전자장시스템에서 Level Set Method

▌김 영 선, 박 일 한 / 성균관대학교

I. 서 론

전자장시스템의 수치해석에 있어서 형상모델링은 오래전부터 중요하고 어려운 문제 중 하나였다. 예를 들어 이동하는 이동체가 포함된 시스템의 해석문제, 최적형상 설계문제, 형상추정 역문제(inverse problem) 등에서 형상의 변화를 적절하고 용이하게 표현하는 것은 여러 기술적인 어려움을 수반하고 있다. 전자장 수치해석의 대표적인 방법인 유한차분법, 유한요소법, 경계요소법 등을 이용하여 위의 문제를 다룰 경우 모델의 형상 변화에 따라 매질 경계의 변화를 원활이 표현하고 공간을 적절히 이산화하는 것은 복잡한 과정을 요구한다. 이러한 어려움을 극복하기 위한 방법으로 활용될 수 있는 방법의 하나로 본 글에서는 Level Set Method(LSM)의 전자장시스템 적용을 소개한다.

Level Set Method는 수학자인 Osher와 Sethian에 의해서 처음 제안되었으며[1,2], 최근 fluid mechanics, material science image processing 및 computer vision 등 다양한 분야에서 변화하는 형상을 표현하는데 유용한 도구로 원활히 활용되고 있다[3]. 최근에는 기계공학의 구조형상 최적설계에 활용되어 기존의 형상민감도 해석법과 위상최적설계법이 갖고 있던 각각의 문제점을 극복하고 새로운 설계기법으로 활발히 연구되고 있다[4-6].

본 글에서는 Level set method의 기본 개념 및 이론을 간단히 설명하고, 연속체 민감도해석과 결합된 전자장시스템의 Level set method 기반 최적화방법을 기술한 후 전자장시스템에 적용된 LSM의 적용사례로서 전장 내에서 유전체 분포의 최적설계문제, 자장 내에서 이동체 모델링 및 해석문제, 전장 내에서 유전체 입자의 운동해석 문제의 수치해석 결과를 보인다.

II. Level Set Method의 개념 및 이론

Level set method의 개념은 영역과 경계를 연속적인 함수인 level set 함수로 나타내는 것이다. 이 함수는 음함수이며 고차함수이고 이 함수의 특성을 이용하여 경계의 변형을 표현한다.

임의의 경계를 갖는 영역 Ω에 대하여 음함수인 level set 함수 ϕ(x)는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} &\phi(\mathbf{x}) > 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega^+ : \text{air} \\ &\phi(\mathbf{x}) = 0 \; \mathbf{x} \in \partial\Omega : \text{boudary} \qquad (1) \\ &\phi(\mathbf{x}) < 0 \; \mathbf{x} \in \Omega^- : \text{material} \end{aligned}$$

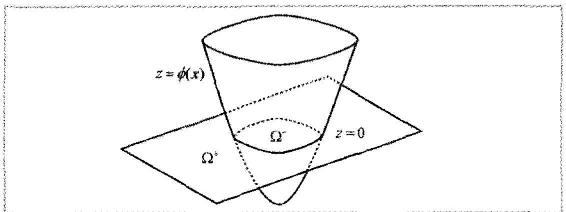

그림 1 영역Ω^-과 level set Φ(x)함수의 분포

영역 및 형상의 변화는 level set 함수를 독립변수인 공간변수 x와 시간변수 t로 표현하여 정의할 수 있으며, 이것에 의해 변화되는 영역 Ω^-가 결정된다.

$$\Omega^-(t) = \{\phi(\mathbf{x},t) < 0\} \quad (2)$$

이 때 $\Omega^-(t)$의 경계 $\Gamma(t)$는 zero level set으로 주어진다.

$$\Gamma(t) = \{\phi(\mathbf{x},t) = 0\} \quad (3)$$

영역의 형상은 시간에 따라 변하고 이 변화가 전 영역에 정의된 속도 field V에 의하여 표현되면 다음의 관계가 얻어진다.

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{x}(t),t) \quad (4)$$

함수 ϕ(x, t)가 일정한 값인 zero를 갖은 zero level set은 3차원 공간에서 표면을 나타내고 이는 zero level set의 시간에 대한 전미분(total derivative) 표현을 통하여 다음의 1차 Hamilton-Jacobi 방정식으로 표현된다.

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla\phi = 0 \quad (5)$$

일반적으로 속도의 법선성분만이 영역의 변형에 기여하므로 zero level set 표면에서는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{V} = V_n\,\mathbf{n} \quad (6)$$

여기서, V_n은 스칼라 함수이고, n은 경계 Γ에 대한 단위 외향 법선벡터를 나타낸다. 단위벡터는 $n=\nabla\phi/|\nabla\phi|$의 관계가 있으므로 level set 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + V_n\nabla\phi = 0 \quad (7)$$

Level set method를 활용하는 데에는 일반적으로 두 가지의 함수가 사용된다. 첫 번째는 Heaviside 함수이고,

$$H(\phi(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0 & if \quad \phi \le 0 \\ 1 & if \quad \phi \le 0 \end{cases} \quad (8)$$

또 하나는 Dirac-Delta 함수이다.

$$\delta(\phi(\mathbf{x})) = \frac{dH(\phi(\mathbf{x}))}{d\phi} \quad (9)$$

여기서, ϕ는 x의 함수이고, 시스템의 매질상수는 level set 함수에 따라 결정된다. 이런 함수를 이용하여 실제 문제에서 다루게 될 임의의 함수에 대하여 면적 적분과 경계적분은 다음과 같이 표현된다.

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})H(\phi(\mathbf{x}))d\Omega \quad (10)$$

$$\int_\Gamma f(\mathbf{x})d\Gamma = \int_\Omega f(\mathbf{x})\delta(\phi(\mathbf{x}))|\nabla\phi(\mathbf{x})|d\Omega \quad (11)$$

다음은 정전계의 한 예로써 최종적인 level set 방정식과 전장의 지배방정식을 나타낸다. 전자장 방정식은 level set 함수를 통하여 공간 및 매질분포가 결정되고, level set 방정식은 전계해석을 통하여 속도V_n이 결정되므로 아래의 두 미분방정식을 결합된 시스템방정식을 구성한다.

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + V_n|\nabla\phi| = 0 \quad (12)$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon(\phi)} \quad (13)$$

여기서,

V : 전위(electric scalar potential)

ρ_v : 공간전하밀도(charge density)

ϵ : 유전율(permittivity)

III. 전자장시스템에서 최적화

전자장시스템에서 Level Set Method를 이용한 최적화를 수행하기 위해서는 zero level set 표면에서의 형상변화에 대한 목적함수 변화를 표현하기 위한 연속체 민감도의 해석적 민감도식이 필요하다. 또한 형상에 대한 구속조건 등을 표현하기 위한 구속조건을 level set 함수로 표현하기 위한 과정이 요구된다.

1. 목적함수와 제약조건

예를 들어 정전계에서 최적설계를 위한 기본 정식화는 목적함수와 구속조건식으로 표현된다.

Min : $F(V(x,t))$: 목적함수

Subject to :

$\nabla^2 V = -\rho_v/\epsilon(\phi)$: 시스템 방정식

$\int_\Omega H(\phi)d\Omega = S^*$: 면적 제약조건

여기서, Ω는 설계영역이고, Poisson 방정과 일정 면적의 제약조건은 만족하면서 반복적으로 목적함수를 최소화하는 방향으로 level set 함수를 찾아간다.

설계변수는 유전체와 공기 사이의 경계가 되고, 이 경계는 다음과 같은 zero level set 함수로 표현이 가능하다.

$$\phi(\mathbf{x},t)=0 \qquad (14)$$

Level set 함수는 시간과 위치에 대한 함수이므로 경계에서 그것의 전미분은 Eulerian 공식을 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+V_n|\nabla\phi|=0 \qquad (15)$$

여기서, 속도에 의해서 설계영역의 형상이 변화되고 그것은 전자장해석을 통해 얻어지는 연속체 민감도인 목적함수의 미분치로 결정된다.

2. 연속체 민감도 해석

전자장시스템에서 목적함수의 전미분은 연속체 민감해석법에서 매질경계의 변화와 보조변수법을 이용하여 유도되어 진다. 예를 들어, 정전장시스템에서의 연속체 민감도는 다음과 같다.

$$\frac{dF}{dt}=\int_\gamma G(V,\lambda)V_n d\Gamma \qquad (16)$$

여기서,

$$G(V,\lambda)=(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}-1)\left[\epsilon_1 E_n(V^*)E_n(\lambda^*)+\epsilon_2 E_t(V^*)E_t(\lambda^*)\right]$$

V_n은 속도항의 법선성분, λ는 보조변수 및 γ는 설계경계이다. 민감도식은 목적함수와 설계경계면 속도의 관계를 나타낸다. 만약 속도가 다음과 같이 선택되면 목적함수는 시간에 대하여 감소한다.

$$V_n=-G(V,\lambda) \quad \text{on} \quad \gamma \qquad (17)$$

이렇게 얻어진 속도를 Hamilton-Jacobi 방정식에 대입하면 목적함수가 감소하는 level set 방정식이 다음과 같이 얻어진다.

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}-G(V,\lambda)|\nabla\phi|=0 \qquad (18)$$

위 식은 시간영역에서의 편미분방정식이고 이의 해석은 시간영역에서 최적화를 수행하는 것이다. 따라서 위 식의 변수 t는 최적화 과정의 "pseudo time" 이라 부른다.

IV. 전자장시스템의 LSM 적용사례

전자장시스템에서 level set method의 적용사례로 전장에서의 유전체 재분포, 자장에서의 이동체 해석 및 전계에서의 입자의 운동 문제의 수치해석 결과를 보인다.

1. 전장 내에서 유전체 분포

본 문제는 전극 사이에 유전체가 놓여있는 전계시스템의 시스템에너지가 최대가 되도록 유전체의 위상(topology) 및 형상(shape)을 최적화하는 것이다. 목적함수는 다음과 같이 전계시스템 에너지이다.

$$W=\int_\Omega \frac{1}{2}\mathbf{E}(\phi)\cdot\mathbf{D}(\phi)d\Omega \qquad (19)$$

정전계의 연속체 민감도해석을 통하여 얻어진 속도는 다음과 같고 이를 level set 방정식에 적용한다.

$$V_n=(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}-1)\left[\epsilon_1 E_n^2(V)+\epsilon_2 E_t^2(V)\right] \qquad (20)$$

아래의 그림은 휘어진 전극 사이에 놓인 12개 유전체 봉의 초기형상과 최적화된 최종형상의 zero level set 표면을 나타내고 있다.

그림 3은 초기형상과 최종형상에 대하여 level set 함수

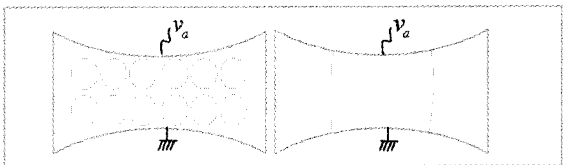

그림 2 초기와 최종형상의 zero level set

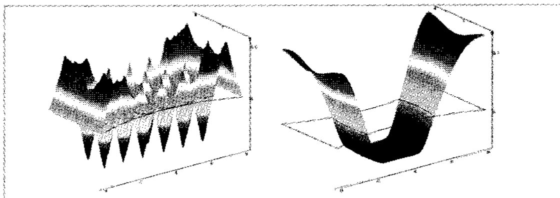

그림 3 초기형상과 최적화된 최종형상의 level set 함수의 분포

의 분포를 나타내고 있다. 그림 6에서는 위상 및 형상 변화가 일어나는 zero level set를 계산 단계별로 나타낸다.

그림 5는 최적화 과정에서 정전계 시스템 에너지의 변화와 구속조건 오차의 변화를 나타내고 있다.

그림6은 깔때기 모양 전극 사이에 놓여있는 15개 유전체 봉의 초기형상과 최적화 후 전계가 강한 아래 방향으로 유전체가 집중되는 최종형상을 나타내고 있다.

그림 7에서는 시간에 대하여 최적화 과정을 보이고 있다. 매질 영역에서 형상과 위상이 자유롭게 변화되는 것을 볼 수 있다.

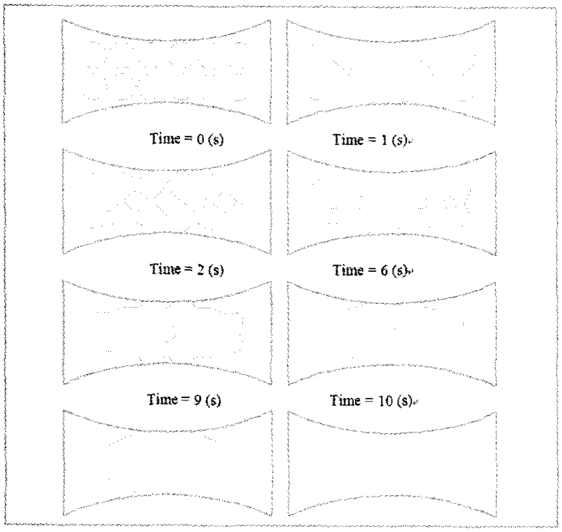

그림 4 둥근 전극 모델의 최적화 과정

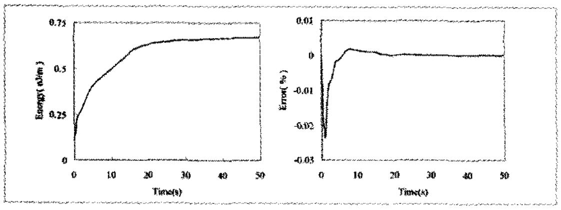
그림 5 시스템에너지와 구속조건의 오차변화

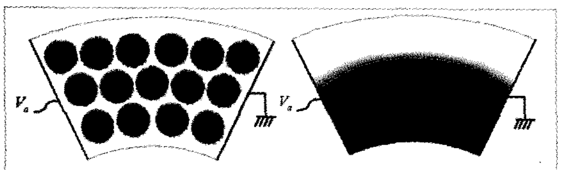
그림 6 초기와 최종형상에 대한 유전체 분포

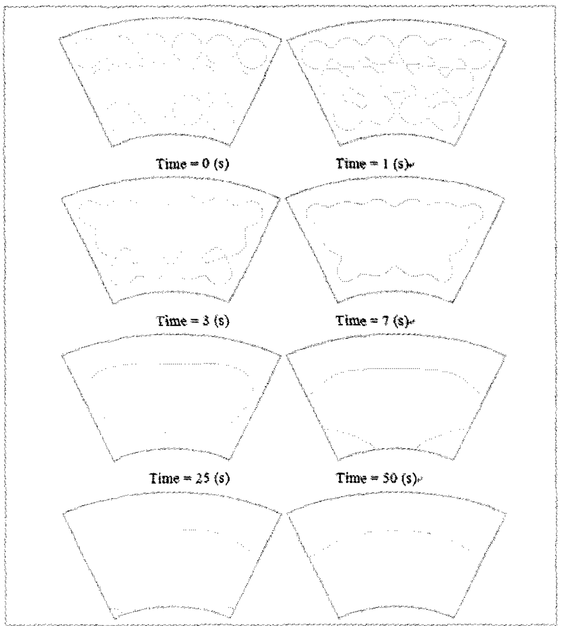

그림 7 깔때기 전극 모델의 최적화 과정

2. 자장 내에서 이동체 모델링

보통 이동체를 포함하는 전기기기 시스템의 동특성 해석을 위해서는 이동에 따른 형상에 대하여 반복적인 전자장해석을 수행하여야 하며, 매번 요소 재분할의 단계를 거쳐야 한다. Level set method를 이용하면 이동체의 형상변화를 위한 요소의 재분할 없이 이동체의 변화를 용이하게 표현할 수 있다. 아래 그림은 이동체가 포함된 전자석 시스템의 동특성 해석 예이다.

Level set method를 이용하여 전자석의 플런저 형상을 표현하고 전자장 해석으로 전자력을 계산한 후 플런저의 운동방정식과 결합하여 동특성을 해석한 결과의 예는 다음과 같다.

3. 전장 내에서 유전체 입자의 운동

앞의 예와 같이 유한요소법과 level set method의 결합은 고정된 요소를 이용하여 시간에 따라 바뀌는 물체의 경계 표현 및 전자장 해석을 용이하게 해준다. 이러한 수치해석 기법을 이용하여 전계 내에서 유전체 입자의 운동을 모델링한 수치해석 예는 아래와 같다.

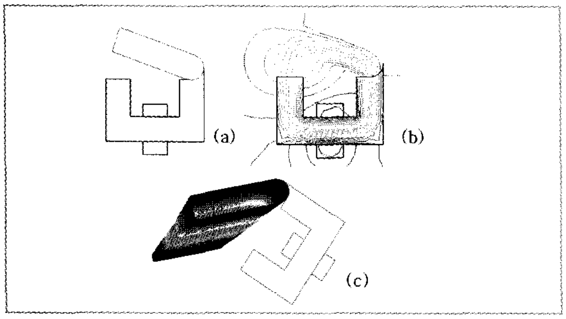

그림 8 전자석시스템의 (a)zero level set, (b)자속분포 및 (c)설계영역의 level set 함수 분포

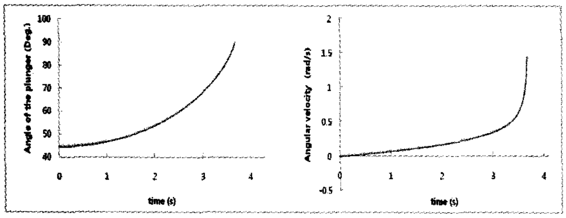

그림 9 시간에 따른 플런저의 (a)위치와 (b)속도

V. 결 론

Level set method는 다양한 경계에 대한 표현이 자유롭고, 변화된 형상에 대하여 물질상수의 설정이 용이하다. 따라서 설계변수의 정의 등 수치적인 형상모델링의 편리성을 줄뿐만 아니라 전자기시스템의 최적설계 및 역문제에서 큰 문제 중 하나인 목적함수의 국부최소치(local minimum)에 빠질 가능성이 적기 때문에 이를 적절히 활용하면 전자기시스템에 위상최적설계, 형상최적설계, 역문제의 해결에 크게 기여할 것으로 판단된다. 또한 이는 전자기-동역학 결합문제, 전자기-유체역학 결합문제 등의 해석에 많은 편리성을 줄 것으로 사료된다.

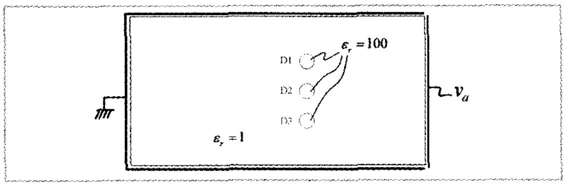

그림 10 불균일한 전계속의 유전체 입자

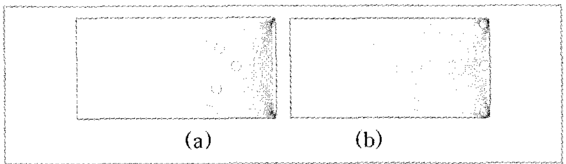

그림 11 시간에 따른 이동 유전체의 (a)초기와 (b)말기의 zero level set

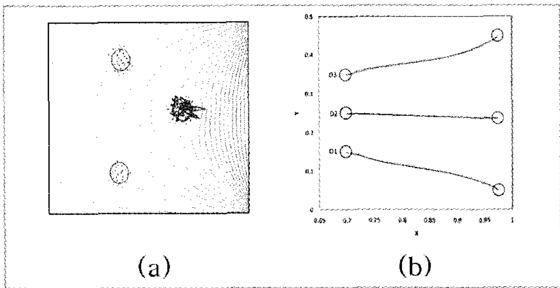

그림 12 (a)자계분포 및 (b)입자의 궤적

참고문헌

[1] Osher, S. and Fedkiw, R., Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces, Springer, New York, 2003.

[2] Sethian, J. A., Level Set Methods and Fast Marching Methods : Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science, Cambridge University Press, 1999.

[3] Michael Yu Wang, Xiaoming Wang and Dongming Guo, "A level set method for structural topology optimization," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 192, Issues 1-2, pp. 227-246, January 2003.

[4] Il-han Park, Jean Louis Coulomb and Song-yop Hahn, "Implementation of Continuum Sensitivity Analysis with Existing Finite Element Code", IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 29, No. 2, March 1993, pp. 1787-1790.

[5] Young Sun Kim, Jin Kyu Byun, Il Han Park, "A Level Set Method for Shape Optimization of Electromagnetic Systems", IEEE, Conference on Electromagnetic Field Computation, 2008.

[6] Young Sun Kim, Se Hee Lee, Hong Soon Choi, Il Han Park, "Application of the Level Set Method to Finite Element Modeling of Moving Objects in Electromagnetic Field", IEEE, Conference on Electromagnetic Field Computation, 2008.