

# 계면손상과 미세균열을 고려한 입자강화 복합재료의 미세역학 탄성구성모델

## A Micromechanics based Elastic Constitutive Model for Particle-Reinforced Composites Containing Weakened Interfaces and Microcracks

이 행 기† 표 석 훈\* 김 형 기\*

Lee, Haeng-Ki Pyo, Suk-Hoon Kim, Hyeong-Ki

(논문접수일 : 2007년 9월 21일 ; 심사종료일 : 2007년 11월 29일)

### 요 지

본 연구에서는 입자강화 복합재료(particle-reinforced composites)의 거동을 예측하기 위하여 Lee and Pyo(2007)에 의해 제안된 계면손상을 고려한 복합재료의 미세역학 탄성모델과 Karihaloo and Fu(1989)의 미세균열 생성모델을 결합하여, 보강입자의 계면손상(imperfect interface)과 기지 내 미세균열을 고려하여 탄성구성모델(constitutive model)의 거동해석을 수행하였다. 제안된 탄성구성모델의 적용성 검증과 주요손상변수가 거동예측에 미치는 영향을 알아보기 위해 일축 하중 하에서의 응력-변형률 관계를 수치적으로 나타내었다. 또한, 기존의 관련 실험결과와 본 해석결과와의 비교를 통하여 제안된 모델의 정확도를 검증하였다.

**핵심용어** : 미세역학, 탄성구성모델, 입자강화 복합재료, 계면손상 진전, 미세균열

### Abstract

A constitutive model based on a combination of a micromechanics-based weakened interface elastic model (Lee and Pyo, 2007) and a crack nucleation model (Karihaloo and Fu, 1989) is proposed to predict the effective elastic behavior of particle-reinforced composites. The model specifically considers imperfect interfaces in particles and microcracks in the matrix. To exercise the proposed constitutive model and to investigate the influence of model parameters on the behavior of the composites, numerical simulations on uniaxial tension tests were conducted. Furthermore, the present prediction is compared with available experimental data in the literature to verify the accuracy of the proposed constitutive model.

**Keywords** : micromechanics, elastic constitutive model, particle-reinforced composites, progressive imperfect interface, microcracks

### 1. 서 론

입자강화 복합재료(particle-reinforced composites)는 가볍고, 높은 강도와 강성을 가지고 있는 특성 때문에 여러 공학분야에서 상당한 연구와 응용이 이루어지고 있다(진민철 등, 2002). 세라믹 등의 취성(brittle)재료를 기지(matrix)로 한 입자강화 복합재료는 대표적으로  $Al_2O_3-ZrO_2(p)$ ,  $Al_2O_3-TiC(p)$ ,  $Si_3N_4-TiC(p)$  등이 있다(김동섭, 1996). 하지만 입자강화 복합재료는 더 넓은 의미에서 단섬유(Short

fibers) 혹은 위스커(Whiskers)로 보강된 복합재료를 의미하기도 한다(Cho *et al.*, 2006). 이러한 의미에서  $Al_2O_3-SiC(w)$ , Mullite- $SiC(w)$ , TZP- $SiC(w)$  등의 복합재료 역시 입자강화 복합재료의 일부라고 생각할 수 있다. 이와 같은 취성기지 복합재료의 물리적 성질에 있어서 중요한 요인으로 작용하는 요소에는 기지재료와 입자간의 계면손상(imperfect interface)과 기지 내 미세균열(microcracks)의 생성(nucleation) 등이 있다(장병국 등, 1998; 김태우 등, 2001; Carman and Reifsnider, 1992; Caiazzo and

† 책임저자, 정회원 · 한국과학기술원 건설 및 환경공학과 부교수  
Tel: 042-869-3623 ; Fax: 042-869-3610  
E-mail: leeh@kaist.ac.kr

\* 한국과학기술원 건설 및 환경공학과 석사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2008년 4월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2008년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

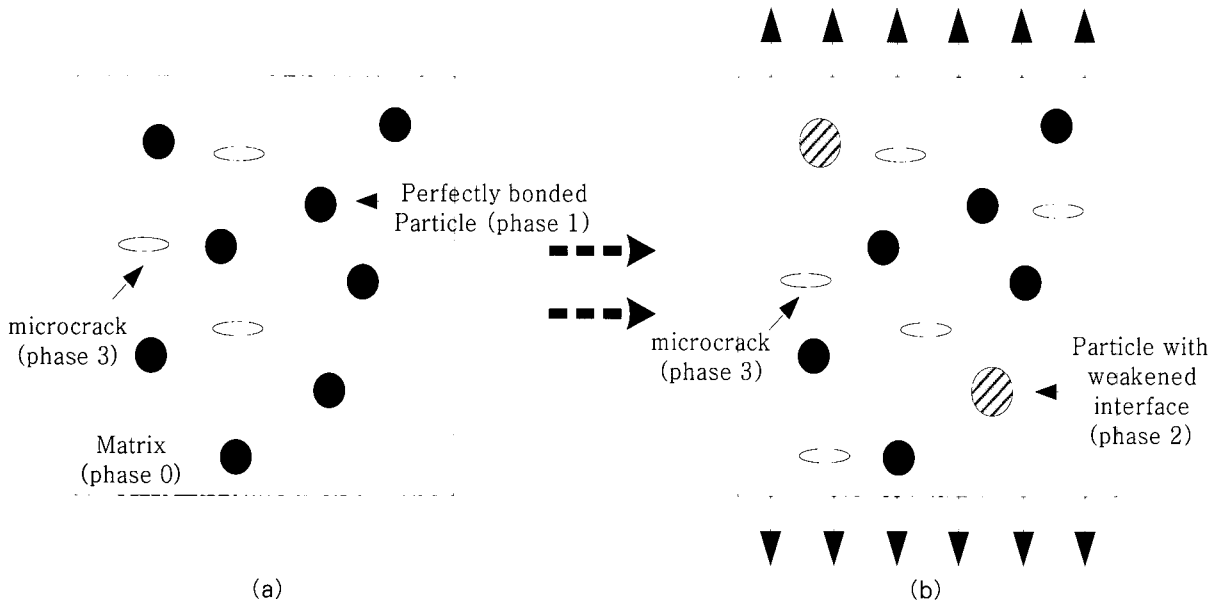


Fig. 1 The schematic of a particle-reinforced composite subjected to uniaxial tension : (a) the initial state, (b) the damaged state

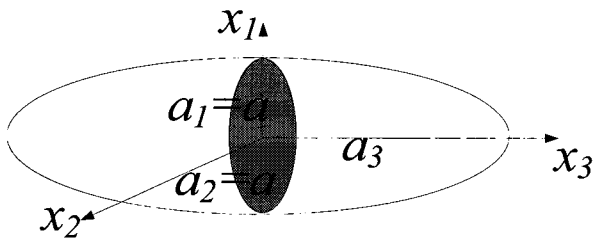


Fig. 2 The schematic of a spheroidal inclusion

Costanzo, 2000; Lamon, 2001).

복합재료의 거동해석을 위하여 유한요소법이 많이 사용되고 있으며, 이를 위해서는 정확한 복합재료 구성모델의 개발이 필수적이다. 하지만 연속체 역학(continuum mechanics)에 의한 유한요소해석에서는, 취성재료에서 일어나기 쉬운 미세균열(microcracks)의 생성에 대한 개념의 도입이 어렵다. 본 연구에서는 Lee and Pyo(2007)에 의해 제안된 계면손상 모델과 Karihaloo and Fu(1989)에 의해 제안된 미세균열 생성모델을 결합하여 계면손상과 미세균열의 생성 과정을 고려한 입자강화 복합재료의 미세역학(micromechanics) 탄성모델의 거동해석을 수행하였다.

Fig. 1(a)에서와 같이 초기에는 기지재료에 구형 보강입자(spherical particle)와 미세균열이 무작위로 분포(randomly distributed)되어 있고, 기지와 구형입자간에 완벽한 결합이 이루어 졌다고 가정하였으며, 하중이 증가함에 따라 점진적으로 Fig. 1(b)와 같이 계면손상이 발생한 입자가 늘어남과 동시에 인장축과 직각을 이루는 타원형 미세균열

(Fig. 2 참조)의 밀도가 증가한다고 가정하였다.

제안된 탄성구성모델의 적용성에 대한 검토와 손상변수가 거동예측에 미치는 영향을 조사하기 위해 일축 하중 하에서의 응력-변형률 관계를 수치적으로 나타내었다. 또한 제안된 모델의 정확도를 검증하기 위하여 기존의 관련 실험결과와 본 해석결과를 비교하였다.

## 2. 구성 방정식

Lee and Pyo(2007)에 의해 제안된 계면손상을 고려한 복합재료 미세역학 탄성모델과 Karihaloo and Fu(1989)의 미세균열 생성모델을 결합하여 계면손상과 미세균열을 고려한 입자강화 복합재료 구성방정식을 유도하였다.

Fig. 1(a)와 같이 초기에 기지재료(phase 0)에 완벽하게 결합되어있는 구형의 보강입자(phase 1)와 기지내의 미세균열(phase 3)이 존재하는 3-상의 복합재료를 고려한다. Fig. 1(b)와 같이 외부 하중 혹은 응력의 증가와 함께 손상된 계면을 갖는 구형의 보강입자(phase 2)의 체적이 증가하고, 탄성인 기지재료의 변형률이 증가함에 따라 미세균열의 밀도가 증가한다고 가정한다. 즉, 하중 혹은 응력이 재하 되기 전인 초기상태에서는 3-상의 상태에서 최종적으로는 4-상의 상태로 진전한다고 가정한다. 기지재료와 보강재료의 라메상수(Lame constant)를 각각  $\lambda_0, \mu_0, \lambda_1, \mu_1$ 이라 하면, 4-상의 복합재료의 유효 강성텐서(effective stiffness tensor)  $\mathbf{C}^*$ 는 Ju and Chen(1994)에 의해 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}_0 \cdot \left[ \mathbf{I} + \sum_{r=1}^3 \left\{ \phi_r (\mathbf{A}_r + \mathbf{S}_r)^{-1} \cdot \left[ \mathbf{I} - \phi_r \mathbf{S}_r \cdot (\mathbf{A}_r + \mathbf{S}_r)^{-1} \right]^{-1} \right\} \right] \quad (1)$$

여기서,  $C_r$ 은  $r$ -상( $r$ -phase)의 강성텐서를 나타내고,  $I$ 는 4차 단위텐서를 나타내며,  $\phi_r$ 은  $r$ -상의 체적비를 나타낸다. 또한, 4차 텐서  $\mathbf{A}_r$ 은 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{A}_r \equiv (\mathbf{C}_r - \mathbf{C}_0)^{-1} \cdot \mathbf{C}_0 \quad (2)$$

완벽하게 결합된 등방성(isotropic) 보강입자(phase 1)의 Eshelby 텐서  $\mathbf{S}_1$ 과 손상된 계면을 갖는 보강입자(phase 2)의 Eshelby 텐서  $\mathbf{S}_2$ 는 Lee and Pyo(2007)에 의해 식 (3), (4)와 같이 표현된다.

$$(\mathbf{S}_1)_{ijkl} = \frac{1}{15(1-\nu_0)} \left\{ (5\nu_0 - 1) \delta_{ij} \delta_{kl} + (4 - 5\nu_0) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right\} \quad (3)$$

$$(\mathbf{S}_2)_{ijkl} = \frac{1}{1200a(1-\nu_0)^2} \left[ \{(-80 + 480\nu_0 - 400\nu_0^2)a + 500(1 - 2\nu_0)^2 \lambda_0 \beta + (-98 + 140\nu_0 - 50\nu_0^2) \mu_0 \alpha + (268 - 1240\nu_0 + 1300\nu_0^2) \mu_0 \beta\} \delta_{ij} \delta_{kl} + \{(320 - 720\nu_0 + 400\nu_0^2)a + \mu_0 (3\alpha + 2\beta)(7 - 5\nu_0)^2\} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right] \quad (4)$$

여기서,  $\nu_0$ 는 기지재료의 포아송비(Poisson's ratio)를 나타내고,  $a$ 는 보강입자의 반경을 나타내며,  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 계면의 접선방향(tangential)과 수직방향(normal)의 컴플라이언스(compliance)를 나타낸다. 또한, Fig. 2의 형상과 같은 미세균열을 모델링하기 위해 Sun and Ju(2004)에 의해 제안된 타원형의 Eshelby 텐서( $\mathbf{S}_3$ )를 식 (5)와 같이 적용하였다.

$$(\mathbf{S}_3)_{ijkl} = S_{IK}^{(1)} \delta_{ij} \delta_{kl} + S_{IJ}^{(2)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (5)$$

여기서, 2차 텐서인  $S_{IK}^{(1)}$ 와  $S_{IJ}^{(2)}$ 는 Sun and Ju(2004)에서 찾을 수 있으며, Sun and Ju(2004)에서 사용된 형상비(aspect ratio)  $\nu$ 는  $a_3/a_1$ 로 정의된다.

식 (3), (4) 그리고 (5)를 식 (1)에 대입하여, 유효 강성텐서를 식 (6)과 같이 유도할 수 있다.

$$\mathbf{C}^* = \left\{ C_{IK}^{(1)} \delta_{ij} \delta_{kl} + C_{IJ}^{(2)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right\} \quad (6)$$

여기서, 2차 텐서인  $C_{IK}^{(1)}$ 와  $C_{IJ}^{(2)}$ 는 다음과 같다.

$$C_{IK}^{(1)} = \lambda_0 \left\{ 1 + 3\Lambda_1 + 2\Lambda_2 + 3\Lambda_3 + 2\Lambda_4 + \left( \sum_{n=1}^3 \Lambda_{nK}^{(5)} \right) + 2\Lambda_{KK}^{(6)} \right\} + 2\mu_0 (\Lambda_1 + \Lambda_3 + \Lambda_{IK}^{(5)}) \quad (7)$$

$$C_{IJ}^{(2)} = 2\mu_0 \left\{ \frac{1}{2} + \Lambda_2 + \Lambda_4 + \Lambda_{IJ}^{(6)} \right\} \quad (8)$$

여기서,  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_4$ 와  $\Lambda_{IK}^{(5)}, \Lambda_{IJ}^{(6)}$ 은 부록에 나타내었다.

### 3. 손상 진전 확률함수

식 (1)에 나타나듯이, 유효 강성텐서의 계산을 위해 각 상(phase)의 체적비를 계산할 필요가 있다. 먼저, 외부의 하중 또는 응력의 증가에 따라 완벽하게 결합되어 있는 보강입자( $\phi_1$ )와 손상된 계면을 갖는 보강입자( $\phi_2$ )의 체적비의 변화는 다음과 같이 Weibull(1951) 확률 함수로 나타낼 수 있다.

$$\phi_2 = \phi \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{(\bar{\sigma}_{11})_I}{\bar{S}_0} \right)^{\bar{M}} \right] \right\} \quad (9)$$

$$\phi_2 = \phi - \phi_1 \quad (10)$$

여기서,  $\bar{S}_0, \bar{M}$ 은 Weibull 함수의 상수이고,  $(\bar{\sigma}_{11})_I$ 는 완벽하게 결합된 보강입자(phase 1)의 내부응력을 나타내며 자세한 유도과정은 Lee and Pyo(2007)에 나타나 있다.

또한, 미세균열 밀도( $\phi_3$ )의 변화는 Karimhaloo and Fu(1989)에 의해 다음과 같이 제안되었다.

$$\phi_3 = \begin{cases} \phi_{\nu 0}, & \varepsilon^a \leq \varepsilon^{th} \\ \phi_{\nu 0} + c_1 \left( 1 - \frac{\varepsilon^{th}}{\varepsilon^a} \right)^{c_2}, & \varepsilon^a \geq \varepsilon^{th} \end{cases} \quad (11)$$

여기서,  $\phi_{\nu 0}$ 는 미세균열의 초기값을 나타낸다. 또한,  $\varepsilon^{th} = \sqrt{\varepsilon_{ij}^{th} \varepsilon_{ij}^{th}}$ 는 미세균열이 발생하지 않는 변형률의 임계치를 나타내고,  $\varepsilon^a = \sqrt{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}} = [\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + 2(\varepsilon_{12}^2 +$

$\epsilon_{23}^2 + \epsilon_{31}^2)^{1/2}$ 는 기지재료의 현재 유효변형률을 나타낸다. 그리고  $c_1$ 과  $c_2$ 는 미세균열의 형태와 분포상태에 따른 균열 생성변수이다.

#### 4. 수치해석

본 연구에서 제안된 입자강화 복합재료의 탄성구성모델의

적용성 검증과 주요손상변수가 복합재료의 거동예측에 미치는 영향을 조사하기 위해, 일축하중( $\sigma_{11} \neq 0, \sigma_{ij} = 0$ ) 하에서 서의 응력-변형률 관계를 수치적으로 해석하였다. 해석에 사용된 복합재료는 Zhou *et al.*(2004)에 의해 실험된  $Al_2O_3$  particle-reinforced Mg-Al matrix composites이며, 복합재료의 물성치는 다음과 같다:  $E_m=73GPa, \nu_m=0.33, E_p=400GPa, \nu_p=0.24, \phi_p=0.48$ . 여기서,  $m$ 과  $p$ 는 각

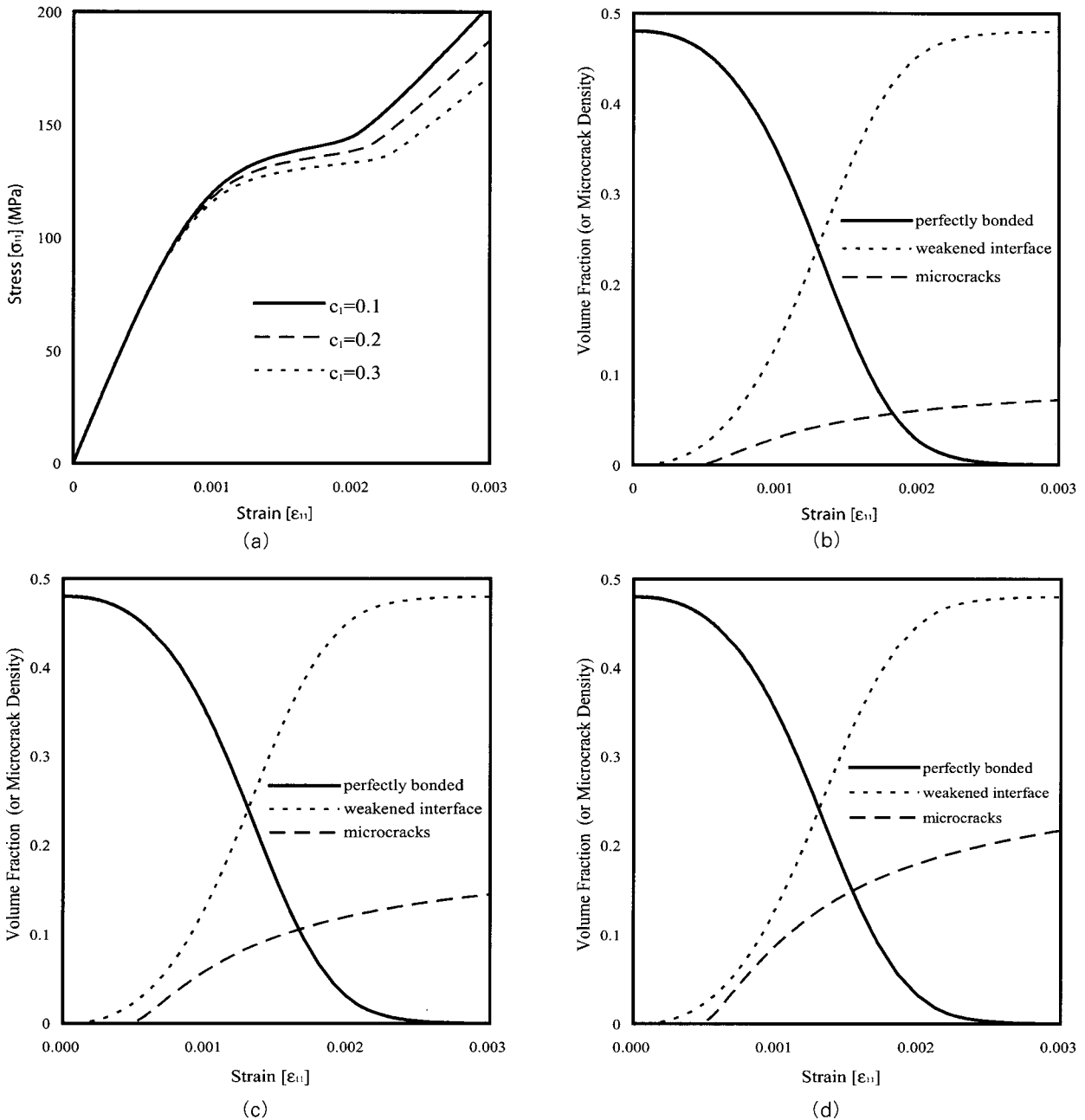


Fig. 3 (a) The present predicted stress-strain responses of particle-reinforced composites under uniaxial tension with various  $c_1$  values; (b) The predicted evolutions of volume fractions of particles and microcrack density corresponding to (a) ( $c_1=0.1$ ); (c) The predicted evolutions of volume fractions of particles and microcrack density corresponding to (a) ( $c_1=0.2$ ); (d) The predicted evolutions of volume fractions of particles and microcrack density corresponding to (a) ( $c_1=0.3$ )

각 기지재료(matrix)와 보강입자(particle)를 나타내며,  $\phi_p$ 는 보강입자의 체적비를 나타낸다. Karihaloo and Fu (1989)에 의해 제안된 균열생성 상수들이 응력-변형을 관계에 미치는 영향을 조사하기 위해 다음과 같은 균열생성변수의 세트를 적용하였다 :  $c_1=0.1, c_2=2.0$ ;  $c_1=0.2, c_2=2.0$ ;  $c_1=0.3, c_2=2.0$ ;  $c_1=0.1, c_2=1.0$ ;  $c_1=0.1, c_2=3.0$ ;  $c_1=0.1, c_2=5.0$ . Lee and Pyo (2007)에 의해 검증된 식 (4)의 접선방향과 수직방향의 컴플라이언스  $\alpha$ 와  $\beta$ 의 결과 중 가장 손상이 큰 경우인  $\alpha=2.0, \beta=3.0$ 을 적용하였고, 식 (9)의 Weibull 상수  $\bar{S}_0$ 와  $\bar{M}$ 는  $\bar{S}_0=500\text{MPa}$ ,  $\bar{M}=2.5$ 로 가정하였다. 미세균열의 형상비( $v$ )는 100으로 가정하였으며, 변형률의 임계치( $\epsilon^{th}$ )는 0.0005로 가정하였다. Fig. 3(a)는  $c_1$ 이 응력-변형을 관계에 미치는 영향을 보여주고 있다. Fig. 3(b)~(d)는 (a)의 해석에 따른 완벽히 결합된 보강입자, 손상된 계면을 갖는 보강입자의 체적비 변화 및 미세균열의 밀도의 변화를 나타내고 있다. Fig. 3에서와 같이  $c_1$ 이 증가함에 따라 기지재료내 미세균열의 밀도가 증가하여 응력-변형을 곡선이 낮아지는 것을 알 수 있고,  $c_1$ 의 변화가 완벽하게 결합되어 있는 보강입자와 손상된 계면을 갖는 보강입자의 체적비 변화에 큰 영향을 미치지 않는 것을 확인할 수 있었다. 본 연구에서 제안된 모델은 탄성모델이므로 Fig. 3에서와 같이 보강입자의 상 변화가 시작되기 전에 선형이었던 응력-변형을 곡선이 상 변화가 일어남과 함께 비선형 거동을 보이고, 최종적으로 상

변화가 끝난 뒤에는 다시 선형 거동을 보였다. 다음으로  $c_2$ 가 응력-변형을 관계에 미치는 영향을 알아보기 위해 수치해석을 실시하였으며 그 결과를 Fig. 4에 나타내었다. Fig. 4(a)와 같이  $c_2$ 의 값이 감소함에 따라 응력-변형을 곡선이 낮아지는 것을 확인할 수 있었고, Fig. 4(b)는 (a)의 수치해석에 따른 미세균열 밀도의 변화를 나타내고 있다.

### 5. 실험값과의 비교

본 연구에서 제안된 탄성모델의 실제 적용가능성을 판단하고 제안된 모델의 정확도를 검증하기 위하여 Shen et al. (2001)에 의해 수행된 SiC particle-reinforced Al-Cu-Mg alloy matrix composites의 실험결과와 본 해석결과를 비교하였다. 실험에 사용된 복합재료의 물성치는 다음과 같다:  $E_m=70\text{GPa}$ ,  $\nu_m=0.33$ ,  $E_p=450\text{GPa}$ ,  $\nu_p=0.17$ ,  $\phi_p=0.20$ . 제안된 모델에서 미세균열이 미치는 영향을 조사하기 위하여 Lee and Pyo(2007)에 의해 제안된 미세균열 없이 보강입자의 상 변화만 고려한 모델(three-phase model)과 본 연구에서 제안한 미세균열의 생성을 고려한 모델(four-phase model)을 각각 실험결과와 비교하였다. 실험결과(Shen et al., 2001)와 수치해석결과와의 비교에 의한 시행착오법을 통하여 다음과 같이 모델변수를 설정하였다.

- Three-phase model:  $\alpha=2.0, \beta=3.0$ ,  
 $\bar{S}_0=1280\text{MPa}, \bar{M}=6.0$ .
- Four-phase model:  $\alpha=2.0, \beta=3.0$ .

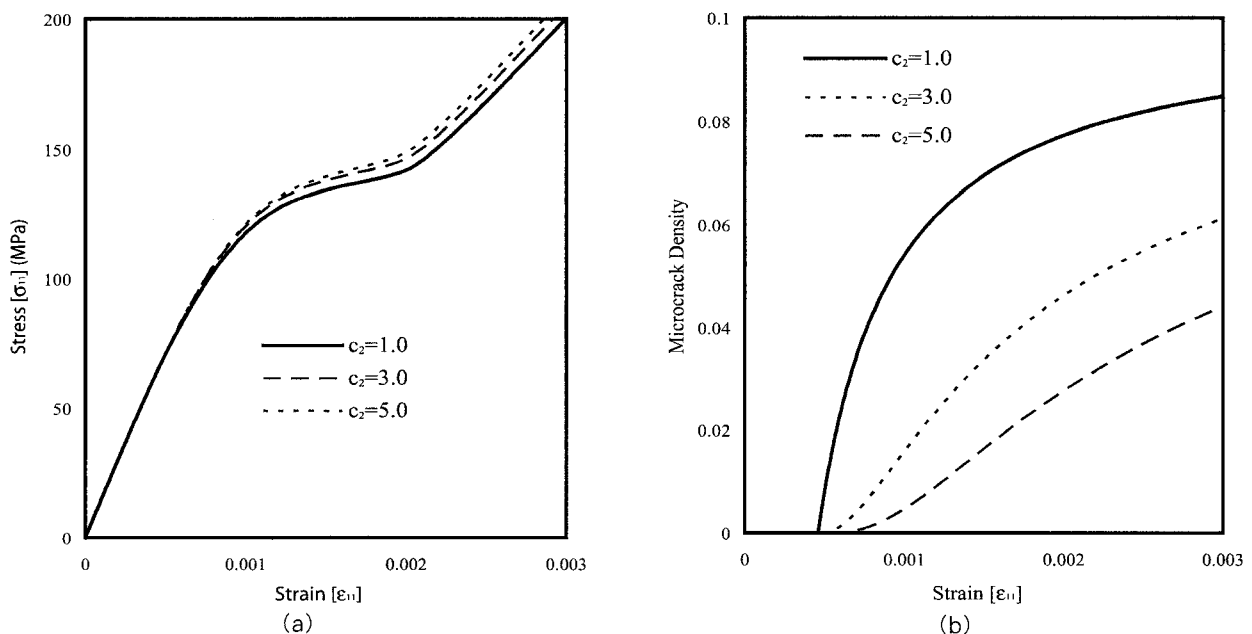


Fig. 4 (a) The present predicted stress-strain responses of particle-reinforced composites under uniaxial tension with various  $c_2$  values; (b) The predicted evolution of microcrack density corresponding to (a)

$$\bar{S}_0 = 1430 \text{MPa}, \bar{M} = 6.0, c_1 = 0.1, c_2 = 1.5, \\ \epsilon^{th} = 0.001, \gamma = 100.$$

Fig. 5(a)는 Lee and Pyo(2007)에 의해 제안된 모델과 본 연구에서 제안한 모델에 의한 수치해석결과를 실험결과 (Shen *et al.*, 2001)와 비교하여 나타내고 있다. Fig. 5(b)는 Lee and Pyo(2007)의 모델에 의해 예측된 보강입자들의 체적비 변화를 나타내고 있으며, Fig. 5(c)는 본 연구에서 제안한 모델에 의해 예측된 보강입자들의 체적비 변화 및 미세균열의 밀도변화를 나타내고 있다.

Fig. 5(a)는 제안된 모델과의 비교를 위하여 실험에 사용한 복합재료가 탄성거동을 보이는 구간( $\epsilon_{11} = 0.007$ )까지의 실험결과와 해석결과를 비교하여 보여주고 있다. Fig. 5에서와 같이 본 연구에서 제안한 모델이 Lee and Pyo(2007)에 의해 제안된 모델에 비하여 수치적으로 보다 실험결과와 잘 부합됨을 알 수 있고,  $\epsilon_{11} = 0.001$ 부근에서부터 미세균열이 증가하기 시작하여 점진적으로 비선형 거동이 시작됨을 알 수 있다.

## 6. 결 론

본 연구에서는 Lee and Pyo(2007)에 의해 제안된 구형 보강입자의 계면손상을 고려한 미세역학 탄성구성모델을 바탕으로 입자강화 복합재료의 미세균열생성을 고려한 거동해석을 수행하였다. 미세균열을 형상화하기 위해 Sun and Ju (2004)에 의해 제안된 타원형의 Eshelby 텐서를 적용하였고, 미세균열 밀도의 증가를 모사하기 위해 Karihaloo and

Fu(1989)에 의해 제안된 확률함수를 적용하였다. 계면손상을 갖는 보강입자의 체적비 변화는 Weibull 확률함수를 적용하여 모사하였다. 제안된 구성모델을 검증하기 위하여 미세균열 생성상수의 검증을 실시하였고, Shen *et al.*(2001)에 의하여 수행된 실험결과와 비교하였다.

변수검증 결과 미세균열 생성상수  $c_1$ 이 증가할수록,  $c_2$ 가 감소할수록 복합재료의 손상이 증가하였고, 미세균열의 밀도 변화가 입자강화 복합재료의 거동에 영향을 미치는 것을 확인할 수 있었다.  $c_1$ 과  $c_2$ 의 변화가 완벽하게 결합되어 있는 보강입자와 손상된 계면을 갖는 보강입자의 체적비 변화에 큰 영향을 미치지 않는 것으로 나타났다. 또한, 본 연구에서 제안한 모델이 Lee and Pyo(2007)에 의해 제안된 모델에 비하여 수치적으로 실험결과(Shen *et al.*, 2001)에 더 잘 부합됨을 알 수 있었다. 이에 본 연구에서 제안한 탄성구성모델이 여러 공학분야에서 사용되고 있는 취성의 재료를 기지로 갖는 입자강화 복합재료(particle-reinforced brittle matrix composite)의 거동해석에 효과적으로 적용될 수 있을 것으로 기대된다. 향후 좀 더 널리 사용되고 있는 연성의 특성을 갖는 복합재료의 거동을 예측하기 위해 소성구성모델 연구를 추가적으로 수행할 예정이다.

## 감사의 글

본 연구는 스마트 사회기반시설 연구센터로부터 지원된 연구비(NC 36456, R11-2006-101-02004-0)에 의해 수행되었으며, 이에 감사 드립니다.

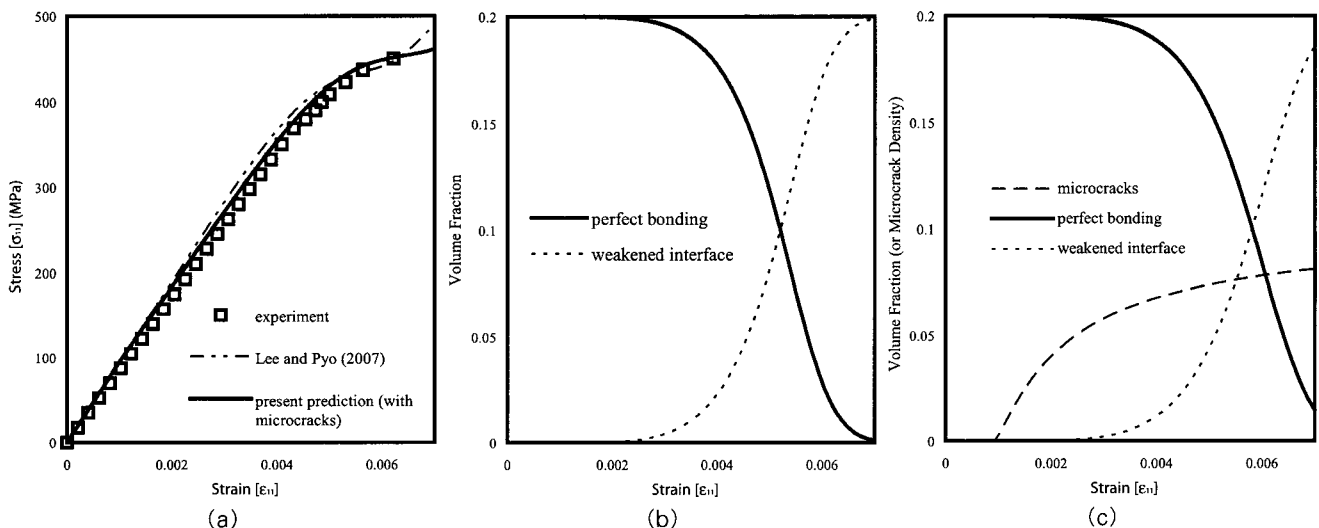


Fig. 5 (a) The comparison between the present prediction (with microcracks), Lee and Pyo (2007)'s prediction (no microcracks) and experimental data (Shen *et al.*, 2001) for overall uniaxial tensile response of SiC particle reinforced Al-Cu-Mg alloy matrix composites; (b) The predicted evolution of volume fraction of particles corresponding to Lee and Pyo (2007)'s prediction in (a); (c) The predicted evolutions of volume fraction of particles and microcrack density corresponding to the present prediction in (a)

## 참 고 문 헌

- 김동섭 (1996) 복합재료의 기술동향, 농업기술정보원 보고서.
- 김태우, 박상환 (2001) 세라믹/금속기지 복합재료의 특성예측을 위한 미시역학적 유한요소해석, 한국세라믹학회지, 38(6), pp.575~581.
- 진민철, 염영진, 주영우 (2002) 계면이 분리된 복합재료의 기계적 성질 연구, 울산대학교 공학연구논문집, 33(1), pp.51~67.
- 장병국, 우상국 (1999) Microcracking에 의한 복합재료의 고인성화 특성, 한국재료학회지, 9(2), pp.132~138.
- Caiazzo, A. A., Costanzo, F. (2000) On the constitutive relations of materials with evolving microstructure due to microcracking, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 19(2), pp.152~163.
- Carman, G. P., Reifsnider, K. L. (1992) Micromechanics of short-fiber composites, *Composites Science and Technology*, 43(2), pp.137~146.
- Cho, J., Joshi, M. S., Sun, C. T. (2006) Effect of inclusion size on mechanical properties of polymeric composites with micro and nano particles, *Composites Science and Technology*, 66, pp.1941~1952.
- Ju, J. W., Chen, T. M. (1994) Micromechanics and effective elastoplastic behavior of two-phase metal matrix composites, *Journal of Engineering Materials and Technology*, 116, pp.310~318.
- Karihaloo, B. L., Fu, D. (1989) A damage-based constitutive law for plain concrete in tension, *European Journal of Mechanics, A-Solids*, 8, pp.373~384.
- Lamon, J. (2001) A micromechanics-based approach to the mechanical behavior of brittle-matrix composites, *Composites Science and Technology*, 61(15), pp.2259~2272.
- Lee, H. K., Pyo, S. H. (2007) Micromechanics-based elastic damage modeling of particulate composites with weakened interfaces, *International Journal of Solids and Structures*, 44, pp.8390~8406.
- Shen, Y. L., Williams, J. J., Piotrowski, G., Chawla, N., Guo, Y. L. (2001) Correlation between tensile and indentation behavior of particle-reinforced metal matrix composites: an experimental and numerical study, *Acta Materialia*, 49, pp.3219~3229.
- Sun, L. Z., Ju, J. W. (2004) Elastoplastic modeling of metal matrix composites containing randomly located and oriented spheroidal particles, *Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME*, 71, pp.774~785.
- Weibull, W. (1951) A statistical distribution function of wide applicability, *Journal of Applied Mechanics*, 18, pp.293~297.
- Zhou, C. W., Yang, W., Fang, D. N. (2004) Mesofracture of metal matrix composites reinforced by particles of large volume fraction, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 41, pp.311~326.

부 록

식 (7)와 (8)의  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_4$  과  $\Lambda_{IK}^{(5)}, \Lambda_{IJ}^{(6)}$  는 다음과 같다.

$$\Lambda_1 = 15(1-\nu_0)\phi_1 \left\{ \frac{\psi_1(2\xi_2 - 1) + \xi_1(3\psi_1 + 2\psi_2)}{2\psi_2(3\psi_1 + 2\psi_2)(1-2\xi_2)(1-3\xi_1 - 2\xi_2)} \right\}, \quad \Lambda_2 = \frac{15(1-\nu_0)\phi_1}{4\psi_2(1-2\xi_2)} \quad (12)$$

$$\Lambda_3 = 600a(1-\nu_0)^2\phi_2 \left\{ \frac{\psi_3(2\xi_4 - 1) + \xi_3(3\psi_3 + 2\psi_4)}{\psi_4(3\psi_3 + 2\psi_4)(1-2\xi_4)(1-3\xi_3 - 2\xi_4)} \right\}, \quad \Lambda_4 = \frac{300a(1-\nu_0)^2\phi_2}{\psi_4(1-2\xi_4)} \quad (13)$$

$$\Lambda_{IK}^{(5)} = \phi_3 \left[ 2\psi_{IK}^{(5)}\omega_{KK}^{(2)} + 2\psi_{II}^{(6)}\omega_{IK}^{(1)} + \sum_{n=1}^3 \psi_{In}^{(5)}\omega_{nK}^{(1)} \right], \quad \Lambda_{IJ}^{(6)} = 2\phi_3\psi_{IJ}^{(6)}\omega_{IJ}^{(2)} \quad (14)$$

여기서

$$\omega_{IK}^{(1)} = \frac{W_{IK}}{1-2\xi_{II}^{(6)}}, \quad \omega_{IJ}^{(2)} = \frac{1}{2-4\xi_{IJ}^{(6)}} \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} W_{I1} \\ W_{I2} \\ W_{I3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\xi_{11}^{(5)}-2\xi_{11}^{(6)} & -\xi_{21}^{(5)} & -\xi_{31}^{(5)} \\ -\xi_{12}^{(5)} & 1-\xi_{22}^{(5)}-2\xi_{22}^{(6)} & -\xi_{32}^{(5)} \\ -\xi_{13}^{(5)} & -\xi_{23}^{(5)} & 1-\xi_{33}^{(5)}-2\xi_{33}^{(6)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \xi_{I1}^{(5)} \\ \xi_{I2}^{(5)} \\ \xi_{I3}^{(5)} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$\xi_1 = \frac{\phi_1}{2\psi_2} \left\{ \frac{-5\psi_1(1+\nu_0)}{3\psi_1+2\psi_2} + 5\nu_0 - 1 \right\}, \quad \xi_2 = \frac{\phi_1(4-5\nu_0)}{2\psi_2} \quad (17)$$

$$\xi_3 = \frac{\phi_2}{2\psi_4} \left\{ \frac{-\psi_3(3\chi_1+2\chi_2)}{3\psi_3+2\psi_4} + \chi_1 \right\}, \quad \xi_4 = \frac{\phi_2\chi_2}{2\psi_4} \quad (18)$$

$$\xi_{IK}^{(5)} = \phi_3 \left[ 2S_{IK}^{(1)}\psi_{KK}^{(6)} + 2S_{II}^{(2)}\psi_{IK}^{(5)} + \sum_{n=1}^3 S_{In}^{(1)}\psi_{nK}^{(5)} \right], \quad \xi_{IJ}^{(6)} = 2\phi_3 S_{IJ}^{(2)}\psi_{IJ}^{(6)} \quad (19)$$

$$\psi_1 = \frac{15(1-\nu_0)(\mu_1\lambda_0 - \mu_0\lambda_1)}{(\mu_1 - \mu_0)\{3(\lambda_1 - \lambda_0) + 2(\mu_1 - \mu_0)\}} + 5\nu_0 - 1, \quad \psi_2 = \frac{\mu_0(7-5\nu_0) + 2\mu_1(4-5\nu_0)}{2(\mu_1 - \mu_0)} \quad (20)$$

$$\psi_3 = \frac{1200a(1-\nu_0)^2(\mu_2\lambda_0 - \mu_0\lambda_2)}{(\mu_2 - \mu_0)\{3(\lambda_2 - \lambda_0) + 2(\mu_2 - \mu_0)\}} + \chi_1, \quad \psi_4 = \frac{600a(1-\nu_0)^2\mu_0}{\mu_2 - \mu_0} + \chi_2 \quad (21)$$

$$\psi_{IK}^{(5)} = -\frac{Y_{IK}}{-1+2S_{II}^{(2)}}, \quad \psi_{IJ}^{(6)} = \frac{1}{-2+4S_{IJ}^{(2)}} \quad (22)$$

$$\begin{Bmatrix} Y_{I1} \\ Y_{I2} \\ Y_{I3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+S_{11}^{(1)}+2S_{11}^{(2)} & S_{21}^{(1)} & S_{31}^{(1)} \\ S_{12}^{(1)} & -1+S_{22}^{(1)}+2S_{22}^{(2)} & S_{32}^{(1)} \\ S_{13}^{(1)} & S_{23}^{(1)} & -1+S_{33}^{(1)}+2S_{33}^{(2)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} S_{I1}^{(1)} \\ S_{I2}^{(1)} \\ S_{I3}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (I = 1, 2, 3) \quad (23)$$

$$\chi_1 = (-80 + 480\nu_0 - 400\nu_0^2)a + 500(1-2\nu_0)^2\lambda_0\beta + (-98 + 140\nu_0 - 50\nu_0^2)\mu_0\alpha + (268 - 1240\nu_0 + 1300\nu_0^2)\mu_0\beta \quad (24)$$

$$\chi_2 = (320 - 720\nu_0 + 400\nu_0^2)a + \mu_0(3\alpha + 2\beta)(7-5\nu_0)^2 \quad (25)$$