

대형 시스템에서의 다단계 부분구조 기법을 이용한 시스템 축소기법에 관한 연구

Study on the Structural System Condensation Using Multi-level Sub-structuring Scheme in Large-scale Problems

백 승 민* 조 맹 효* 김 현 기**
Baek, Sung-Min Cho, Maenghyo Kim, Hyun-Gi
(논문접수일 : 2008년 6월 13일 ; 심사종료일 : 2008년 6월 17일)

요 지

축소시스템 기법은 전체 구조의 거동을 나타내는 저차 고유모드를 근사화한다. 지난 연구에서 축소시스템을 구축하기 위한 2단계 축소기법을 제안하였다. 또, 기존의 2단계 축소기법을 반복적 IRS기법을 통해 중간 주파수 대역의 고유모드에 대한 해의 정확도를 높이는 방안에 대해 연구가 제안되었다. 본 연구에서는 기존의 향상된 2단계 축소기법에 다단계 부구조화 기법을 적용하는 기법을 제안한다. 첫 단계에서는 전체 시스템을 그래프 분할을 통해 계층적으로 부구조로 분할되고, 두번째 단계에서는 각각의 부구조를 개선된 2단계 축소기법을 이용하여 축소한다. 각각의 축소된 분절화된 고유치문제의 조합을 통해 최종적 축소시스템을 구축하고 이렇게 구한 축소된 고유치 문제를 란초스 기법(ARPACK)을 통해 해석한다. 최종적으로 제안된 기법의 성능을 수치 예제를 통해 검증한다.

핵심용어 : 고유치 문제, 시스템 축소, 다단계 부구조화, 2단계 축소기법

Abstract

Eigenvalue reduction schemes approximate the lower eigenmodes that represent the global behavior of the structures. In the previous study, we proposed a two-level condensation scheme (TLCS) for the construction of a reduced system. And we have improved previous TLCS with combination of the iterated improved reduced system method (IIRS) to increase accuracy of the higher modes intermediate range. In this study, we apply previous improved TLCS to multi-level sub-structuring scheme. In the first step, the global system is recursively partitioned into a hierarchy of sub-domain. In second step, each uncoupled sub-domain is condensed by the improved TLCS. After assembly process of each reduced sub-eigenvalue problem, eigen-solution is calculated by Lanczos method (ARPACK). Finally, Numerical examples demonstrate performance of proposed method.

Keywords : *eigenvalue problem, system condensation, multilevel-substructuring, two-level condensation scheme(TLCS)*

1. 서 론

시스템의 거동에 대한 보다 정확한 예측을 위해 해석대상은 복잡, 대형화 되고 있으며, 해석과정에서도 고려해야 할 조건과 설계변수 등이 증가되고 있는 추세다. 이런 요구들은 전산 시스템의 비약적인 발전에도 불구하고 최적화 문제 또는 동적 해석 등에서 상당한 전산자원과 많은 연산시간을 요구하기 때

문에 해석과정에서 많은 제약의 원인이 되고 있다. 이런 문제로 구조물의 신뢰성을 유지하면서 시간비용과 전산자원의 문제를 개선하고자 하는 연구들이 과거부터 많이 진행되어 왔다. 이와 관련한 연구 중에서 가장 널리 제안 되어온 것이 축소모델을 구성하는 방법이다. 구조 동역학 분야에서는 해석모델의 축소를 크게 모드 기반 축소와 자유도 기반 축소로 분류한다. 대표적인 모드 기반 축소기법인 부분구조합성법(component

† 책임저자, 학생회원 · 서울대학교 기계항공공학부 박사과정

* 교신저자, 정회원 · 서울대학교 기계항공공학부 교수

Tel: 02-880-1693 ; Fax: 02-886-1645

E-mail: mhcho@snu.ac.kr

** 한국항공우주연구원

• 이 논문에 대한 토론을 2008년 8월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2008년 10월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

mode synthesis)은 Craig(1968)에 의해 제안된 이래로 최근 Bennighof(2004)에 의해 개발된 automated multi-level sub-structuring method(AMLS)로 까지 발전하였다. 일반적으로, 모드 기반 축소기법은 구축과정이 간편하다는 장점이 있으나, 모드 절삭 효과로 인해 구조물의 거동에 중요한 영향력을 갖는 고차모드를 포함하지 않아 정확도의 신뢰성을 떨어뜨리는 문제를 가지고 있다. 이를 해결하는 방법으로 축소 과정에서 사용되는 임의의 변형모드를 추가하거나 포함하는 모드의 개수를 증가시키는 방법이 있으나, 이는 해석의 안정성이나 모드기반 축소방법의 효율성에 악영향을 미치기도 한다.

이에 비해 자유도 기반의 축소 기법들은 고차모드의 영향력까지 근사화 되므로 모드기반 방법보다 해의 신뢰도에 있어서 우수성을 보인다. 자유도 기반의 축소기법은 처음 제안된 정적 축소 기법(Guyan, 1965) 이후, 다양한 기법들이 제안되어 왔다(O'callahan, 1989; Friswell 등, 1998; Zhang 등, 1995). 각각의 기법들은 서로 다른 수준의 자유도 변환 오차를 가지고 있기에 해석 대상에 따라 적절한 기법의 선정이 필요하다. 또한 자유도 기반 축소기법은 주자유도를 기초로 시스템을 구축하기 때문에, 구조물에서 중요 자유도를 적절히 선택하는 것이 매우 중요하며, 이는 해의 정확성과 수렴성에 상당한 영향을 미친다.

주자유도 선정기법으로 순차적 소거법(Shah 등, 1982)은 정확도 면에 있어서 가장 신뢰할 만한 결과를 제공하지만 시스템의 크기에 따라 계산시간이 기하급수적으로 증가한다. 이를 해결하기 위해 제안된 2단계 축소 기법(two-level condensation scheme, TLCS; Cho 등, 2004)은 요소단위 에너지 평가방법과 순차적 소거법을 연동하여 주자유도를 선정함으로써 기존방법을 통한 축소과정에서 문제가 되었던 계산시간의 문제점을 획기적으로 개선하였다. 기법의 적용을 확장하여, 최근 부구조화 기법(sub-structuring scheme)과의 연동을 통해 전산 메모리의 효율적 이용과 계산시간 절감이라는 성과를 얻었고(Kim 등, 2006), 민감도 해석(Kim 등, 2006), 역문제(백승민 등, 2007) 등에 접목하여 괄목할 만한 결과를 도출하였으며, IIRS기법(Friswell 등, 1998)과의 연동을 통하여 효과적인 주파수 예측 또한 가능해졌다(백승민 등, 2007).

본 연구에서는 구조물에 대해 적절한 영역분할을 수행하고, 각 영역에서 TLCS와 IIRS 기법을 사용하여 축소모델을 구축한 후 최종적으로 전체시스템의 축소모델을 구축하는 다단계 시스템 축소법(Multi-level sub-structuring scheme)을 제안한다. 제안된 방법은 기존 축소방법의 효율성을 개선하면서 해의 신뢰성을 보장하고, PC환경에서 해석가능한 자유도의 크

기를 상당히 증가시킬 수 있는 방법이다. 수치예제에서 제안된 기법과 모드 기반 AMLS 기법으로부터 구해진 고유치 해석결과를 비교하여 그 효율성과 신뢰성에 대하여 고찰한다.

2. 다단계 시스템 축소기법

2.1 Craig-Bampton 변환

본 절에서는 단일 단계(single-level)의 부구조(substructure) 예시를 통해 MLSC를 설명하고자 한다. 비감쇠 자유진동계의 지배방정식을 그래프 분할 프로그램(Karypis, 1998)을 통해 행렬분할을 하면 식 (1)과 같다. 이때, 각 부구조 내부는 S_i ($i=1,2$), 부구조 사이의 경계영역(interface region)은 I 로 나타내진다.

$$\begin{bmatrix} K_{S_1} & 0 & K_{S_1 I} \\ 0 & K_{S_2} & K_{S_2 I} \\ K_{S_1 I}^T & K_{S_2 I}^T & K_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{S_1} \\ x_{S_2} \\ x_I \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} M_{S_1} & 0 & M_{S_1 I} \\ 0 & M_{S_2} & M_{S_2 I} \\ M_{S_1 I}^T & M_{S_2 I}^T & M_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{S_1} \\ x_{S_2} \\ x_I \end{Bmatrix} \quad (1)$$

분할된 전체시스템에서 식 (2)의 연산자를 통해 Craig Bampton 변환을 수행하면 식 (3)의 블록 대각화된 식들을 얻을 수 있다.

$$U = \begin{bmatrix} I_{S_1} & 0 & -K_{S_1}^{-1}K_{S_1 I} \\ 0 & I_{S_2} & -K_{S_2}^{-1}K_{S_2 I} \\ 0 & 0 & I_I \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\tilde{K} = U^T K U = \text{diag} [K_{S_1} \quad K_{S_2} \quad \tilde{K}_I] \quad (3a)$$

$$\tilde{M} = U^T M U = \begin{bmatrix} M_{S_1} & 0 & M_{S_1 I} - M_{S_1} K_{S_1}^{-1} K_{S_1 I} \\ & M_{S_2} & M_{S_2 I} - M_{S_2} K_{S_2}^{-1} K_{S_2 I} \\ \text{symm} & & \tilde{M}_I \end{bmatrix} \quad (3b)$$

여기서,

$$\tilde{K}_I = K_I - \sum_{i=1}^2 (K_{S_i I}^T K_{S_i}^{-1} K_{S_i I}) \quad (3c)$$

$$\tilde{M}_I = M_I - \sum_{i=1}^2 (K_{S_i I}^T K_{S_i}^{-1} M_{S_i I} + M_{S_i I}^T K_{S_i}^{-1} K_{S_i I} - K_{S_i I}^T K_{S_i}^{-1} M_{S_i} K_{S_i}^{-1} K_{S_i I}) \quad (3d)$$

식 (3a)와 식 (3b)의 대각항에서 근사화된 고유치 문제들을 얻으면 다음과 같다.

$$K_{S_i} \tilde{x}_{S_i} - \lambda_{S_i} M_{S_i} \tilde{x}_{S_i} = 0, \quad K_{\tilde{K}_I} \tilde{x}_I - \lambda_{\tilde{K}_I} M_{\tilde{K}_I} \tilde{x}_I = 0 \quad \text{where } i=1,2 \quad (4)$$

2.2. 반복적 IRS와 주자유도 선정

각각의 분절화(uncoupled)된 고유치 문제들은 주자유도와 부자유도로 나누어 식 (5)로 재구성할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{pp} & K_{ps} \\ K_{ps}^T & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_p \\ x_s \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} M_{pp} & M_{ps} \\ M_{ps}^T & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_p \\ x_s \end{Bmatrix} \quad (5)$$

식 (5)의 부자유도 부분에서 $x_s = tx_p$ 의 가정과 내연적 반복연산과정을 통해 식 (6)의 자유도 변환 관계식을 얻을 수 있으며, 전체시스템에 대한 자유도 변환행렬은 $T^{(k)} = [I \ t^{(k)}]^T$ 이다. 이때, k 는 각 반복연산 단계를 의미한다.

$$t^{(k)} = -K_{ss}^{-1}K_{ps}^T + K_{ss}^{-1}(M_{ps}^T - M_{ss}t^{(k-1)})(M^{R(k-1)})^{-1}K^{R(k-1)} \quad (6)$$

이를 통해 각각의 고유치 문제는 최종적으로 다음과 같이 축소된다.

$$K^{R(k)}x_p = \lambda M^{R(k)}x_p \quad (7a)$$

$$K^{R(k)} = T^{(k)T}KT^{(k)} = K_{pp} + K_{ps}t^{(k)} + t^{(k)T}K_{ps}^T + t^{(k)T}K_{ss}t^{(k)} \quad (7b)$$

$$M^{R(k)} = T^{(k)T}MT^{(k)} = M_{pp} + M_{ps}t^{(k)} + t^{(k)T}M_{ps}^T + t^{(k)T}M_{ss}t^{(k)} \quad (7c)$$

서론에서 언급한 바와 같이, 자유도 기반의 축소는 주자유도의 선정이 매우 중요하다. 전체 영역에서 IIRS와 연동한 TLCS 기법을 이용하여 주자유도를 선정하였는데, 경계영역의 경우 요소별 에너지 평가가 불가능하기 때문에 TLCS의 두 번째 단계만을 이용하여 주자유도를 선정하였다(백승민 등, 2007).

2.3. 최종 축소 시스템 결합과 다단계 경우로의 확장

최종적으로 지배방정식 (1)의 축소시스템은 식(8)과 같이 변환된다. 이때, 전체 모드벡터 x 는 식(9)와 같이 주자유도로 표현되고, 주자유도 개수는 $n^p = n_s^p + n_s^p + n_l^p$ 으로 전체의 2%이내이다.

$$\begin{bmatrix} T_s^T K_s T_s & 0 & 0 \\ 0 & T_s^T K_s T_s & 0 \\ 0 & 0 & T_l^T \tilde{K}_l T_l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{x}_s^p \\ \tilde{x}_s^p \\ x_l^p \end{Bmatrix}$$

$$= \lambda^R \begin{bmatrix} T_s^T M_s T_s & 0 & T_s^T (M_{s,l} - M_s K_s^{-1} K_{s,l}) T_l \\ T_s^T M_s T_s & T_s^T (M_{s,l} - M_s K_s^{-1} K_{s,l}) T_l & \\ symm & & T_l^T \tilde{K}_l T_l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{x}_s^p \\ \tilde{x}_s^p \\ x_l^p \end{Bmatrix} \quad (8)$$

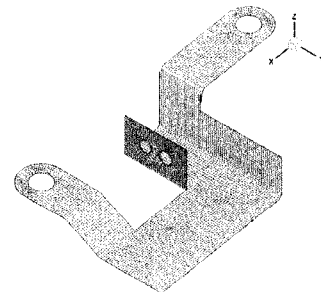
$$x = \begin{Bmatrix} x_s \\ x_s \\ x_l \end{Bmatrix} = U \begin{Bmatrix} \tilde{x}_s \\ \tilde{x}_s \\ x_l \end{Bmatrix} = U \begin{bmatrix} T_s & 0 & 0 \\ 0 & T_s & 0 \\ 0 & 0 & T_l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{x}_s^p \\ \tilde{x}_s^p \\ x_l^p \end{Bmatrix} \quad (9)$$

대수학적 관점에서 다단계 방법은 기본적으로 단일단계 부구조 방법과 동일하다. 그러나 다단계 방법에서 각 부구조 영역 사이의 경계 정보들은 계층적 성질을 가지고 있으므로 경계영역을 트리(tree)형태의 정보망을 통해 회귀적으로 연산을 수행한다. 이렇게 결합된 최종 축소시스템은 란초스 방법(Lehoucq 등, 2004)을 이용하여 고유치 해석을 수행하였다.

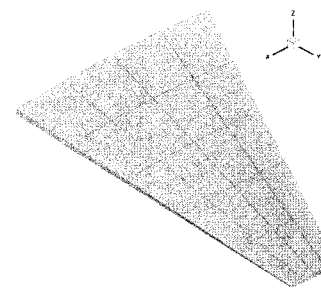
3. 수치예제

본 연구에서 제안한 기법의 효율성을 그림 1의 수치예제를 통해서 검증한다. 첫 번째 예제는 그림 1(a)의 브래킷 모델로 6,477개의 요소로 이루어졌으며, 전체 자유도는 40,182개이다. 5단계의 그래프 분할을 통해 32개의 부구조로 나누었다.

두 번째 예제는 그림 2(b)의 항공기 날개 모델로 33,156개의 요소로 구성되었으며, 전체 자유도는 193,890개이다.

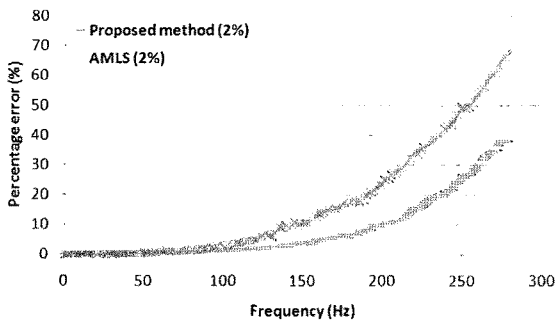


(a) 예제 1 - 브래킷 모델

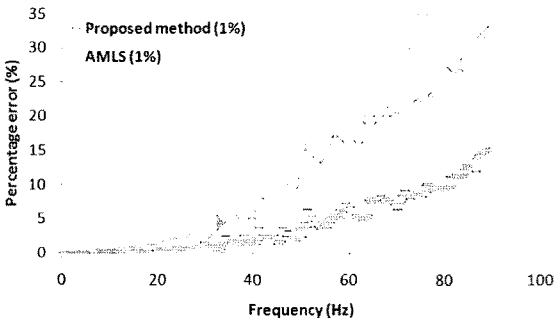


(b) 예제 2 - 날개 모델

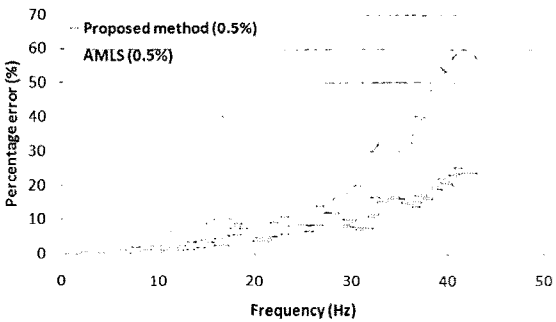
그림 1 수치 예제의 유한요소 해석 모델링



(a) 2% 축소($n^p=828$, 600 모드)



(b) 1% 축소($n^p=398$, 200 모드)



(c) 0.5% 축소($n^p=197$, 100 모드)

그림 2 축소된 시스템 크기에 따른 고유진동수의 상대오차 비교(브래킷 모델)

7단계의 그래프 분할을 통해 128개의 부구조로 나누었다. 두 예제 모두 6 자유도 쉘 요소(Aminpour, 1998)를 사용하였다. 고유 진동수 오차는 전체시스템의 결과와 축소시스템의 결과 사이의 상대 백분율 오차로 계산되었다. 이후 그림에서 'X'표시는 기존의 AMLS기법(Benninghoff, 2004)의 결과이고 '-'표시는 본 연구에서 제안하는 기법의 결과이다.

브래킷 모델의 경우 최종 축소시스템의 크기를 다르게 하여 AMLS기법과 비교를 하였다. 그림 2와 같이, 전체시스템 대비 2%, 1%, 0.5% 크기의 축소 시스템을 구성하였고, 각 경우에 600개, 200개, 100개의 고유모드를 추출하였다. 그림 2(a)와 같이 축소시스템의 크기가 클 경우, 제안된 기법은 중간 주파수 대역에서도 상대적으로 정확한 결과를 제공

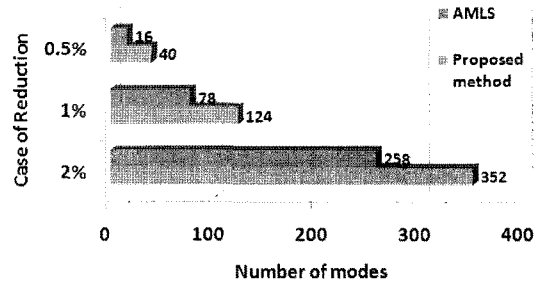


그림 3 5%이내의 고유 진동수 오차를 가지는 모드 개수 (브래킷 모델)

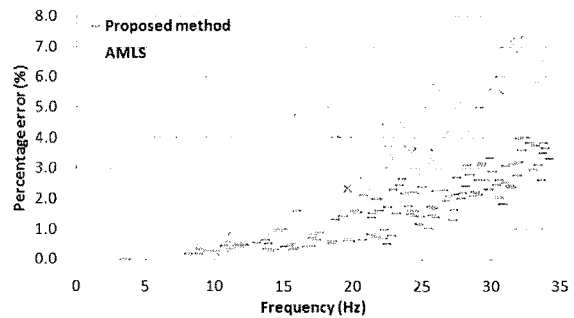


그림 4 날개 모델의 고유 진동수 오차($n^p=1,276$, 120 모드)

하고 있음을 알 수 있다. 또한, 그림 2(b)와 (c)처럼 축소시스템의 크기가 작아지는 경우에서도 안정적이고 신뢰할 만한 결과를 제공하고 있는 것을 확인할 수 있다. 그림 3과 같이 오차범위를 5%로 설정한 경우에서도 제안된 기법은 AMLS 기법보다 더 많은 고유진동수에 대해서 신뢰도를 보장하고 있음을 알 수 있다. 계산시간에서는 AMLS기법은 37초, 제안된 기법이 118초를 소요하였으나, 전체시스템 해석이 1,978초를 소요하는 것에 비하면 그 차이는 미미하다.

항공기 날개 모델은 주자유도는 1,276개-전체 시스템 대비 0.7%-를 선정하였고, 120개의 고유모드를 추출하였다. 이전 모델보다 전체 시스템의 크기가 큰 문제이고, 적은 수의 고유모드를 해석하였음에도 불구하고, 35Hz이하의 저차 모드에서 제안된 기법은 AMLS 보다 신뢰성 있는 결과를 도출하는 것을 볼 수 있다.

이는 정확도의 경향성이 브래킷 예제와 동일하다는 것을 의미한다. 계산시간의 경우, 전체 시스템 해석이 56,815초가 소요된 것에 비해 AMLS는 370초, 제안된 기법은 542초가 소요되었는데, 전체 해석시간 대비 AMLS와 제안된 기법에서 소요된 시간은 매우 미미한 것으로 사료된다.

4. 결 론

본 연구에서는 IIRS와 TLCS기법, 영역분할 기법을 연동하여 동적해석에 있어서 매우 효율적이고 신뢰성 높은 시스

템을 구축할 수 있는 다단계 축소기법을 제안하였다. 제안된 방법은 그래프 분할 프로그램을 통해 시스템을 분할하고 Craig-Bampton 변환을 통해 대각화 과정을 거친다. 대각화의 분절화된 고유치 문제를 IIRS와 TLCS를 통해서 축소를 하고, 축소된 세부 고유치 문제를 결합한 후 란초스 기법 (ARPACK)을 통해서 최종적인 고유치 해석을 수행하였다. 수치예제를 통해서 제안된 기법의 성능을 검증하였고, 기존의 AMLS기법과 비교하였을 때, 제안된 기법은 계산 효율성을 보전하는 동시에 해의 정확성이 우수함을 확인할 수 있었으며, 이러한 경향은 최종 시스템의 크기가 작아질수록 두드러지는 것을 확인하였다.

감사의 글

본 연구는 방위사업청과 국방과학연구소의 지원으로 수행되었습니다. (계약번호 UD070041AD)

참 고 문 헌

- 백승민, 김기욱, 조맹효** (2007) 동적 해석의 효율적 해석 기법에 관한 연구, 한국전산구조공학회 논문집, 20(3), pp.347~352.
- 백승민, 김현기, 김기욱, 조맹효** (2007) 반복적 IRS를 이용한 구조 시스템 식별, 한국전산구조공학회 논문집, 20(1), pp.65~73.
- Aminpour, M.A.** (1992) Direct Formulation of a Hybrid 4-Node Shell Element with Drilling Degrees of Freedom, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 35, pp.997~1013.
- Bennighof, J.K., Lehoucq, R.B.** (2004) An Automated Multilevel Substructuring Method for Eigenspace Computation in Linear ElastoDynamics, *SIAM J. Sci. Comput.*, 25(6), pp.2084~2106.
- Cho, M., Kim, H.** (2004) Element-Based Node Selection Method for Reduction of Eigenvalue problem, *AIAA J.*, 42(8), pp.1677~1684.
- Craig, Jr. R.R., Bampton, M. C.C.** (1960) Coupling of substructures for dynamic analysis, *AIAA J.*, 6(7), pp.1313~1319.
- Friswell, M.I., Garvey, S.D., Penny, J.E.T.** (1998) The convergence of the iterated IRS method, *J. Sound Vibr.*, 211(1), pp. 123~132.
- Guyan, R.J.** (1965) Reduction of stiffness and mass matrices, *AIAA J.*, 3(2), pp.380.
- Karypis, G.** (1998) MeTiS Ver.4.0, <http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/views/metis>, University of Minnesota
- Kim, H., Cho, M.** (2006) Improvement of Reduction Method Combined with Sub-domain Scheme in Large scale Problem, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 70(2), pp.206~251.
- Kim, H., Cho, M.** (2006) Two-level scheme for selection of primary degrees of freedom and semi-analytic sensitivity based on the reduced system, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 195, pp.4244~4268.
- Lehoucq, R., Sorensen, D. C., Yang, C.** (2004) ARPACK user's Guide: Solution of Large-Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Method, SIAM, Philadelphia.
- O'callahan, J.** (1989) A Procedure for an improved reduced system(IRS) model, *Proceedings of 7th International Modal Analysis Conference*, pp.17~21.
- Shah, V.N., Raymund, M.** (1982) Analytical selection of masters for the reduced eigenvalue problem, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 18(1), pp.89~98.
- Zhang, D.W., Li, S.** (1995) Succession-level approximate reduction(SAR) technique for structural dynamic, *model Analysis conference*(Nashville, TN), Union college press, NY, pp.435~441.