ghS_{oy} - ghS_{fy} \end{pmatrix} \quad (4)$$

식 (4)에서  $h$ 는 수심이며,  $u$ 와  $v$ 는 각각  $x$ -축 및  $y$ -축 방향의 수심평균 유속을 나타낸다. 생성항에 포함된  $S_o$ 와  $S_f$ 는 각각 하상경사와 마찰경사를 나타내며, 마찰경사는 Manning 공식 또는 Chezy 공식을 이용하여 적용할 수 있다.

불규칙한 격자망에 대하여 식 (3)을 이산화하기 위하여 식 (5)와 같이 적분하여 유한체적법을 적용한다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{U} dA + \oint_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} d\Omega + \oint_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{S} d\Omega \quad (5)$$

#### 3.2 Riemann 근사해법

HLLC기법은 흐름률의 3개의 특성곡선으로 분할하여 계산하는 방법으로서, HLL기법을 이차원 천수방정식에 적용할 때 발생하는 전단흐름에 의한 영향의 오차를 보완하는 기법이다. HLLC기법은 Fraccarollo와 Toro(1995)에 의해 제안되었으며, Bille과 Toro(1997)은 HLLC기법을 천수방정식에 적용하여 물리적인 타당성을 검증하였다.

한방향의 흐름에 대하여 생성항의 영향을 생략하면 지배방정식을 식 (6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

식 (6)는 세 개의 변수에 대한 벡터로서 세 개의 고유값을 가지며, 세 개의 파속에 의해 구분되는 네 개의 구간으로 구분되는 식 (7)과 같은 Riemann 해로 구성된다.

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{for } 0 \leq S_L \\ \mathbf{U}_L^* & \text{for } S_L \leq 0 \leq S_s \\ \mathbf{U}_R^* & \text{for } S_s \leq 0 \leq S_R \\ \mathbf{U}_R & \text{for } S_R \leq 0 \end{cases} \quad (7)$$

Riemann 해를 네 개의 구간으로 구분하는 파속은 식 (8)과 같이 주어진다.

$$S_l = \min(u_L - \sqrt{gh_L}, u_* - \sqrt{gh_*})$$

$$S_* = u_* = \frac{u_L + u_R}{2} + \sqrt{gh_L} - \sqrt{gh_R} \quad (8)$$

$$S_R = \max(u_R + \sqrt{gh_R}, u_* - \sqrt{gh_*})$$

검사체면에서의 흐름률은 식 (7)과 (8)의 결과를 이용하여 구하며 식 (9)와 같이 주어진다.

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{E}_L & \text{for } 0 \leq S_L \\ \mathbf{E}_L^* = \mathbf{E}_L + S_L(\mathbf{U}_L^* - \mathbf{U}_L) & \text{for } S_L \leq 0 \leq S_* \\ \mathbf{E}_R^* = \mathbf{E}_R + S_R(\mathbf{U}_R^* - \mathbf{U}_R) & \text{for } S_* \leq 0 \leq S_R \\ \mathbf{E}_R & \text{for } S_R \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

2차 정확도의 수치기법에 수반되는 수치진동을 제어하기 위하여 TVD 제한자를 적용한다. Toro(1999)에서와 같이 WAF 기법에 의한 수치흐름률은  $-\Delta x/2 \sim \Delta x/2$ 의 구간에서 흐름률을 적분함으로써 얻을 수 있다.

$$\mathbf{E}_{i+1/2,j}^{WAF} = \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \mathbf{E}(\mathbf{Q}_{i+1/2,j}^k(x, \Delta t/2)) dx \quad (10)$$

HLLC 기법은  $-\Delta x/2 \sim \Delta x/2$ 의 구간에서 3개의 특성곡선에 의하여 구분되는 4개의 영역으로 흐름률을 계산하므로, 식 (10)은 식 (11)와 같은 각 흐름률의 영역을 가중 평균한 값으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{E}_{i+1/2}^{WAF} = \sum_{k=1}^4 \beta_k \mathbf{E}_{i+1/2}^{(k)} \quad (11)$$

여기서  $\mathbf{E}_{i+1/2,j}^k = \mathbf{E}(\mathbf{Q}_{i+1/2,j}^k)$ 로서 식 (9)의 HLLC기법의 구간 평균값을 사용할 수 있으며  $\beta_k$ 는 무차원 거리로서 식 (12)과 같다.

$$\beta_k = \frac{A_k - A_{k-1}}{\Delta x} = \frac{1}{2}(c_k - c_{k-1}) \quad (12)$$

식 (12)에서  $c_k$ 는 전파속도  $S_k$ 에 대한 Courant 수로서  $\Delta t S_k /$

$\Delta x$ 이고  $c_0 = -1, c_4 = 1$ 이다. 따라서, 식 (12)을 식 (11)에 대입하고 정리하면 식 (13)를 구할 수 있다.

$$\mathbf{E}_{i+1/2}^k = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \text{sign}(c_k) V_{i+1/2}^k \Delta \mathbf{E}_{i+1/2}^k \quad (13)$$

#### 4. 모형의 검증

본 연구에서 구축된 수치모형의 적용성을 검토하기 위하여 해석해가 존재하는 사각형 수조의 자유진동문제에 적용하여 해석해와 비교한다. 먼저, 모형의 기초적인 검증을 위하여 직교좌표계에 일치하게 격자망을 생성하여 흐름의 변화를 모의하였다. 다음으로, 수조의 좌측 하단부를 기준으로 수조를 직교좌표계에서 30°와 45° 회전시켜 분할격자망을 생성하고 수치모의를 실시하여 분할격자망에 의한 수치모의의 정확성을 검증하였다. 수치모형의 검증을 위하여 각 격자에 대해 1개 지점의 자유수면변위와 유속의 변화를 해석해와 수치해를 비교하였으며, 자유수면 및 유속벡터의 분포를 도시하여 자유진동이 정확히 유지되고 있음을 확인하였다. 수치모의에 적용된 수조의 형태는 그림 5와 같다. 관측점 GA는 그림 5의 (a)에서 보는바와 같이 흐름영역의 종축 및 횡축의 지점에 설정하였으며, GB와 GC는 회전된 수조에서 GA와 같은 지점에 해당하는 지점에 설정하였다.

본 연구에서는 고체경계에서의 반사조건을 구현하기 위하

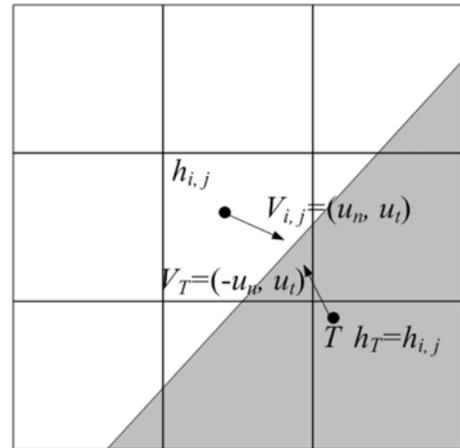


그림 3. 고체경계에서의 가상경계조건

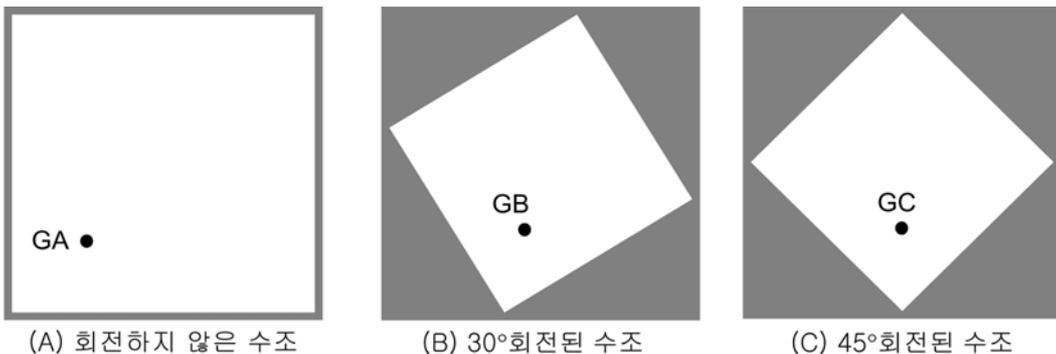


그림 4. 수치모의를 위한 사각수조의 형상

여 그림 (3) 및 식 (14)과 같이 가상격자에서의 수심 및 유속을 가정하였다.

$$h_T = h_{i,j}$$

$$V_T(-u_n, u_t) = V_{i,j}(u_n, u_t) \quad (14)$$

#### 4.1 직교 좌표계를 이용한 사각형 수조의 자유진동 모의

Lynch와 Gray(1978)는 유체의 점성 및 마찰항을 무시한 경우에 발생하는 정사각형의 수조내의 자유수면의 진동에 대한 수치해를 유도하였다. 바닥의 경사가 없는 정사각형의 수조 한변의 길이를  $L$ , 정사상태의 수심이  $d$ 이고 파고가  $\zeta$ 인 수면의 자유진동은 식 (15)에서 (17)과 같은 자유수면 및 유속의 해를 갖는다. 주어진 조건에서 정사각형 내의 흐름은 1/4 주기에서 수조내의 모든 수심이 동일해지며, 2/4 주기에는 초기의 수면과 대칭이 되는 수심분포를 가지게 된다. 4/4주기에는 초기의 수면분포고 복귀하게 되며, 바닥의 마찰이 없는 상태이므로 지속적으로 위와 같은 변화를 나타내게 된다.

$$\eta(t) = \frac{\zeta}{2} \cos \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi y}{L} \cos \frac{2\pi t}{T} + d \quad (15)$$

$$u(t) = \frac{\zeta}{4L} \frac{gT}{L} \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi y}{L} \cos \frac{2\pi t}{T} \quad (16)$$

$$v(t) = \frac{\zeta}{4L} \frac{gT}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{L} \sin \frac{2\pi t}{T} \quad (17)$$

$$T = \sqrt{2L} / \sqrt{gd} \quad (18)$$

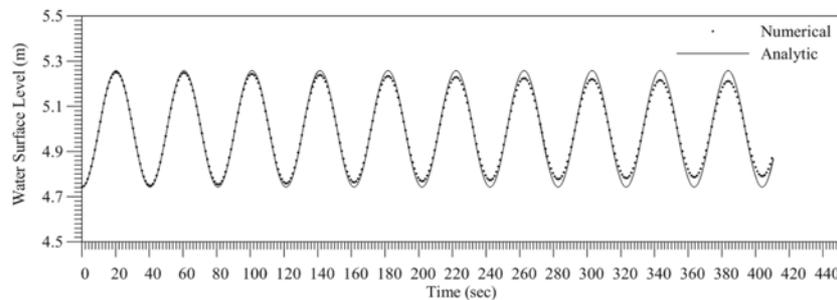
길이  $L=200.0$  m인 수조에서 수심  $d=5.0$  m, 파고  $z_0=1.0$  m를 초기조건으로 설정하였을 때 생성되는 자유수면의 변위와 유속의 변화를 모의하였다.  $\Delta x = \Delta y = 2.0$  m의 균일한 크기로

분할한 2개의 격자를 구성하여, 2주기 동안의 흐름을 수치모의 하였다. 그림 5에서와 같이 관측지점에서의 자유수면의 변위와  $x$ -축 및  $y$ -축 방향의 유속의 변화를 해석해와 비교한 결과를 도시하였으며, 그림 6에는  $t=2T/4$ 와  $t=4T/4$ 에서의 사각형 수조내의 자유수면의 분포와  $t=T/4$ 와  $t=3T/4$ 에서의 유속벡터의 분포를 나타낸다. 관측지점에서 관찰한 수치모의 결과와 해석해를 비교한 결과, 본 연구에서 개발한 수치모형이 크기가 서로 다른 격자를 이용한 수치모의를 통하여 자유수면변위 및 유속의 변화를 정확히 모의하고 있음을 확인할 수 있다. 자유수면변위 및 유속벡터의 분포를 살펴보면,  $t=2T/4$ 가 지난 후에 위상이 중심점을 기준으로 정확히 반전이 되고 있으며, 대각선을 기준으로 대칭을 이루고 있는 모습을 확인할 수 있다.

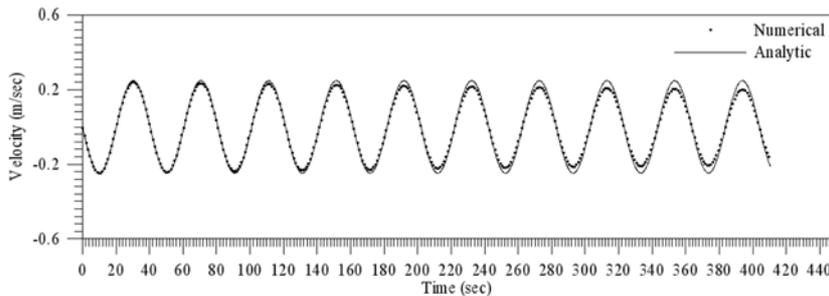
#### 4.2 분할격자를 이용한 사각형수조의 자유진동

사각형의 수조를 회전된 상태로 가정한 후, 분할격자기법을 이용하여 계산격자를 생성하고 수치모의를 실시하였다. 회전된 수조에 대해서도 기본격자는 크기가  $\Delta x = \Delta y = 2.0$  m로 구성하였으며, 기본 격자에 내접하는 회전된 사각수조에 대하여 분할격자를 생성하였다. 수치모형을 검증하기 위하여 회전된 수조에 적합하도록 식 (19)를 이용하여 식 (20)-(22)와 같이 변형하였다.  $\theta$ 는 수조가 회전된 각도를 나타내고,  $x$ 와  $y'$ 은 회전중심인 수조의 좌측하단부를 원점으로 하는 공간좌표,  $x$ 와  $y$ 는 회전되기 이전의 공간좌표를 의미한다.  $u'$ 과  $v'$ 은 회전된 좌표  $x'$ -축 및  $y'$ -축 방향에서의 유속을 나타내므로, 수치모의 결과와 직접적인 비교를 위하여 식 (23)과 같이  $x$ -축 및  $y$ -축 방향으로 변환하여 수치해와 비교한다.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (19)$$



(a) GA에서의 자유수면결과 비교



(b) GA에서의 유속결과 비교

그림 5. 관측지점에서 해석해와 수치결과의 비교 (무회전)

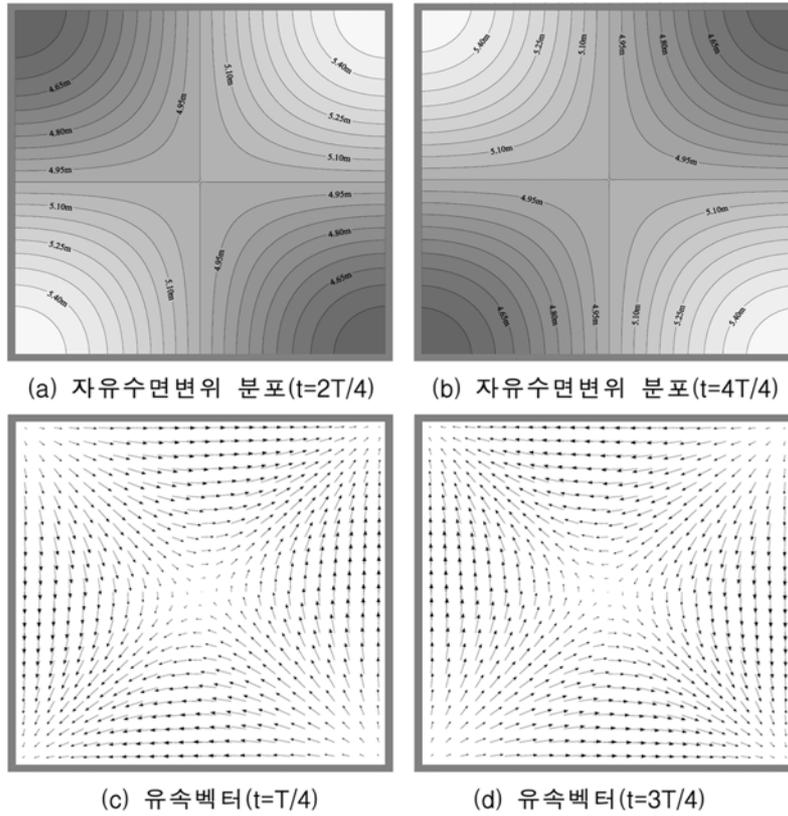


그림 6. 자유수면변위 및 유속벡터 분포도 (무회전)

$$\eta(t) = \frac{\zeta^o}{2} \cos \frac{\pi(x \cos \theta + y \sin \theta)}{L} \cos \frac{\pi(x \cos \theta - y \sin \theta)}{L} \cos \frac{2\pi t}{T} + d \quad (20)$$

$$u'(t) = -\frac{\zeta^o g T}{4L} \sin \frac{\pi(x \cos \theta + y \sin \theta)}{L} \cos \frac{\pi(x \cos \theta - y \sin \theta)}{L} \cos \frac{2\pi t}{T} \quad (21)$$

$$v'(t) = \frac{\zeta^o g T}{4L} \cos \frac{\pi(x \cos \theta + y \sin \theta)}{L} \sin \frac{\pi(x \cos \theta - y \sin \theta)}{L} \sin \frac{2\pi t}{T} \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (23)$$

계산영역을 균일한 크기의 정사각형격자로 분할하여 30° 회전된 수조의 자유진동흐름을 수치모의 하여 균일격자에 의해 발생하는 수치오차에 대해 고찰하였다. 30° 회전된 수조의 경우는 경사진 수조의 형태를 표현하기 위하여 흐름영역과 비 흐름영역을 분할하여 나타나는 격자의 형태가 매끄럽지 않으므로 수치적인 왜곡시킬 가능성이 매우 높다. 수심과 파고를  $d = 5.0 \text{ m}$ ,  $\zeta^o = 1.0 \text{ m}$ 로 적용하여 수치모의를 실시하여, 자유수면의 변위와 유속의 변화를 해석해와 비교하여 그림 7에 나타내었으며, 격자형상에 의해 발생하는 수치적인 오차를 알아보기 위하여 그림 8에  $t = 2T/4$ 의 자유수면변위와  $t = T/4$ 의 유속벡터의 분포를 도시하였다. 그림 9와 10에서 확인할

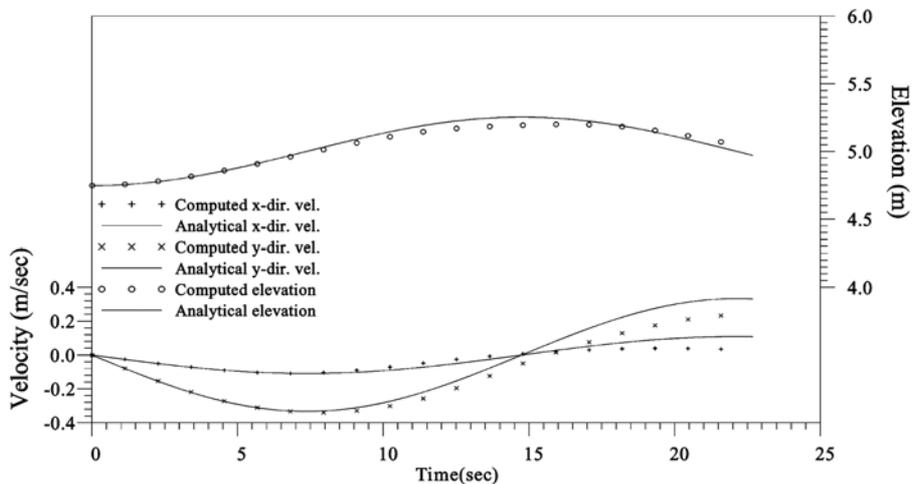
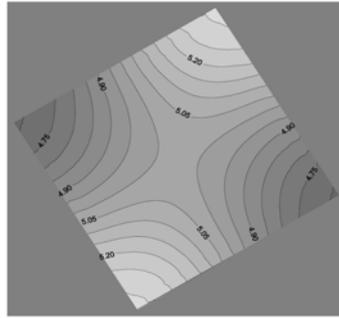
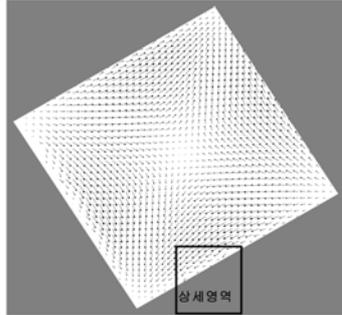


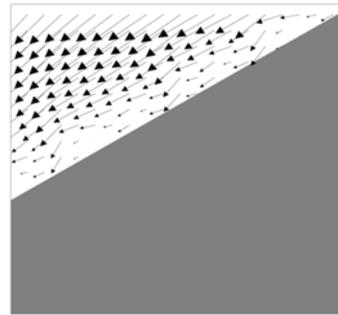
그림 7. GB에서의 자유수면 및 유속의 비교 (격자 100 × 100)



(a) 자유수면변위 분포( $t=2T/4$ )

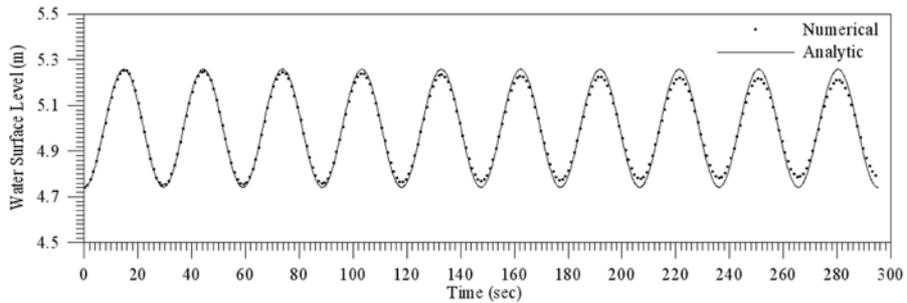


(b) 유속벡터( $t=T/4$ )

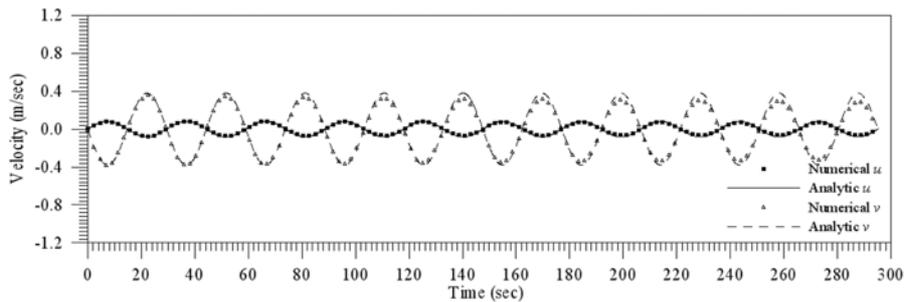


(c) 상세영역의 유속벡터( $t=T/4$ )

그림 8. 정규격자를 이용한 자유수면변위 및 유속벡터 분포도 (30°회전)



(a) GB에서의 자유수면결과 비교



(b) GB에서의 유속결과 비교

그림 9. 관측지점에서 해석해와 수치결과의 비교 (30°회전)

수 있듯이 경사진 영역을 정확히 표현하지 못한 계산격자에 의해 자유수면의 분포 및 유속벡터의 계산값에 오차가 발생하고 있음을 확인할 수 있다.

30° 회전된 회전된 수조를 표현하기 위하여 4개의 절점을 이용하여 분할격자를 간편하게 구성하였다. 수심과 파고의 조건은 앞의 두 가지 경우의 모의와 같이  $d=5.0\text{ m}$ ,  $\zeta^o=1.0\text{ m}$ 를 적용하였다. 관측점에 계산된 수치모의 결과를 해석해와 비교하여 그림 9에 나타내었다. 해석해와 비교한 결과, 분할격자

망을 이용하여 모의된 수치모의 결과가 해석해와 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있다. 그림 10에는  $t=2T/4$ 와  $t=4T/4$ 에서의 사각형 수조내의 자유수면의 분포와  $t=T/4$ 와  $t=3T/4$ 에서의 유속벡터의 분포를 나타낸다. 다양한 형태 및 면적을 갖는 격자를 이용하여 계산된 수치모의 결과에서도, 수치모의 결과가 해석해와 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있다. 유속벡터의 분포를 살펴보면, 격자의 형상 및 크기에 따른 수치 오차가 발생하지 않고 경계면을 따라 적절히 계산되고 있음

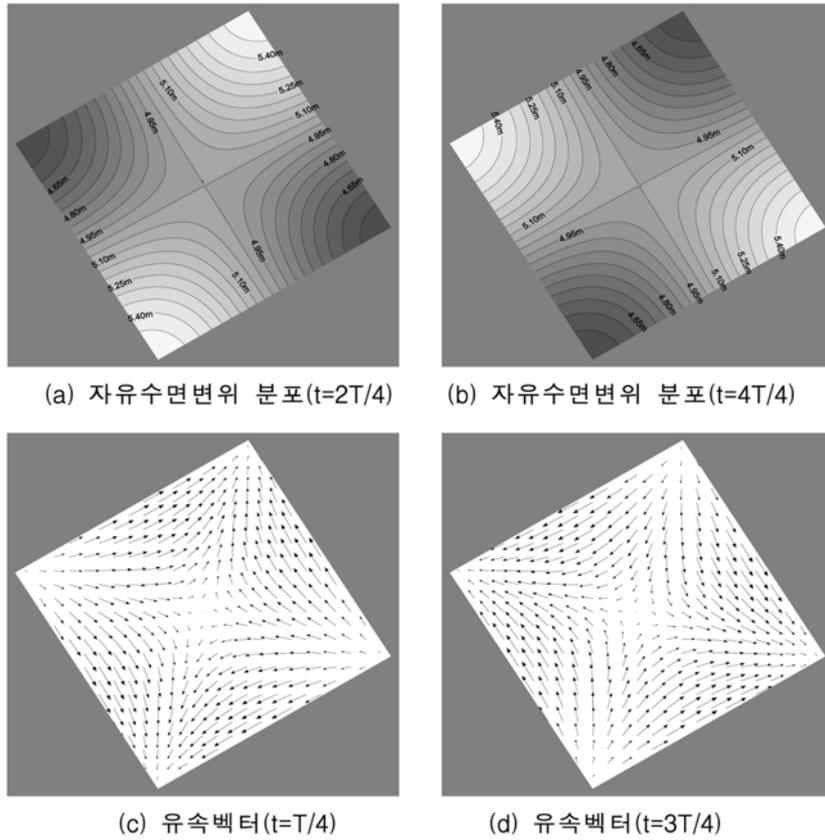
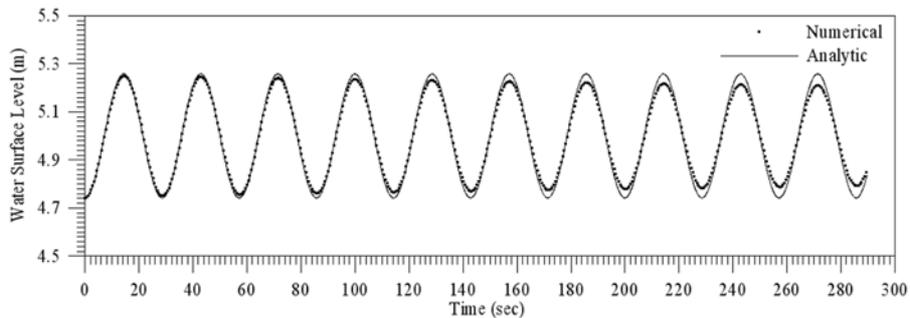


그림 10. 자유수면변위 및 유속벡터 분포도 (30°회전)

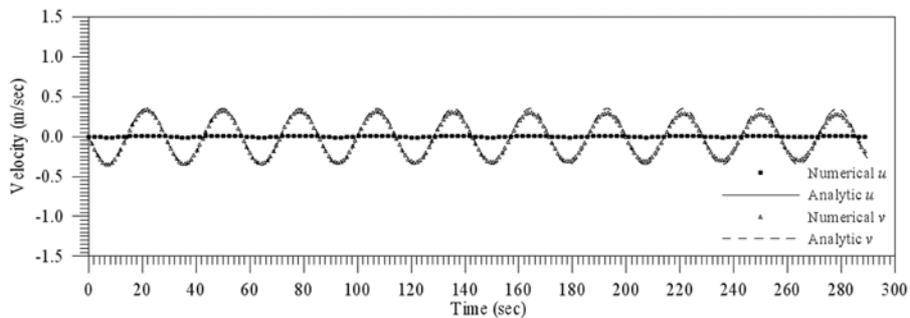
을 확인할 수 있다.

마지막으로, 전체의 계산영역은 200 m × 200 m 안에서 45° 회전된 길이  $L \approx 141.42$  m 인 수조에서의 수면의 자유진동을 모의하기 위하여 분할격자망을 생성하였다. 45° 회전된 수조를 표현하기 위해 생성된 분할격자는 정규격자의 면적의 1/2

을 갖는 직각삼각형의 형태를 지나게 된다. 수치모의에 적용된 수심과 파고의 조건은 4.1의 모의와 동일하게  $d = 5.0$  m,  $\zeta = 1.0$  m를 적용하였다. 관측점 GC에서 계산된 수치모의 결과를 해석해와 비교하여 그림 11에 나타내었다. 해석해와 비교한 결과, 분할격자망을 이용하여 모의된 수치모의 결과가



(a) GC에서의 자유수면결과 비교



(b) GC에서의 유속결과 비교

그림 11. 관측지점에서 해석해와 수치결과의 비교 (45°회전)

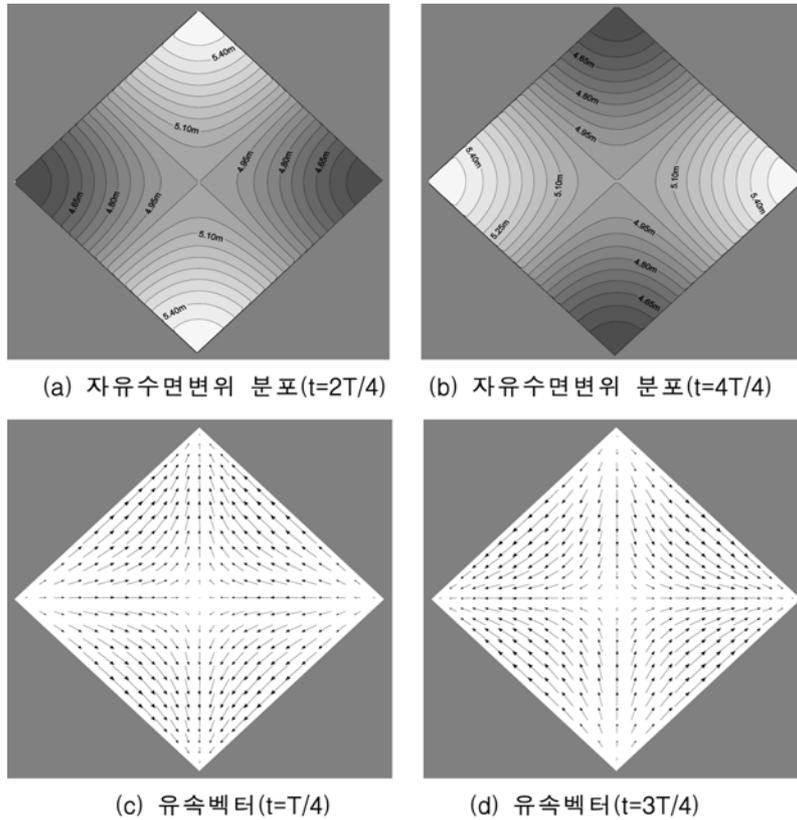


그림 12. 자유수면변위 및 유속벡터 분포도 (45°회전)

해석해와 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있다. 그림 12에는  $t = 2T/4$ 와  $t = 4T/4$ 에서의 사각형 수조내의 자유수면의 분포와  $t = T/4$ 와  $t = 3T/4$ 에서의 유속벡터의 분포를 나타낸다. 자유수면변위와 유속벡터의 분포를 살펴보면, 사각형 수조의 진동현상을 매우 잘 표현하고 있으며, 분할격자부근의 유속벡터는 고체경계를 따라서 잘 표현되고 있음을 확인할 수 있다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 직사각형 균일격자의 곡선, 사선의 형상표현의 제약성을 해결하기 위하여, 곡선형의 지형을 간단한 정보를 이용하여 효율적으로 수치격자를 생성할 수 있는 분할격자 기법을 적용하여 계산격자를 생성하고, 유한체적법을 이용한 수치모형을 적용하여 흐름에 대한 수치모의를 검증하였다. HLLC Riemann 근사해법을 적용하여 수치흐름율을 계산하였으며, TVD-WAF기법을 적용하여 수치모형의 정확성을 향상시켰다. 본 연구에서 개발된 수치모형은 바닥의 경사가 없고 마찰에 의한 영향을 고려하지 않은 사각형 수조내의 자유진동흐름을 모의함으로써 검증하였다. 수치모형을 검증하기 위하여 좌표계와 수조의 방향이 일치하는 문제에 대하여 수치모의를 진행한 결과, 본 연구에서 개발된 유한체적모형이 천수흐름을 적절히 모의하고 있음을 확인할 수 있었다. 좌표계와 수조의 형상이 30°와 45° 문제에 대하여 적용하여 그 결과를 분석함으로써 분할격자의 적용성을 살펴보았다. 일반적으로 사용되는 정사각형 균일격자와 분할격자를 이용하여 수치모의결과와 해석해를 비교한 결과, 본 연구에서 제시한 분

할격자의 수치모의 결과가 자유수면분포 및 유속벡터의 결과에서 더 정확함을 확인할 수 있었다. 또한, 각 격자에서 계산된 수조의 경계에서 유속의 벡터를 살펴보면, 분할격자에 의해 유속벡터의 방향이 정확히 수조의 형상을 만족시키며 계산되고 있음을 확인할 수 있다. 그러므로 본 연구에서 제시한 분할격자를 활용하여 복잡한 하도의 변화와 바다마찰의 영향을 고려한 수치기법을 적용한다면, 하천의 흐름을 보다 효율적이고 정확하게 모의할 수 있을 것으로 판단된다.

## 참고문헌

- 김대홍, 조용식 (2005) 불규칙 지형에 적용가능한 쌍곡선형 천수 방정식을 위한 개선표면경사법. **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제25권, pp. 223-229.
- 김우규, 정관수, 김재한 (2003) WAF기법을 이용한 천수방정식 해석. **한국수자원학회논문집**, 한국수자원학회, 제36권, pp. 777-785.
- 윤태훈, 강석구, 이지송 (2002) 본류 수위 급상승에 의한 지류 역류 해석. **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제22권, pp. 33-41.
- 이종욱, 조용식 (2001) TVD수치모형의 개발: 천수방정식. **한국수자원학회논문집**, 한국수자원학회, 제34권, pp. 187-195.
- 전정숙, 이봉희, 조용식 (2003) TVD기법을 이용한 불연속 흐름의 수치해석. **한국수자원학회논문집**, 한국수자원학회, 제36권, pp. 597-608.
- Bellos, C., Soulis, J. V. and Sakkas, J. G. (1992) Experimental Investigation of Two-Dimensional Dam-Break Flows. *J. of Hydraulic Research*, Vol. 30, No. 1, pp. 47-63.
- Billet, S. J. and Toro, E. F. (1997) On the Accuracy and Stability of

- Explicit Schemes for Multidimensional Linear Homogeneous Advection Equations. *Journal of Computational Physics*, Vol. 131, pp. 247-250(4).
- Causon, D. M., Ingram, D. M., and Mingham, C. G. (2001) A Cartesian cut cell method for shallow water flows with moving boundaries. *Adv. Water Resour.*, Vol. 24, pp. 899-911.
- Causon, D. M., Ingram, D. M., Mingham, C. G., Yang, G., and Pearson, R. V. (2000) Calculation of shallow water flows using a Cartesian cut cell approach. *Adv. Water Resour.*, Vol. 23, pp. 545-562.
- Fraccarollo, L. and Toro, E. F. (1995) Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems. *J. Hydraul. Res.* Vol. 33, pp. 843-864.
- Gao, F., Ingram, D. M., Causon, D. M. and Mingham, C. G. (2006) The development of a Cartesian cut cell method for incompressible viscous flows. *Int. Journal for Numerical method in fluids*, Vol. 54, pp. 1033-1053.
- Ingram, D. M., Causon, D. M. and Mingham C. G. (2003) Development in Cartesian cut cell methods. *Math. and Computers in simulation*, Vol. 61 pp. 561-572.
- Lynch, D. R. and Gray, W. G. (1978) Analytic solutions for computer flow model testing. *Journal of the Hydraulic Division, ASCE*, Vol. 104, No. HY10, pp. 1409-1428.
- Morris, M. (2000) *CADAM: Concerted action on dambreak modeling-Final report*. Rep. No. SR 571, HR Wallingford.
- Toro, E. F. (1999) *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer.
- Qian, L., Causon, D. M., Ingram, D. M. and Mingham, C. G. (2003) Cartesian cut cell two-fluid solver for hydraulic flow problems. *Journal of Hydraulic Engineering*. Vol. 129, pp. 688-696.
- Qian, L., Causon, D. M., Ingram, D. M., Mingham, C. G., and Zhou, J. G. (2001) A Cartesian cut cell method for incompressible viscous flows. *Proc., European Community on Computational Methods in Applied Sciences (ECCOMAS)*, CFD 2001, Institute of Mathematics and its Applications, Southend-on Sea, U.K.
- Yang, G., Causon, D. M. and Ingram, D. M. (2000) Calculation of compressible flows about complex moving geometries using a three-dimensional Cartesian cut cell method. *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 33, pp. 1121-1151.
- Zhou, J. G., Causon, D. M., Mingham, C. G. and Ingram, D. M. (2004) Numerical prediction of dam-break flows in general geometries with complex bed topography. *Hydraulic Engineering*, Vol. 130, No. 4, pp. 332-340.

◎ 논문접수일 : 08년 02월 26일  
 ◎ 심사의뢰일 : 08년 02월 26일  
 ◎ 심사완료일 : 08년 06월 09일