시간의 흐름에 따른 무조건부 주가분산과 주가형성

이 일 균*

요 약

주식 수익률이 정상적 과정이 아니라 비정상적 과정에 의해서 생성되고 있다는 사실이 여러 실증 분석에서 제시되고 있다. 시계열의 평균이 시간의 흐름에 따라 변하면 이 시계열은 비정상적 과정에 의하여 생성된다. 시간의 흐름에 따라 평균이 변하는 비정상 시계열은 단위근과 공적분에 의하여 시계열의 운동을 모형화하고 있다. 한편 시계열의 비정상성은 분산이 시간의 흐름에 따라 변할 때에도 발생한다. 시간의 흐름에 따라 무조건부 분산은 변하지 않고 있지만 이용 가능한 정보 집합을 조건으로 하는 조건부 분산이 변하는 경우도 있다. 이 같은 성질을 가진 주가 시계열은 자기회귀 조건부 이분산(ARCH) 계통의 과정으로 모형화하고 있다. 그러나 무조건부 분산이 시간의 흐름에 따라 변하면 ARCH 계통은 중대한 모형정립 과오(misspecification)에 직면하게 된다. 따라서 본 논문은 무조건부 분산이 시간의 흐름에 따라 변할 때 자기 회귀 과정의 모수를 추정하는 방법을 검토하고, 이 방법을 한국 종합주가 지수에 적용하여 자기회귀 과정의 모수를 추정하였다. 이 방법에 의하여 추정된 2계 자기회귀 과정의 모수값 중 상수항과 제1계 항의 계수는 통상 최소자승법에 의한 값과 유사하다. 그러나 제2계 항 모수의 값은 양자가 상당히 다르다. 최소자승에 의한 제2계 값이 과대 추정되고 있다.

Ⅰ. 서 론

주가 시계열은 확률변수이므로 평균과 분산을 갖는 확률분포에 의하여 생성된다. 주가의 확률분포는 흔히 대수정규분포라고 가정되며 주식 수익률의 분포

* 명지대학교 경영학과

는 정규분포로 상정되고 있다. 주가가 정상적 과정에 의하여 생성된다는 가정 아래에서 주가시계열은 자기회귀 과정, 자기회귀 이동평균 과정, 정수적분 자기회귀 이동평균 과정을 사용하여 모형화하고 있다. 그런데 주가나 주식 수익률이 정상적 과정이 아니라 비정상적 과정에 의하여 생성돠고 있다는 사실이 여러 실증분석에서 제시되고 있다. 한 시계열은 그 시계열의 평균과 분산이 시간과는 독립적으로 형성되어 시간의 흐름에 따라 변하지 않고 일정하고, 시계열의 두 변수의 상관관계가 시간과는 독립적이고 두 변수간의 사간의 차이에만 의존하면 정상성(stationarity)을 확보한다.

이 정의에 의하여 한 시계열의 평균이 시간의 흐름에 따라 변하면 이 시계열은 비정상적 과정에 의하여 생성된다. 시간의 흐름에 걸쳐 평균이 변하는 비정상 시계열은 단위근과 공적분에 의하여 시계열의 운동을 모형화하고 있다. 주가 시계열에 대한 단위근과 공적분에 대한 연구는 그동안 상당한 진척을 얻고 있다.

시계열의 비정상성은 분산이 시간의 흐름에 따라 변할 때에도 발생한다. 시간의 흐름에 따라 무조건부 분산은 변하지 않고 있지만 이용 가능한 정보 집합을 조건으로 하는 조건부 분산이 변하는 경우도 있다. 이 같은 성질을 가진 주가 시계열은 자기회귀 조건부 이분산(ARCH) 계통의 과정으로 모형화하고 있다.

주가 시계열에는 분산 또는 진폭성(volatility)의 군집화(clustering) 현상이 발생하고 있다. 주가가 어느 한 시점에 큰 폭으로 변하면 다음 시점애도 큰 폭으로 변하고, 주가가 어느 한 시점에 작은 폭으로 변하면 다음 시점에도 작은 폭으로 변하면, 주가가 큰 폭으로 변한 대역과 잔은 폭으로 변한 대역이 시계열의 흐름에 발생한다. 이 현상이 주가의 진폭성 군집화이다. ARCH 계통의 과정들은 주가의 군집화 현상과 지속적 자기상관을 잘 포착하고 있다. 그런 까닭에 주가의 행동을 ARCH 과정들을 사용하여 모형화하고 있다. 그 결과 상당한 성과를 거두어 오고 있다. 어느 한 주가에 관련된 정보는 주가에 영향을 미친다. 주가를 상승시키는 정보도 있고 주가를 하락시키는 정보도 있다. 주가형성에 유리한 정보와 불리한 정보가 동일한 영향을 주가에 미칠 수 있는 경우도 있다. 반면 유리한 정보와 불리한 정보가 주가에 미치는 영향의 정도가 다를 수도 있다. 영향의 정도가 다른 경우에도 적용 가능한 과정이 ARCH 계통에서 정립되어 있다.

그런데 무조건부 분산 또는 진폭성이 시간의 흐름에 걸쳐 변하는 경우도 주가 과정에서 발견되기도 한다. 주가 시계열의 무조건부 분산이 변하여 이 시계열의 비정상성이 발생하고 있다는 증거를 Loretan and Phillips(1994)가 실증분석을 통하여 제시하고 있다. 이러한 현상에 대하여는 ARCH 계통의 과정을 적용할 수가 없다. 따라서 시간의 흐름에 따라 변하는 시계열의 무조건부 분산 또는 진폭성을 포착하는 모형에 대한 연구가 요청되고 있다.

이 논문에서는 시간의 흐름에 따른 주기 시계열 평균의 변화로 인하여 형성되는 비정상성을 해결하는 모형들을 살펴보고, 아울러 시간의 흐름에 걸쳐 조건부 분산이 변함으로써 야기되는 비정상성을 고려한 주가 결정 모형을 검토하고자 한다. 그리고 시간의 흐름에 따른 무조건부 분산의 변화로 인한 비정상성을 해결하는 주가 결정 모형을 분석하고 이 모형을 한국종합주가지수에 적용하여 그 모수를 추정하고자 한다.

이 논문은 다음과 같이 진행된다. 제 Ⅱ장에서는 시간의 흐름에 따른 평균변화를 고려한 주가결정 모형을 살펴본다. 제 Ⅲ장에서는 시간의 흐름에 따른 주가 시계열의 조건부 분산의 모형화를 검토한다. 제 Ⅳ장에서는 시간의 흐름에 따라 주가 시계열의 무조건부 분산이 변할 때 야기되는 문제점과 이 문제점을 해결하기 위한 방법을 살펴본다. 제 Ⅴ장에서는 무조건부 분산이 고려된 주가 결정 모형을 한국종합주가지수에 적용하여 실증분석을 수행한다. 끝으로 제 Ⅵ장에서는 결론을 제시한다.

Ⅱ. 시간의 흐름에 따른 주가평균의 변동

시계열은 정상적 시계열과 비정상적 시계열로 대별할 수 있다. 시계열의 정상성은 시계열의 평균과 분산이 시간과는 독립적으로 시간의 흐름에 걸쳐 동일하고 시계열의 두 값의 분산(자기분산)이 이 두 변수를 분리시킨 시간의 기간에만 의존하고 이 두 변수가 관찰된 실제의 기간에는 의존하지 않으면 성립한다. 즉,

시계열 $\{Y_t\}$에서 기대값 작용소를 E, 분산과 공분산 작용소를 각각 var과 cov로 표시하면, $E[Y_t] = \mu$, $var[Y_t] = \sigma^2$이고, $cov[Y_t, T_{t-s}] = cov[Y_t, Y_{t+s}] = \gamma_s$일 때 이 시계열은 정상적 시계열이다. 공분산 γ_s는 두 변수를 분리시킨 시간의 기간 s에만 의존하고 있다. 시계열의 정상성은 이 시계열이 평균의 변화로 인하여 평균에서 일탈할 때 평균으로 회귀하는 성질을 갖도록 한다.

시계열의 비정상성은 위의 세 조건 중 어느 하나나 그 이상이 성립하지 않을 때 발생한다. 시계열의 평균이 시간과 독립하여 일정하다는 조건을 따르지 않고, 시간의 흐름에 걸쳐 변하면 이 시계열은 비정상적 과정에 의하여 생성된다. 이 시계열은 평균변동(mean-varying) 과정을 따른다. 시계열의 정상성 조건들이 성립하지 않을 때 비정상성이 발생하는데 이 비정상의 발생을 Verbeek(2004), Hill 등(2008), Greene(2008), Enders(2004), Hamilton(1994) 등을 비롯한 여러 문헌을 참고하여 아래에서 검토하고자 한다.

시계열의 평균이 시간의 흐름에 따라 추세를 가지면 이 시계열은 장기적 평균으로 회귀하지 않는다. 이 추세는 시계열에 영원한 영향(permanent effect)을 미친다.

시계열 $\{Y_t\}$가 한 기간에서 다른 기간으로 이동할 때 그 변화량이 고정되어 있다고 하자. 즉, $Y_t - Y_{t-1} = \Delta Y_t = \alpha_0$이라고 하자. 이 시계열의 시초조건을 Y_0이라고 하자. 그러면 이 차분 방정식의 해는 $Y_t = Y_0 + \alpha_0$이다. 따라서 $\Delta Y_t = \alpha_0$의 해는 결정론적(deterministic) 선형추세를 가지는 모형이 된다. 시차작용소를 B(L)이라 하자. 정상적 성분 $B(L)\varepsilon_t$를 시계열의 추세에 부가하면, $Y_t = Y_0 + \alpha_0 + B(L)\epsilon_t$를 얻는다. 이 경우에 있어서는 Y_t는 추세값과는 $B(L)\epsilon_t$만큼 이탈하며 이 변동분은 가정에 의하여 정상성을 보유하고 있으므로 시계열 $\{Y_t\}$와 추세의 차이는 일시적이다. 따라서 장기적으로는 추세에 수렴한다. 다시 말하면, 예측기간이 s일 때 Y_{t+s}의 장기적 예측치는 $Y_0 + \alpha_0(t+s)$로 수렴한다. 이 과정이 추세 정상적 과정이다.

한 시계열에서 차분을 수행하면 추세가 제거될 수 있다. ε_t가 백색잡음인 무작위 행보(random walk)$Y_t = Y_0 + \alpha_0 t + \Sigma_{i-1}^{t}\epsilon_i$에 1차 차분을 수행하자. 그러면$\Delta Y_t = \alpha_0 + \epsilon_t$를 얻는다. 이때 ΔY_t는 다음에서 보는 바와 같이 정상성을 파악할 수 있다. 1차 차분에서 기댓값은 $E[\Delta Y_t] = \alpha_0$, 분산은 $var[\Delta Y_t] = E[\epsilon_t^2] = \sigma^2$이다. 그리고

공분산은$\mathrm{cov}[\Delta Y_t, \Delta Y_{t+s}] = E[\epsilon_t, \epsilon_{t+s}] = 0$이다.

단위근을 갖는 시계열은 차분을 통하여 정상성을 확보할 수 있다. 이 차분을 통하여 얻는 시계열이 정상적 과정이다. 자기회귀 과정 AR(1) $Y_t = \beta Y_{t-1} + \epsilon_t$ 은 다항식$(1-\beta L)$이 가역적(invertible)일 때 정상적 과정이다. 즉, 특성방정식 $1-\beta z = 0$의 근이 1보다 크면 AR(1)은 정상적 과정이다. 자기회귀 이동평균 과정 ARMA(p, q)은 A(L)을 시차작용소라 할 때 $B(L)Y_t = A(L)\epsilon_t$로 쓸 수 있으며 이 과정은 B(z)에 대한 해 $z_1, z_2, \cdots, z_p$가 0이면 정상적 과정이다. 그런데 Y_t의 과정에 단위근이 단 하나만 존재하면 제1차 차분을 통하여 얻는 ΔY_t는 정상적 과정을 따른다. 제1차 차분을 수행하여 정상성을 확보하는 시계열은 차수 1로 적분된다. 즉 이 계열은 I(1)과정인 것이다. 차수 1로 적분된 ARMA(p, q) 과정은 ARIMA(p, 1, q)과정이다. 이와 같이 제1차 차분을 통하여 비정상적 시계열 과정을 정상적 과정으로 변환시킬 수 있는 과정이 존재한다. 적분하지 않고서도 정상성이 확보된 시계열의 과정은 I(0)과정이다.

다항식의 근이 단 하나 1만을 가지는 과정은 I()과정이고 근이 1보다 큰 과정은 I(0)과정이다. I(0)시계열은 분산이 유한이고 시간의 흐름에 의존하지 않는 평균을 가지는 과정이다. 반면 I(1)과정은 시간의 흐름에 따라 시계열의 운동의 변동이 심하다. I(0)과정은 장기적으로 평균으로 회귀하는 성질을 갖는다. 따라서 시계열에 가해진 충격은 일시적인 것으로 조만간에 소멸한다. 그러나 I(1)과정은 시계열에 충격이 가해지면 소멸하지 않고 그 영향이 시계열에 영구히 존재한다. 다시 말하면 I(0)과정은 단기기억과정이고 I(1)과정은 영원기억과정이다. 왜냐하면 I(0)에서 자기상관은 시차가 증가함에 따라 급격히 감소하여 곧 0이 된다. 반면 I(1)과정에서는 자기상관계수가 무척 천천히 감소한다.

복수의 변수들이 I(1)과정을 따르고, 이 복수의 변수들 간에 선형관계가 존재한다고 가정하다. 단순화시켜 두 시계열 $\{Y_t\}$와 $\{X_t\}$를 고려하자. $\{Y_t\}$와 $\{X_t\}$가 I(1) 과정을 따를 때 $Y_t - \beta X_t$가 I(0)과정을 따르면 $\{Y_t\}$와 $\{X_t\}$는 공적분된다. 그리고 이 두 변수는 공통의 추세를 공유한다. 이때 이 두 변수 간에는 장기균형관계가 성립한다.

이 두 변수들 간의 관계를 $Y_t = \alpha + \beta X_t$라 하자. 그러면 $z_t = Y_t - \beta X_t$라 할 때 $e_t = z_t - \alpha$는 균형오차이다. 이 오차는 균형값 $\alpha + \beta X_t$에서 Y_t의 값이 일탈하는 정도를 측정해 주는 값이다. e_t가 I(0)과정이면 균형오차는 정상적이고 0 주위에서 변동한다. 따라서 이 시스템은 평균적으로 균형 안에 존재한다. $\{Y_t\}$와 $\{X_t\}$가 공적분되지 않고 e_t가 I(1)과정이면 균형오차는 폭넓게 변동하며 0이 되지 않는다. 이때는 $Y_t = \alpha + \beta X_t$가 장기균형을 형성하지 못한다. 따라서 공적분 벡터가 존재하면 장기균형관계가 성립한다고 할 수 있으며, 두 변수 사이에 공적분 벡터가 존재하지 않으면 두 변수 간의 장기균형은 성립하지 못한다.

공적분은 두 변수가 동일한 차수도 적분될 때 가능하다. 그렇지 않으면 장기균형관계가 성립하지 않는다. 두 변수의 차분 차수가 상이하면 이 두 변수는 공적분이 될 수 없다. Y_t가 $I(d_Y)$이고 X_t가$I(d_X)$과정이며 d_Y와 d_X가 정수이고 $d_Y > d_X$라 하자, 그러면 이 두 변수의 1차(선형) 결합은 $I(d_Y)$이다. X_{1t}와 X_{2t}가 각각 I(2)과정이고 이 두 변수를 제외한 모든 변수가 I(1)과정이라 하자. 이때에는 일반적으로 이 모든 변수들 간에 공적분관계가 존재하지 않는다. 그러나 $\beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t}$가 I(1)과정을 따르면 이 선형결합과 나머지 다른 변수들 간에 공적분이 존재한다.

Ⅲ. 조건부 분산의 변동

앞에서는 시계열의 평균이 시간의 흐름에 따라 변하면 이 시계열이 비정상적 과정에 의하며 생성되며 이 비정상적 과정을 정상적 과정으로 변환시키는 방법을 살펴보았다. 그러나 시간의 흐름에 따라 분산이 변하여도 비정상이 시계열에서 발생한다. 분산이 시간의 흐름에 따라 변하는 시계열은 비정상적 과정이다. 이 절에서는 이 과정을 살펴보고자 한다.

주가시계열에는 진폭성(volatility)의 군집현상이 발생하고 있다. 주가에 미치는 영향이 큰 충격들(shocks)이 어느 한 시점에 발생하면 이어지는 바로 다음

시점에 큰 충격이 뒤따르는 경우가 존재할 수 있다. 이때에 충격의 방향은 상향일 수도 있고 그와는 반대로 하향일수도 있다. 주가에 미치는 영향이 작은 충격이 발생하면 이어지는 다음 시점에서도 역시 영향력이 작은 충격이 발생한다. 따라서 주식시장에는 진폭성이 높은 기간대가 형성되는가 하면 진폭성이 낮은 기간대가 형성된다. 거래빈도(frequency)가 높은 일별 주식 수익률이나 주별 주식수익률에 이 같은 현상이 뚜렷하다. 그러나 분기별 주식 수익률과 같이 거래빈도가 낮은 주식 수익률 시계열에는 이 같은 진폭성의 군집화 현상이 뚜렷하게 드러나고 있는 것은 아니다.

시계열 $\{Y_t\}$가 $Y_t = \beta_0 + \epsilon_t,\ \epsilon_t \sim N(0,\ \sigma_t^2),\ \sigma_t^2 = \alpha_0$이라 하자. 여기에서 N은 정규분포를 의미한다. 그러면 이 시계열은 평균과 분산이 시간과는 독립하여 일정한 과정을 따르고 있음을 알 수 있다. 그런데 잔차의 분산이 시간의 흐름에 따라 변한다고 가정하자. 즉 분산이 시간의 흐름에 걸쳐서 이분산성을 띄고 있다. 즉, $\sigma_t^2 = h_t$라고 하다. 그리고 잔차의 분산이 t-1시점에서 이용 가능한 정보집합을 조건으로 정규분포를 따른다고 하자. 즉 t-1 시점에서 사용 가능한 정보집합을 Φ_{t-1}라 하면 $\epsilon_t \mid \Phi_{t-1} \sim N(0,\ h_t)$이다. h_t가 상수와 ϵ_t의 제 1차 시차와 선형관계를 가진다고 하자. 즉, $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 \quad (\alpha_0 > 0, 0 \le \alpha_1 < 1)$의 관계가 형성된다. 이 시스템을 정리하면 $Y_t = \beta_0 + \epsilon_t,\ \epsilon_t \mid \Phi_{t-1} \sim N(0,\ h_t),\ h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 (\alpha_0 > 0,\ 0 \le \alpha_1 < 1)$의 시스템을 얻는다. 이 모형이 자기회귀 조건부 이분산(ARCH) 과정이다. 이 모형에서 분산은 시간의 흐름에 따라 변하고 조건부 분산을 형성하며, 분산은 시차효과에 의존한다. 이 모형에서 분산은 이전의 오차의 제곱에 의존하므로 시계열에서 발생하는 군집현상의 포착이 가능하다. 따라서 주가에서 중요시되는 주가(주식수익률)의 정보집합 조건부 분산이나 진폭성(표준편차)을 모형화하는데 유용한 과정이다. 주식수익률은 중심부분은 정규분포보다 높고 꼬리부분은 정규분포의 꼬리보다 두껍다는 것이 실증분석이 밝힌 결과이다. ARCH는 이 결과를 반영하는 모형이다. ARCH과정에서 h_t방정식에 ϵ_t^2의 시차변수를 여러 개 도입할 수 있다. 그러면 직전인 t-1기뿐만 아니라 그 이전의 사차효과도 포착할 수 있다.

시차변수가 여러 개 도입된 ARCH(q)에서 q가 큰 수이면 추정의 정확성이 결

여될 수가 있다. 이것이 이 과정의 단점이다. 모수의 개수를 적게 하고서도 시차 효과를 보다 정확히 포착하기 위한 과정이 GARCH 과정이다. 조건부 분산과정을 $h_t = \alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 + \gamma_1\alpha_1\epsilon_{t-2}^2 + \gamma_1^2\alpha_1\epsilon_{t-3}^2 + \cdots$ 으로 정립하자. 즉, $\alpha_s = \alpha\gamma_1^{s-1}$형태로 시차계수들을 정하여 기하학적 시차구조를 형성시킨 것이다. $\gamma_1\alpha_0$을 위 식에 더하고 동시에 빼주자. 그러면 $h_t = (\alpha_0 - \gamma_1\alpha_0) + \gamma_1(\alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-2}^2 + \gamma_1\alpha_1\epsilon_{t-3}^2 + \cdots)$를 얻는다. 그런데 h_{t-1}은 두 번째 괄호와 동일하다. 따라서 $h_t = \delta + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 h_{t-1}$으로 쓸 수 있다. 여기에서 $\delta = \alpha_0 - \gamma_1\alpha_0$이다. 이 과정은 ARCH를 일반화(generalize)시킨 것이므로 GARCH(1, 1)과정이다. 이 과정은 GARCH(p, q)로 확장 가능하다.

시계열에 가해지는 충격은 시계열의 값을 상승시키는 충격과 하향시키는 충격으로 나눌 수 있다. 주가 형성에 있어서 이 두 충격은 각각 주가상승 정보(유리한 정보)와 주가하락 정보(불리한 정보)로 구분할 수 있을 것이다. 이 두 정보가 주가 시계열의 형성에 동일한 영향을 미칠 수 있으며 이와는 반대로 영향의 정도가 다를 수도 있다. 불리한 뉴스가 주식시장에 도래하면 주식시장은 소용돌이가 치고 주가의 진폭성은 증가하는 성향이 발생하고, 반면 유리한 정보가 발생하면 진폭성은 적어지는 성향을 띄어 주식시장은 비교적 평온한 상태가 형성된다는 것이 실증분석이 제시하는 결과이다. 이 경우에는 주가형성에 불리한 충격의 영향력이 유리한 충격보다 크다. 즉 주가형성에 미치는 정보구조는 비대칭성을 형성하고 있다. 유리한 정보는 $\epsilon_{t-1} > 0$이고 불리한 정보는 $\epsilon_{t-1} < 0$이다. 이와 같은 성질을 반영한 과정은 $h_t = \delta + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 + \gamma d_{t-1}\epsilon_{t-1} + \theta h_{t-1}$의 형태로 정립할 수 있다. 여기에서 $\epsilon_t < 0$이면 , 즉 불리한 정보일 때, $d_t = 1$이고 $\epsilon_t \geq 0$(유리한 정보)이면 $d_t = 0$이다. 이 모형이 T-GARCH 과정이다. 이와 같이 ARCH 계통의 모형은 여러 형태의 충격을 포착할 수 있는 과정으로 확대가 가능하다.

Ⅳ. 무조건부 분산의 시간의 흐름에 따른 변동

자기회귀과정 AR (1)은 $Y_t = \beta Y_{t-1} + \epsilon_t$, $|\beta| < 1$로 쓸 수 있다. 시점 t에서

Y_{t+1}을 예측하려고 한다. 이용 가능한 정보 집합을 조건부로 하여 Y_{t+1}을 예측하고자 할 때 AR과정에서의 정보 집합은 과거의 Y_t의 값이다. 특히 AR(1)에서 이용할 수 있는 정보 집합은 Y_t뿐이다. 따라서 Y_{t+1}의 조건부 예측은 $E[Y_{t+1} \mid \Phi_t] = E[Y_{t+1} \mid Y_t] = \beta Y_t$이다. 예측오차는 $(Y_{t+1} - Y_t)$로 ϵ_t이다. 예측오차의 분산은 $E_t[(Y_{t+1} - Y_t)^2] = E_t[\epsilon_{t+1}^2] = \sigma^2$이다. 여기에서 E_t는$E_t = E[\bullet \mid \Phi_t]$이다.

무조건부 예측을 고려하다. 이 경우에는 예측이 $\{Y_t\}$의 과거자료에 의존하지 않는다. 각 시점 t, t-1, t-2 등에서 시계열 모형은 $Y_t = \beta Y_{t-1} + \epsilon_t$, $Y_{t-1} = \beta Y_{t-2} + \epsilon_{t-1}$, 등이므로 $Y_t = \beta Y_{t-1} + \epsilon_t$에 Y_{t-1}의 값을 대입하고, 이 과정을 계속 하자. 그러면 $Y_{t+1} = \epsilon_{t+1} + \beta\epsilon_t + \beta^2\epsilon_{t-1} + \cdots \beta^t Y_0$을 얻는다. $\beta^t Y_0$가 무척 작아 무시할 수 있다고 가정하다. 그러면 무조건부 예측은 $E[Y_{t+1}] = E[\epsilon_{t+1} + \beta\epsilon_t + \beta^2\epsilon_{t-1} + \cdots] = 0$이다. 따라서 무조건부 예측오차는 $(Y_{t+1} - 0)$이다. 무조건부 예측의 분산을 구하자.

$$
\begin{aligned}
& E[(Y_{t+1} - 0)^2] = \mathrm{var}[Y_{t+1}] \\
& = E[(\epsilon_{t+1} + \beta\epsilon_t + \beta^2\epsilon_{t-1} + \cdots)^2] \\
& = E[\epsilon_{t+1}^2 + \beta^2\epsilon_t^2 + \beta^2\epsilon_{t-1}^2 + \cdots] \\
& = \sigma^2(1 + \beta^2 + \beta^4 + \cdots) \\
& = \frac{\sigma^2}{1 - \beta^2}
\end{aligned}
$$

왜냐하면 $i = j$일 때 $E[\epsilon_{t-j}, \epsilon_{t-i}] = \sigma^2$이고 $i \neq j$이면 $E[\epsilon_{t-j}, \epsilon_{t-i}] = 0$이기 때문이다.

그런데 $\sigma^2/(1-\beta^2) > 1$이므로 무조건부 분산 $\sigma^2/(1-\beta^2)$은 조건부분산 σ^2보다 크다. 여기에서 시간의 흐름에 따라 변하는 분산을 포착하는 ARCH 계통의 과정과는 다른 모형의 정립이 요청되고 있다.

ARCH 계통의 과정들이 진폭성의 군집화 현상과 지속적인 자기상관과 같은, 주가 시계열의 중요한 특성을 잘 포착하고 있는 것은 사실이다. 그러나 이 과정이 정상성 가정에 대하여서는 강건성(robustness)을 확보하고 있지 못한 점이 큰 결점이다. ARCH 계통에서는 시간의 흐름에 따라 변하는 진폭성이 완전히 조건부

분산이나 공분산구조에 기인하는 반면, 무조건부 분산은 시간의 흐름에 걸쳐 변하지 않고 일정하다고 가정하고 있다. 무조건부 분산이 변하면, ARCH 계통은 중대한 모형정립과오(misspecification)에 직면하게 된다. Mikosch와 Starica(2004)가 지적하고 있는 바와 같이 IGARCH 효과는 무조건부 진폭성의 비정상적 변화 때문에 관찰되고 있는 것이다. Loretan and Phillips(1994)는 주가시계열에서 무조건부 제 2차 적률이 시간의 흐름에 따라 일정하지 않고 변하고 있다는 점을 실증분석을 통하여 밝히고 있다. Xu와 Phillips(2008)은 시간의 흐름에 따라 변하는 무조건부 진폭성을 갖는 자기회귀 과정의 추정방법을 정립하였다. 그들의 추정방법을 아래에 요약하고 그 방법에 따라 일별주가지수 수익률에 적용해보고자 한다.

시계열 $\{Y_t\}$가 다음의 생성과정을 따르고 있으며 이 과정에 의하여 생성된 관찰치 $\{Y_{-p+1},\cdots,Y_0,Y_1,\cdots,Y_T\}$를 얻었다고 하자.

$$B(L)Y_t = u_t \tag{1}$$

$$\epsilon_t = \sigma_t \epsilon_t \tag{2}$$

위에서 L은 시차작용소이며 $B(L) = 1-\beta_1 L-\beta_2 L^2-\cdots-\beta_p L^p$이다. 그리고 $\beta_p \neq 0$이다. B(L)은 모든 근이 단위원 밖에 있다고 가정한다. $\{\sigma_t\}$가 결정론적 수열이고 $\{\epsilon_t\}$가 마팅게일 차분수열이라고 가정한다. 시계열은 무조건부 이분산을 가지고 있다. σ_t^2은 일반적인 결정론적 함수로 모형이 정립된다고 가정하며 이 함수는 σ_t가 Y_t의과거의 사건과 조건부 의존관계를 가지고 있지 않는다고 가정한다. 이 같은 조건 아래에서 자기회위 계수 벡터 $\beta=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p)$를 추정하는 방법이 요청되고 있다. u_t가 박색잡음과정이면 OLS로 추정되며, 추정량은 $\hat{\beta}=(\Sigma_{=1}^{T}X_{t-1} X_{t-1}^{'})^{-1}(\Sigma_{=1}^{T}X_{t-1}Y_t)$이다. 여기에서 X_{t-1}은 $X_{t-1}=(Y_{t-1},Y_{t-2},\cdots,Y_{t-p})^{'}$이다.

무조건부 분산이 시간의 흐름에 따라 변하는 이분산이므로 모수 추정에 무조건부 이분산을 가중치로 사용하여 추정하는 값이 일반적인 추정방법이다. 적절한 통계학적 가정을 도입하여 위 모형을 구조화하면 가중 최소 자승 WLS는 다음과 같다.

$$\widehat{\beta_{WLS}}=(\Sigma_{=1}^{T}\omega_t^2 X_{t-1}X_{t-1}^{'})^{-1}(\Sigma_{=1}^{T}\omega_t^2 X_{t-1}Y_t) \tag{3}$$

이 추정치는 $T \to \infty$ 에서 $\sqrt{T}(\widehat{\beta_{WLS}} - \beta)$는 분포에서 평균이 0인 정규분포로 수렴한다.

위 식 (3)에서 최소 점근 분산행렬을 갖는 추정량은 GLS이다. 즉

$$\beta^* = (\Sigma_{=1}^{T} X_{t-1} X_{t-1}^{'} \sigma_t^{-2})^{-1} (\Sigma_{=1}^{T} \omega_t^2 X_{t-1} Y_t \sigma_t^{-2}) \tag{4}$$

위에서 WLS의 가중치ω_t^2은 GLS에서 가중치 σ_t^2으로 대치된 것이다. 즉 $\omega_t^2 = \sigma_t^2$이다. 이 경우 $T \to \infty$ 에서 다음이 성립한다.

$$\sqrt{T}(\beta^* - \beta) \xrightarrow{d} N(0,\ \Gamma^{-1})$$

$$\Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} \widehat{\beta_1} & \widehat{\beta_2} & \cdots & \widehat{\beta_p} \\ & & & 0 \\ & I_{p-1} & & \bullet \\ & & & \bullet \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

식 (4)는 이론적으로는 아름답다. 그러나 시간의 흐름에 따라 변하고 있는 σ_t^2를 알고 있지 못하므로 실행할 수가 없다.

자기 회귀 과정의 모수는 변동하는 σ_t^2를 추정하는 것과 동시에 모수를 추정하는 방법을 사용하여 추정 가능하다. 이 방법은 적응적 (adaptive)방법이며 이를 ALS라 하자. β^*와 동일한 점근적 분포를 갖는 $\tilde{\beta}$를 추정해야 하는데, 이것은 핵(kernel)을 사용하면 가능하다.

자기회귀 과정의 OLS 잔차를 $\widehat{u_t}$라 하자. 즉 $\widehat{u_t}$는 $\widehat{u_t} = Y_t - X_{t-1}^{'} \beta$이다. 핵함수 K(z)를 실수선에서 정의된 유계 비음 연속함수로 $\int_{-\infty}^{\infty} K(z) dz = 1$을 만족한다고 하자. 다음과 같이 정의하자.

$$\tilde{\beta} = (\sum_{t=1}^{T} X_{t-1} X_{t-1}^{'} \widehat{\sigma_t^{-2}})^{-1} (\sum_{t=1}^{T} X_{t-1} Y_{t'} \widehat{\sigma_t^{-2}}) \tag{5}$$

위에서

$$\widehat{\sigma_t^2} = \sum_{t=1}^{T} w_{ti} \widehat{u_t^2} \tag{6}$$

$$w_{ti} = (\sum_{t=1}^{T} K_{ti})^{-1} K_{ti} \tag{7}$$

$$K_{ti} = \begin{cases} K\left(\frac{t-i}{Tb}\right) & t \neq i \\ 0 & t = i \end{cases} \tag{8}$$

여기에서 b는 대역폭(bandwidth) 모수고 T에 의존한다. ALS에 의한 $\tilde{\beta}$가 모수 β의 추정치이다. Xu and Phillips(2008)는 다음 식을 최소화시키는 b를 추정하는 것이 바람직하다고 제안하고 있다.

$$Cv(b) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\widehat{u_t^2} - \widehat{\sigma_t^2})^2 \tag{9}$$

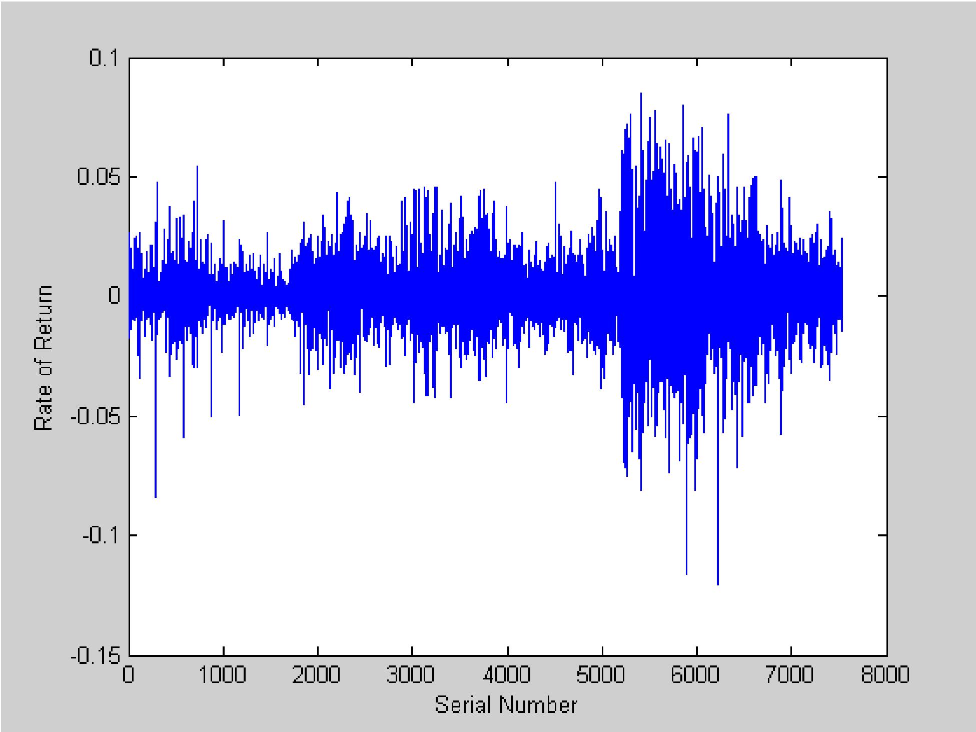
자기 회귀 과정의 모수 추정값 는 다음의 점근 분포를 가진다.

$$\sqrt{T}(\tilde{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} N(0,\ \Gamma^{-1}) \tag{10}$$

Ⅴ. 실증분석

시간의 흐름에 따라 변하는 무조건부 이분산을 갖는 자기 회귀 모형의모수를 추정하기 위해 사용한 데이터는 일별 한국 종합주가지수이다. 1980~2006년 간의 데이터를 사용하였다. 이 지수를 사용하여 일별 수익률을 구하였다. 일별 수익률 r_t는 $r_t = P_t/P_{t-1} - 1$이며 P_t는 시점 t의 일렬 한국종합주가지수이다.

종합주가지수의 일별 수익률의 시계면 그래프는 [그림 1]과 같다. 이 그림에 의하여 진폭성이 심한 대역과 진폭성이 약한 대역이 존재하고 있음을 파악할 수 있다. 진폭성이 강한 대역이 전체 기간에서 여러 번 발생하고 있으며, 진폭성이 약한 대역 역시 여러 번 발생하고 있음을 알 수 있다. 따라서 이 그림에 의하여 진폭성의 군집화 현상이 일별 한국종합주가지수에서 발생하고 있음을 파악할 수 있다.



[그림 1] 일별 수익률의 시계열

자기회귀 과정의 차수는 Bayes(Schwarz) 정보 기준에 의하여 결정하였는 바, 차수가 2이다. OLS에 의하여 추정한 AR(2)의 모수의 값은 다음과 같다.

$$Y_t = 0.00044 + 0.10732Y_{t-1} - 0.05111Y_{t-2} \tag{11}$$

시간의 흐름에 따라 변하는 무조건부 분산을 고려하여 추정한 자기 회귀 과정 AR(2)의 모수는 다음과 같다.

$$Y_t = 0.00037 + 0.10758Y_{t-1} - 0.02809Y_{t-2} \tag{12}$$

식 (11)과 식 (12)를 비교해 보자. 이 두 식에서 시차 1의 계수, 즉 Y_{t-1}의 계수는 OLS와 ALS가 각각 0.10732와 0.10758이므로 거의 비슷하다. 상수 역시 각각 0.00044와 0.00037로 서로 유사하다. 그러나 시차 2의 계수, 즉 Y_{t-2}의 계수는 OLS가 -0.05111이고 ALS가 -0.02809이다. ALS에 의한 계수값이 OLS에 의한

계수값 보다 절대값에서 2배가 된다. 다시 말하면 OLS이 의한 Y_{t-2}의 계수값이 ALS에 의한 값의 2배 작다. Y_{t-2}의 값이 양수이면 OLS에 의하여 얻은 예측값이 ALS에 의한 예측값 보다 작다. 반대로 Y_{t-2}의 값이 음수이면 OLS에 의한 예측값이 ALS에 의한 예측값 보다 크다. ALS에 의한 예측값이 OLS에 의한 예측값 보다 변동의 폭이 작다. 따라서 ALS에 의한 예측이 OLS에 의한 예측보다 평균 주위에 많이 놓인다.

Ⅵ. 결　　론

주가는 변동한다. 주가의 변동이 심하지 않으면 주가 예측은 그리 어렵지 않을 것이다. 그러나 주가의 변동은 심하다. 주식 수익률은 평균이 시간의 흐름에 따라 변하여 변할 수 있다. 이 경우 주식 수익률의 시계열은 비정상적 과정에 의하여 생성된다. 이 같은 현상이 발생할 때에는 단위근과 공적분을 통하여 주식 수익률을 모형화 할 수 있다.

주식 수익률은 분산이 시간의 흐름에 따라 변하기 때문에 변동 할 수 있다. 이 경우에도 주식 수익률의 시계열은 비정상성을 갖는다. 이용 가능한 정보를 사용하는 조건부 분산이 시간의 흐름에 따라 변하고 무조건부 분산이 시간의 흐름에 걸쳐 변하지 않고 일정하면 자기회귀 이분산 계통의 과정들에 의하여 주식 수익률의 모형을 정립할 수 있다. 그런데 이 과정들은 정상성의 가정에 대한 강건성을 보유하고 있지 못한 것이 큰 흠이다.

무조건부 분산은 시간의 흐름에 걸쳐 변하지 않고 일정하다는 자기 회귀 이분산 과정과는 달리, 무조건부 분산이 시간의 흐름에 따라 변할 때 주식 수익률의 모형화하는 방법 역시 중요하다. 여기에서는 무조건부 분산이 시간의 흐름에 따라 변할 때 자기 회귀 과정의 모수추정 방법을 검토하고, 이 방법을 한국 종합주가 지수에 적용하여 자기회귀 과정의 모수를 추정하였다. 이 방법에 의하여 추정된 제 2계 자기회귀 과정의 모수값 중 상수항과 제 1계 항의 계수는 통상

최소자승법에 의한 값과 유사하다. 그러나 제 2계 항 모수의 값은 양자가 상당히 다르다. 최소자승에 의한 제 2계 값이 과대 추정되고 있다.

참 고 문 헌

이일균, 주가시계열의 성질과 특성 : 한미비교, 재무관리논총, 제7권 제1호, 2001.

이일균, 주가의 장기기억과 분수적분 일반 자기회귀 조건부 이분산, 증권학회지 제25집, 1999, 31-70.

이일균, 시계열 자료와 재무관리이론, 재무관리연구, 제11권 제1호, 1994, 1-29.

Banerjee, A. and G. Urga, Modeling Structural Breaks, Long Memory and Stock Market Volatility : An Overview, *Journal of Econometrics,* 129, 2004, 1-34.

Bai, j and P. Perron, Estimating and Testing Linear Models with Multiple Structural Changes, *Econometrica,* 66, 1998, 47-78.

Cavaliere, G., Unit Root Tests under Time-varying Variance Shifts. *Econometric Reviews,* 23, 2004, 259-292.

Enders, W., *Applied Econometric Time* Series. 2nd ed., Wiley, 2004.

Engle, R. F., Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U. K. Inflation, *Econometrica,* 50, 1982, 987-1008.

Greene, R., *Econometric Analysis*. 6th ed. Pearson, 2008.

Hansen, B. E., Regression with Nonstationary Volatility, *Econometrica,* 63, 1995, 1113-1132.

Hamilton, J. D., *Time Series Analysis*. Princeton University Prews, 1994.

Hill, R. C., W. E. Griffiths, and G. C. Lim, *Principles of Econometrics*. Wiley, 2002.

Kuersteiner, G. M., Efficient IV Estimation of Autoregressive Models with Conditional Heteroskedasticity, *Econometric Theory* 18, 2002, 547-583.

Loretan, M. and P. C. B. Phillips, Testing Covariance Stationarity under Moment Condition Failure with an Application to Common Stock Returns, *Journal of Empirical Finance* 1, 1994, 211-248.

Merton, R., On Estimating the Expected Return on the Market : An Exploratory Investigation, *Journal of Financial Economics* 8, 1980, 324-361.

Mikosch, T. and C. Starica, Nob-stationarities in Financial Time Series, the Long Range Dependence and the IGARCH Effects, *Review of Economics and Statistics* 86, 2004, 378-390.

Starica, C. and C. Granger, Non-stationarities in Stock Returns, *Review of Economics and Statistics* 87, 2005, 503-522.

Stock, J. H. and M. W. Watson, Heteroskedasticity-robust Standard Errors for Fixed Effects Panel Data Regression, *Econometrica* 76, 2008, 155-174.

Verbeek, M. (2004). *A Guide to Modern Econometrics*. 2d ed. Wiley.

Xu, K. and P. C. B. Phillips, Adaptive Estimation of Autoregressive Models with Time-varying Variances, *Journal of Econometrics* 147, 2008, 265-280.

Yu, K. and M. C. Jones, Likelihood=based Local Linear Estimation of the Conditional Variance Function, *Journal of the American Statistical Association* 99, 2004, 130-144.