

WKB 방법에 의한 일차원 환경사 파랑식의 해석해 An Analytical Solution of One Dimensional Mild Slope Equation by the WKB method

서 승 남*
Seung-Nam Seo*

요 지 : WKB 방법에 의한 일차원 환경사 파랑식의 해석해를 유도하였고 이는 Porter(2003)의 해와 유사한 형태를 갖는다. 적용적 측면에서 본 해석해는 관련 수치해에 견줄 만큼 해석상의 일반성을 갖는다. 유도과정에서 해면함수로 표현된 굴절 방정식의 해도 얻었다. Bremmer 방법을 이용한 본 해석해에 대한 수치계산 결과를 제시하였고 이들은 기존 결과와 일치한다.

핵심용어 : 환경사 파랑식, WKB 방법, Bremmer 방법, 해석해, 수치계산

Abstract : An analytical solution of one dimensional mild slope equation is derived by use of the WKB method, which has a form similar to Porter's solution(2003). The present solution is so general in the sense of application that it is comparable to the corresponding numerical solutions. In the derivation we also presented the solution of refraction equation in terms of surface displacement. Some numerical results of the present solution by use of Bremmer's method are presented which agree with existing numerical solutions.

Keywords : mild slope equation, WKB method, Bremmer's method, analytical solution, numerical computation

1. 서 론

해저면이 완만히 변하는 지형 위를 지나는 선형파랑의 변형은 환경사 파랑식(또는 수정 환경사 파랑식)으로 기술할 수 있다. Booij(1983)에 의하면 환경사 파랑식은 해저경사 1:3까지 적용할 수 있음을 밝혔으며 일부 항이 추가된 수정 환경사 파랑식은 보다 급한 경사의 지형으로 적용성이 확장된다(Chamberlain and Porter, 1995). 한편 방조제 단면의 일반적인 경사는 1:5, 일부 방파제의 경우 1:2 경사로 건설되기 때문에 1:3 경사는 비교적 급한 것임을 알 수 있다. 그리고 환경사 파랑식은 수정 환경사 파랑식에 비해 다루기 쉽고(Porter, 2003) 1:10의 자연 상태의 경사를 갖는 지형은 급한 경사로 간주될 수 있어 본 논문에서는 WKB 방법에 따른 일차원 환경사 파랑식의 해석해를 유도하고자 한다.

환경사 파랑식과 같이 함수를 계수로 갖는 모든 2차 미

분방정식은 일차 미분항이 존재하지 않는 표준형으로 변형할 수 있고, 이 표준형 미분방정식의 해는 지수함수의 형태로 표현할 수 있다. 만일 계수가 서서히 변하는 함수이면 해의 지수함수에는 서서히 변하는 이 함수의 형태가 존재하게 된다. 양자역학의 Schrödinger 방정식은 이 형태에 속하며, WKB 방법을 사용하면 쉽게 근사해를 구할 수 있기 때문에 1920년대에 집중적인 연구가 이루어졌다(Holmes, 1995).

환경사 파랑식은 Mei(1989)가 보인 바와 같이 Schrödinger 형태의 미분식으로 변형할 수 있다. 따라서 본 논문에서는 WKB 방법을 적용하고 해의 유도가 보다 간단한 환경사 파랑식을 대상으로 하며 구한 해석해에 포함된 물리적 의미를 분석한 후에 수치계산 결과를 제시하고자 한다. 여기서 다루고자 하는 문제는 해안선 방향으로의 지형의 변화율이 없는 즉, Snell 법칙을 적용할 수 있는 지형을 지나는 사각 입사파랑에 의한 변형에 대한 문제로

*한국해양연구원 연안개발·에너지연구부 책임연구원(Coastal Engineering & Ocean Energy Research Department, KORDI, Ansan PO. Box 29, Seoul 425-600, Korea. snseo@kordi.re.kr)

이는 본질적으로는 1차원 문제이다.

Kajiura(1961)는 WKB 방법을 이용하여 천해파랑 변형에 대한 직교입사의 1차원 해석해를 구하였고, Mei(1989)는 Kajiura의 해의 유도과정을 재구성하였으며 Meyer(1979)의 기법에 대해서도 소개하였다. 위의 기존 WKB 연구에서 해를 구하는 과정은 두 단계로 구분할 수 있다. 첫째 단계에서는 천해 방정식에 지수함수 형태로 가정한 진행파에 대한 근사해를 대입하여 축차적인 미분식을 얻고 이를 풀어 해를 구한다. 여기서 구한 해는 반사를 무시한 천수(또는 굴절)조건을 만족하는 해가 된다. 이로부터 반사를 허용한 해로 확장하기 위해, 둘째 단계로 WKB의 해에 존재하는 미지 상수를 함수로 간주하고 연속방정식과 운동방정식에 대입하여 연립 미분방정식을 구성한다. 그리고 연립 미분방정식을 풀기 위해 미지 함수를 perturbation법으로 전개하여 축차적으로 풀어 해를 구한다.

본 논문은 기존 연구와 달리 환경사 파랑식에 WKB 방법을 이용하여 모든 수심(kh)조건에 대한 해석해를 구하고자 한다. 또한 해의 유도에 포함된 가정을 명시하고 관련된 물리적 의미를 재조명함으로써 파랑변형에 대한 이해의 폭을 넓히고자 노력하였다. 이를 위해 반사를 무시한 WKB 해석해와 Snell 법칙과의 관련성 및 지형 변화에 의한 반사율과 투과율의 의미를 본 해석해를 이용하여 분석하였다. 그리고 반복적인 형태의 연안사주 지형 위를 지나는 특정한 주기의 파랑에서 반사율이 급격히 증가하는 Bragg resonance의 현상에 대한 의미를 재분석하였으며 적분방정식에 의한 Porter(2003)의 해석해와의 관계를 기술하였다.

최근 환경사 파랑식에 대한 해석해를 유도하기 위해 축대칭과 같은 특정한 지형에 대한 연구가 수행되었다(Liu *et al.*, 2004; 정서, 2006; Jung and Suh, 2007). 이들의 해는 2차원 문제로부터 출발하나 지형이 축대칭이므로 본질적으로는 1차원 문제라 할 수 있다. 한편 일차원 환경사 파랑식의 경우 본 논문에서는 특정한 지형을 대상으로 정하지 않기 때문에 본 일차원 해석해는 이에 상응하는 수치모형의 해와 같이 모든 지형에 대해서 적용이 가능하다. 본 논문의 해는 파수(k)와 수심(h)의 함수로 나타내지며 파수는 파랑 분산식에서 반복법으로 계산하게 됨으로 수심의 함수이다. 그래서 Mei(1989)가 보인 천해역에서의 단순한 지형을 제외한 일반적인 지형의 경우에 대한 해를 구하기 위해 수치계산이 필요하다.

제 2절에서는 천해파에 대한 Kajiura의 방법을 임의의 상대수심 kh 에 적용할 수 있을 뿐만 아니라 사각입사를

고려할 수 있도록 확장된 해를 구하는 과정을 기술하였다. WKB 방법의 핵심인 지수함수 형태의 근사해 구성에 Keller(1958)의 방법 대신 수식 유도가 편리한 Bender and Orszag(1978)의 방법을 사용하였다. 그리고 환경사 파랑식을 연속방정식과 운동방정식으로 분리하기 위해 Lee *et al.*(1998)의 방법을 사용하였고 해의 유도과정 중 주요 사항에 대한 물리적 의미를 기술하였다. 제 3절에서는 Booi(1983)의 사면계단 지형과 일정 수심 위에 놓인 일련의 연안사주 지형에 대한 본 해석해의 수치계산 결과를 제시하고 그 특성을 분석하였다.

2. WKB 해석해

환경사 해지면 위를 지나는 파랑의 변형을 지배하는 진행파 성분만을 고려한 환경사 파랑식은 해면함수 $\hat{\eta}$ 의 식(1)로 표현된다(Berkhoff, 1972).

$$\nabla \cdot \left(\int_{-h}^0 f^2 dz \right) \nabla \hat{\eta} + k^2 \hat{\eta} \int_{-h}^0 f^2 dz = 0 \quad (1a)$$

$$P = \int_{-h}^0 f^2 dz = \int_{-h}^0 \frac{\cosh^2 k(h+z)}{\cosh^2 kh} dz = \frac{CC_g}{g} \quad (1b)$$

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (1c)$$

여기서 f 는 식(1b)로 정의된 진행파 성분의 수심분포 함수이다. 파수 k 는 주기($=2\pi/\omega$)와 수심(h)이 주어지면 파랑 분산식 (1c)에서 계산할 수 있고, $C(=\omega k)$ 는 파속, C_g 는 군속도 그리고 g 는 중력가속도이다. 그리고 ∇ 은 수평좌표계에 대한 2차원 미분연산자이다.

황방향 수심변화가 없는 경우 해면함수는 $\hat{\eta}(x, y) = \eta(x)e^{imy}$ 로 분리할 수 있고 이 때 k 는 x 만의 함수이므로 P 역시 x 만의 함수가 된다. 파수벡터의 x, y 성분을 각각 l, m 이라 표기하면 식 (1a)는 다음과 같이 1차원 미분방정식으로 변형할 수 있다.

$$\frac{d}{dx} \left(P \frac{d\eta}{dx} \right) + P l^2 \eta = 0 \quad (2)$$

식 (2)에서 $l^2 = k^2 - m^2$ 이 정의되었고 m 은 상수로 입사각과 수심이 주어지면 계산할 수 있다. 그러므로 주어진 수심에서 k 를 계산하고 계산된 상수 m 을 이용하면 모든 위치에서 l 을 구할 수 있다.

2.1 반사를 무시한 WKB 해

식 (2)를 WKB 방법을 적용하기 위한 미분방정식으로

변형하기 위해 서행 좌표 $\bar{x} \equiv \mu x$ 를 도입한다. 여기서 매개변수 μ 는 환경사 파랑식의 조건인 수심이 완만하게 변하여 한 파장당 파랑변형의 크기가 작은 조건 즉 $\mu = (\nabla h/kh) \ll 1$ 의 의미로 국한할 수 있으나 일반적으로는 임의의 값을 가질 수 있다. 서행 좌표를 사용하여 식 (2)를 변형하면 식 (3)을 얻을 수 있다.

$$\mu^2 \frac{d^2 \eta}{d\bar{x}^2} + \mu^2 \frac{d(\ln P)}{d\bar{x}} \frac{d\eta}{d\bar{x}} + l^2 \eta = 0 \quad (3)$$

최고 차수에 매개변수를 갖는 식 (3)은 WKB 방법을 적용할 수 있는 미분방정식의 형태이다. 식 (3)의 근사해를 구성하는 방법은 Keller(1958)에 의한 식 (4a)과 Bender and Orszag(1978)의 식 (4b)를 각각 사용할 수 있다. Keller의 전개는 해면함수를 미지함수인 진폭 A 와 위상 S 의 곱으로 구성하여 이 근사해를 미분방정식 (3)에 대입하면 미분에 의해 생성되는 항이 많아져 유도과정이 복잡해진다. 반면에 식 (4b)에는 해면 미지함수가 S 만으로 표현되어 미분 시에 수식 전개가 더 용이하게 된다. 따라서 본 연구에서는 식 (4b)를 근사해로 사용한다.

$$\eta(\bar{x}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (i\mu)^n A_n(\bar{x}) e^{iS(\bar{x})/\mu} \quad (4a)$$

또는

$$\eta(\bar{x}) \sim \exp\left[\frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n S_n(\bar{x})\right] \quad (4b)$$

식 (4b)에 존재하는 또 다른 매개변수 δ 는 식 (4a)에서와 같이 μ 를 사용할 수도 있으나 이는 근사해의 표현을 일반화하기 위한 것이다. 그리고 이는 뒤에 보인 바와 같이 근사해를 미분방정식에 대입하여 축차적으로 풀 때 결정된다. 식 (4b)를 식 (3)에 대입하여 정리하면 근사해에 존재하는 지수함수가 미분방정식의 모든 항에 나타나므로 이 방법은 선형 방정식의 근사해를 구하는 데 유용하다. 지수함수는 항상 0보다 크므로 이를 제거하면 식 (5)가 된다.

$$0 = l^2 + \frac{\mu^2}{\delta} (S_0'' + \delta S_1'' + \delta^2 S_2'' + \dots) + \frac{d(\ln P)}{d\bar{x}} \frac{\mu^2}{\delta} \times (S_0' + \delta S_1' + \delta^2 S_2' + \dots) + \frac{\mu^2}{\delta^2} \left\{ \begin{aligned} &(S_0')^2 + 2\delta S_0' S_1' + \delta^2 [2S_0' S_2' + (S_1')^2] \\ &+ \delta^3 [2S_0' S_3' + 2S_1' S_2'] + \delta^4 [2S_0' S_4' + 2S_1' S_3' + (S_2')^2] \\ &+ \delta^5 [2S_0' S_5' + 2S_1' S_4' + 2S_2' S_3'] + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

식 (5)로 전개된 선두 항의 비교로부터 매개변수를 포함하는 항의 크기는 1이 되어야 하므로 $\delta = i\mu$ 를 얻게 된다. 이를 대입하여 μ 의 멱승에 대해 축차적으로 정리하면 식 (6)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu^0: &-(S_0')^2 + l^2 = 0 \\ \mu^1: &S_0'' + 2S_0' S_1' + \frac{d(\ln P)}{d\bar{x}} S_0' = 0 \\ \mu^2: &S_1'' + 2S_0' S_2' + (S_1')^2 + \frac{d(\ln P)}{d\bar{x}} S_1' = 0 \\ &\dots \end{aligned} \quad (6)$$

WKB 이론에서는 식 (6)에 존재하는 첫 식은 해의 위상에 관련된 eikonal 식, 둘째 식은 해의 크기 변화를 나타내는 운송식(transport equation)으로 각각 불린다(Bender and Orszag, 1978). 이를 풀면 식 (7)을 얻을 수 있으며 해에 포함된 미지상수를 감안하면 S_1 의 계산에는 S_0 의 부호 가운데 +만을 취할 수 있다.

$$\begin{aligned} S_0 &= \pm \int l d\xi \\ S_1 &= -\frac{1}{2} \int \frac{d(\ln P)}{d\xi} d\xi = -\frac{1}{2} \ln(P) \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)을 식 (4b)로 정의한 해면함수에 대입하여 $O(\mu^1)$ 까지 고려한 해는 식 (8)이 된다.

$$\eta = \frac{c_1}{\sqrt{Pl}} e^{\frac{i}{\mu} \int l d\xi} + \frac{c_2}{\sqrt{Pl}} e^{\frac{i}{\mu} \int l d\xi} \quad (8)$$

환경사 파랑식은 2차 미분방정식이므로 해에는 2개의 미지상수를 포함하게 되고, 식 (8)에 존재하는 미지상수 c_1, c_2 는 경계조건이 부여되면 계산할 수 있다. 식 (1)에서 시간의존 성분은 $\exp(-i\omega t)$ 로 가정하였기 때문에 여기서 c_1 은 x 축의 양의 방향으로, c_2 는 음의 방향으로 각각 진행하는 파랑의 상수로 이 미지상수를 \sqrt{Pl} 로 나눈 값이 진폭이다.

식 (8)의 해는 횡방향의 지형변화가 없는 환경사 지형을 지나는 파랑변형 가운데 반사를 무시한 경우가 된다. 반사를 무시하면 파랑은 입사조건에 의해서만 결정되므로 식 (8)에 존재하는 미지수는 좌우 각각의 입사조건에 의해서 결정된다. 이러한 조건 아래서 식 (8)이 굴절방정식의 해와 동일함을 입증하기 위해 식 (8)의 환경사 파랑식의 해에 매개변수를 $\mu = 1$ 로 정하고 x 축의 양의 방향으로만 진행하는 파랑만을 고려한다.

$$\eta = c_1 \frac{e^{i \int l d\xi}}{\sqrt{Pl}} = c_1 \frac{e^{i \int l d\xi}}{\sqrt{\frac{w}{g} C_g \cos \theta}} \quad (9a)$$

식 (9a)에 존재하는 항들은 앞에서 정의된 $P = CC_g/g$, $C = w/k$, $l = k \cos \theta$ 이며 파향 θ 는 파향선이 x 축과 이루는 각이다. 한편 횡방향의 지형변화가 없는 환경사 지형 위를 지나는 파랑은 반사를 무시하는 경우에는 Snell 법칙이 성립함으로 식 (9b)을 이용하여 파향과 파고(H)를 계산할 수 있다(Dean and Dalrymple, 1984).

$$\begin{cases} (k \sin \theta)_1 = (k \sin \theta)_2 \\ (H^2 C_g \cos \theta)_1 = (H^2 C_g \cos \theta)_2 \end{cases} \quad (9b)$$

식 (9b)에서 첨자 1, 2는 임의의 두 지점에서 계산한 값을 의미한다.

식 (9a)에서 파랑의 에너지를 계산하기 위해 절댓값을 취하면 진폭이 얻어진다. 이를 자승한 값에 군속도 벡터의 x 성분을 곱한 에너지 이송량 $|\eta|^2 C_g \cos \theta$ 은 $|c_1|^2 / (\omega/g)$ 이 되어 일정함으로 에너지 보존식을 만족한다. 한편 식 (9a)에서 진폭을 파고로 변환하기 위해 2를 곱한 후 에너지 보존결과를 두 점에서 적용하면 식 (9b)의 둘째 식을 얻게 된다. 그리고 횡방향의 파수($m = k \sin \theta$)는 일정함으로 파향 계산은 식 (9b)의 첫째 식과 같다.

결국 식 (9a)는 Snell 법칙에 의해 변형된 파랑의 파고와 파향을 해면함수로 표현한 것이며 서(2007a)는 포물형 근사식을 유도하기 위해 식 (9a)를 사용하였다. 위에 보인 x 축의 양의 방향으로 진행되는 파랑의 식 (9a)가 에너지 보존식을 만족함과 같이 식 (8)의 우변 둘째 항인 음의 방향으로 진행되는 파랑도 에너지 보존식을 만족함을 보일 수 있어 이를 중첩한 식 (8)로 주어진 해면함수도 역시 에너지 보존법칙을 만족한다.

2.2 반사를 고려한 해

파랑의 반사를 무시한 경우의 해인 식 (8)을 반사를 고려한 해로 확장하기 위한 과정을 기술하기로 한다. 파랑은 수심이 변함에 따라 일부 에너지가 반사되고 나머지는 투과되는 변형과정을 겪는다. 수심이 변하는 지역을 지나는 파랑의 변형은 이 일련의 변형과정이 복합적으로 이루어져 발생한 최종적인 결과이다.

이 과정을 수식화하기 위해서는 식 (8)에 존재하는 미지 상수를 미지 함수로 확장하는 것이 필요하며 이를 정하기 위해 두 개의 식이 요구된다. 기존 연구(Kajiura,

1961)에서는 천해 연속방정식과 운동방정식을 사용하여 미지 함수에 대한 관계식을 구성하였다. 이는 Bremmer (1951)의 방법과 유사하며 본 논문에서는 Lee *et al.*(1998)이 제시한 환경사 파랑식과 관련된 연속방정식과 운동방정식을 이용한다.

해면에서의 속도포텐셜 $\tilde{\phi}(x, 0, t)$ 과 해면함수 η 의 시간의존 함수 $\tilde{\eta}(x, t) \equiv \eta(x)e^{-i\omega t}$ 는 선형 동역학 경계조건으로부터 식 (10)을 만족한다.

$$\tilde{\phi} = -\frac{ig}{\omega} \tilde{\eta} = \frac{g}{\omega^2} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} \quad \text{on } z=0 \quad (10)$$

환경사 파랑식을 해면에서의 시간의존 속도포텐셜로 나타내기 위하여 식 (2)에 시간성분 $-(ig/\omega)\exp(-i\omega t)$ 를 곱해 식 (10)을 이용하면 식 (11)을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right) + P \tilde{\phi} = \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right) + \frac{g P l^2}{\omega^2} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} = 0 \quad (11)$$

시간 성분을 포함하는 부피 이송량(volume flux)에 비례하는 $\tilde{Q}(x, t)$ 를 Lee *et al.*(1998)와 같이 정의한다.

$$\tilde{Q} = P \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \quad (12)$$

식 (12)의 \tilde{Q} 에 대해 Copeland(1985)는 “물 입자의 속도(particle velocity)를 수심 적분한 값”으로 표현하여 이는 천해에서의 부피 이송량임을 밝혔다. 이를 보이기 위해 변수 P 의 천해 근사는 수심 h 가 되고 천해에서의 유속 $\tilde{\phi}/\partial x$ 은 수심의 깊이에 따라 변하지 않고 일정함으로 결국 식 (12)는 부피 이송량이 된다. 하지만 모든 수심조건에 대한 해를 구하고자 하는 본 논문의 관점에서 해석할 때 식 (12)는 부피 이송량의 함수라고 표현하는 것이 적절하다.

환경사 파랑식과 관련된 연속방정식을 얻기 위해 식 (12)를 식 (11)에 대입하여 식 (13a)과 같이 변형한다.

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} + \frac{g P l^2}{\omega^2} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} = 0 \quad (13a)$$

그리고 환경사 파랑식과 관련된 운동방정식을 얻기 위해 식 (12)를 시간 t 에 대해 미분한 후 식 (10)을 대입하면 식 (13b)를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} = -i\omega P \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} = -g P \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} \quad (13b)$$

식 (13)에서 시간의존 성분을 분리하면 연속방정식과 운

동방정식에 해당하는 식으로 분리된 각각의 식 (14)를 얻는다.

$$i\omega\eta = \frac{\omega^2}{gPl^2} \frac{dQ}{dx} \quad (14a)$$

$$i\omega Q = gP \frac{d\eta}{dx} \quad (14b)$$

반사를 무시한 경우 WKB 방법으로 구한 식 (8)에는 미지 상수가 존재한다. 그러나 부분반사를 허용하게 되면 식에 존재하는 미지 상수는 국지적인 반사에 의해 변화하게 됨을 유추할 수 있다. 이를 고려하여 Bremmer(1951)와 같이 이들을 미지함수 $E(x)$ 와 $F(x)$ 로 확장한다.

$$\eta(x) = E(x) \frac{e^{iS(\bar{x})/\mu}}{\sqrt{Pl}} + F(x) \frac{e^{iS(\bar{x})/\mu}}{\sqrt{Pl}} \quad (15)$$

여기서 위상함수는 $S(\bar{x}) = \int l d\xi$ 를 의미한다. 그리고 식 (14b)와 식 (15)로부터 Q 의 성분을 $O(\mu^0)$ 까지만 취하면 다음과 같이 된다.

$$Q(x) = \frac{g\sqrt{Pl}}{\omega} [E(x)e^{iS/\mu} - F(x)e^{iS/\mu}] \quad (16)$$

미지함수 $E(x)$ 와 $F(x)$ 의 관계식을 얻기 위해 또는 식 (14)에 대입하기 위하여 식 (15)와 (16)를 미분하면 식 (17)을 각각 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dx} = & -\frac{\mu}{2\sqrt{Pl}} \frac{d(\ln Pl)}{d\bar{x}} (Ee^{iS/\mu} + Fe^{iS/\mu}) \\ & + \frac{il}{\sqrt{Pl}} (Ee^{iS/\mu} - Fe^{iS/\mu}) \\ & + \frac{1}{\sqrt{Pl}} \left(\frac{dE}{dx} e^{iS/\mu} + \frac{dF}{dx} e^{iS/\mu} \right) \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dx} = & \frac{g(P_l)^{1/2}}{\omega} \frac{d(\ln Pl)}{d\bar{x}} \mu (Ee^{iS/\mu} - Fe^{iS/\mu}) \\ & + \frac{g(P_l)^{1/2}}{\omega} \left(\frac{dE}{dx} e^{iS/\mu} - \frac{dF}{dx} e^{-iS/\mu} \right) \\ & + \frac{ig_l(P_l)^{1/2}}{\omega} (Ee^{iS/\mu} + Fe^{iS/\mu}) \end{aligned} \quad (17b)$$

식 (17)를 식 (14)에 대입하여 정리하면 연립 미분방정식 (18)를 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dx} e^{iS/\mu} - \frac{dF}{dx} e^{-iS/\mu} = & -\frac{\mu d(\ln Pl)}{2 d\bar{x}} (Ee^{iS/\mu} - Fe^{-iS/\mu}) \\ \frac{dE}{dx} e^{iS/\mu} + \frac{dF}{dx} e^{-iS/\mu} = & \frac{\mu d(\ln Pl)}{2 d\bar{x}} (Ee^{iS/\mu} + Fe^{iS/\mu}) \end{aligned} \quad (18)$$

그리고 식 (18)의 연립 방정식을 풀면 식 (19)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dx} = & \frac{\mu d(\ln Pl)}{2 d\bar{x}} F e^{-2iS/\mu} \\ \frac{dF}{dx} = & \frac{\mu d(\ln Pl)}{2 d\bar{x}} E e^{2iS/\mu} \end{aligned} \quad (19)$$

결국 WKB 방법에 의해 반사를 허용하는 파랑변형을 지배하는 식 (19)는 미지함수가 상호 연계된 비교적 간단한 1차 미분식의 형태를 보인다.

식 (19)의 연립 미분방정식에 천해조건을 적용하면 기존 연구의 결과와 같게 된다. 이를 보이기 위해 직교입사에서는 파수의 x 성분 l 은 파수 k 로 바뀌며 변수 P 의 천해 근사는 수심 h 가 된다. 그러므로 이러한 조건 아래서는 $Pl = kh^2$ 이고 \bar{x} 에 대한 미분을 풀어쓰면 식 (19)는 Mei(1989) 제 4장의 식 (5.13)이 된다.

식 (19)에는 매개변수 μ 가 존재하므로 이를 축차적으로 풀기 위해 미지함수들을 식 (20)과 같이 μ 에 대해 전개한다.

$$\begin{cases} E = E_0 + \mu E_1 + \mu^2 E_2 + \dots \\ F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots \end{cases} \quad (20)$$

이를 식 (19)에 대입하고 μ 의 멱승에 대해 정리하면 식 (21)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu^0: \frac{dE_0}{dx} = \frac{dF_0}{dx} = 0 \\ \mu^0: \begin{cases} \frac{dE_n}{dx} = \left[\frac{d}{d\bar{x}} \ln(Pl)^{1/2} \right] F_{n-1} e^{2iS/\mu} \\ \frac{dF_n}{dx} = \left[\frac{d}{d\bar{x}} \ln(Pl)^{1/2} \right] E_{n-1} e^{2iS/\mu}, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

식 (21)의 첫째 식을 풀면 $O(\mu^0)$ 의 미지함수는 상수인 것을 알 수 있고 이 상수를 포함하여 상위 차수에 대한 미지함수 E_n, F_n 는 경계조건으로부터 계산할 수 있다.

2.3 경계조건

환경사 파랑식 (2) 또는 이를 WKB 방법으로 유도한 연립 1차 미분식 (21)을 풀기 위해 2개의 경계조건이 필요하다. 본 논문에서는 지형을 3개의 구역으로 나누어 중간 구역에서는 지형이 변하나 이 외측의 구역에서는 수심이 일정한 경우로 가정한다. 앞에서 유도한 식은 파랑이 좌우측의 양방향에서 입사하는 일반적인 경우이나 여

기서는 입사파랑은 좌측에만 존재하는 경우로 한정한다. 그래서 좌측의 구역을 입사구역(1 구역), 우측의 구역을 투과구역(2 구역)으로 표기하고 이 구역에서의 수심 h_1 , h_2 는 일정하고 구역의 경계점 x_1 , x_2 은 수심이 일정한 곳에 각각 위치한다.

해석에 진행과만을 사용하는 경우 수심이 일정한 구역 1(또는 구역 2)의 어느 점에 경계점 x_1 (또는 x_2)이 위치하든 물리적 특성인 반사율과 투과율은 동일해야 한다. 식 (1)의 유도에서는 진행과만을 고려하였기에 이들의 특성은 경계점의 위치에 따라 변하지 않을 것을 예상할 수 있다. 이에 대한 검토 즉 경계점 위치에 따른 반사율과 투과율에 대한 계산의 영향은 해를 구한 뒤에 기술하기로 한다. 한편 역류파(non-propagating waves)를 포함하는 경우에는 역류파의 영향으로 진행파의 크기가 달라져 영향을 받게 된다(서, 2008).

기존의 연구에서는 경계조건을 분명히 나타내지 않았기 때문에 WKB 방법으로 해를 구하는 과정이 정연하지 않았다. 그래서 본 논문에서는 경계조건을 명시하고 여기에 파생된 모든 미지함수를 WKB 방법으로 전개함으로써 체계적으로 해를 구하고자 한다. 입사 경계점에서 반사율을 R , 투과 경계점에서 투과율을 T 라 표기하여 경계조건을 해면함수로 표현하면 식 (22)로 나타낼 수 있다 (Porter, 2003).

$$\eta = e^{il_1(x-x_1)} + Re^{-il_1(x-x_1)}, \quad x \leq x_1 \quad (22a)$$

$$\eta = Te^{il_2(x-x_1)}, \quad x \geq x_2 \quad (22b)$$

여기서 첨자 1과 2는 구역을 의미한다. 입사점에 파봉이 위치하도록 정의된 식 (22)를 미분하여 각 경계점에서의 값을 연관시키면 다음 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\eta'(x_1) + il_1 \eta(x_1) = 2il_1 \quad (23a)$$

$$\eta'(x_2) - il_2 \eta(x_2) = 0 \quad (23b)$$

여기서 $(\quad)' \equiv d(\quad)/dx$ 이다. 한편 반사율과 투과율의 관계식으로 나타내기 위해 식 (23)을 변형하면 식 (24)가 된다.

$$\eta'(x_1) - il_1 \eta(x_1) = -2il_1 R \quad (24a)$$

$$\eta'(x_2) - il_2 \eta(x_2) = 2il_2 T \quad (24b)$$

식 (15)에 존재하는 미지함수를 정하기 위해 경계조건 식 (23)과 (24)에 식 (15), (17a) 그리고 (18)를 대입하여 정리하면 식 (25)와 (26)을 얻을 수 있다. 경계점 x_1 에서는 식 (25)를 얻을 수 있고

$$I = \frac{E(x_1)e^{iS_1/\mu}}{\sqrt{P_1 I_1}}, \quad R = \frac{F(x_1)e^{-iS_1/\mu}}{\sqrt{P_1 I_1}} \quad (25)$$

그리고 경계점 x_2 에서는 식 (26)을 얻는다.

$$0 = \frac{F(x_2)e^{iS_2/\mu}}{\sqrt{P_2 I_2}}, \quad T = \frac{F(x_2)e^{-iS_2/\mu}}{\sqrt{P_2 I_2}} \quad (26)$$

위 식들로부터 반사율은 미지함수 $F(x_1)$ 에 의해, 투과율은 $E(x_1)$ 에 의해 각각 결정되며 위상함수인 $S_1 = S(x_1) = 0$, $S_2 = S(x_2)$ 를 각각 의미한다. 식 (25)와 (26)에 미지함수의 전개식 (20)을 대입하면 μ 의 멱승에 대한 축차적인 식 (27)을 얻고 이는 미분방정식 (21)의 경계조건이 된다.

$$\begin{cases} E_0(x_1) = \sqrt{P_1 I_1}, F_0(x_2) = 0 \\ E_n(x_1) = 0, F_n(x_2) = 0, n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (27)$$

식 (21)로부터 E_0 와 F_0 는 상수이므로 이와 관련된 식 (27)의 항들의 성립구간은 정의구역 전체로 확장된다.

식 (21)을 x_1 에서 x 까지의 구간에 대해 적분하고 x_1 에 대한 경계조건 식 (27)을 이용하면 식 (28)을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} E_n(x) = \int_{x_1}^x \left[\frac{d}{d\xi} \ln(Pl) \right]^{1/2} F_{n-1}(\xi) e^{-2iS/\mu} d\xi \\ F_n(x) = F_n(x_1) + \int_{x_1}^x \left[\frac{d}{d\xi} \ln(Pl) \right]^{1/2} E_{n-1}(\xi) e^{2iS/\mu} d\xi \end{cases}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (28)$$

식 (28)을 경계점 x_2 에서 계산하고 x_2 에 대한 경계조건 식 (27)을 이용하면 식 (29)를 얻게 된다.

$$\begin{cases} E_n(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d}{d\xi} \ln(Pl) \right]^{1/2} F_{n-1}(\xi) e^{-2iS/\mu} d\xi \\ F_n(x_1) = - \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d}{d\xi} \ln(Pl) \right]^{1/2} E_{n-1}(\xi) e^{2iS/\mu} d\xi \end{cases}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (29)$$

그리고 식 (21)과 (27)에서 $F_0(x) = 0$ 가 되므로 식 (28)과 (27)로부터 다음 식이 얻어진다.

$$\begin{cases} E_{2n+1}(x) = 0 \\ F_{2n}(x) = 0 \end{cases}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (30)$$

마지막으로 반사율 R 과 투과율 T 도 μ 의 멱승수로 다음과 같이 전개한다.

$$\begin{aligned}
 R &= R_0 + \mu R_1 + \mu^2 R_2 + \mu^3 R_3 + \dots \\
 T &= T_0 + \mu T_1 + \mu^2 T_2 + \mu^3 T_3 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

이를 식 (25b)와 (26b)에 대입하고 식 (20)과 (27)을 이용하여 μ 의 멱승에 대해 축차적으로 정리하면 식 (32)를 얻을 수 있다.

$$\begin{cases}
 R_0 = 0 \\
 R_n = \frac{F_n(x_1)}{\sqrt{P_1 I_1}}, n = 1, 2, \dots
 \end{cases}
 \tag{32a}$$

$$\begin{cases}
 T_0 = \frac{\sqrt{P_1 I_1}}{\sqrt{P_2 I_2}} e^{iS_2/\mu} \\
 T_n = \frac{E_n(x_2)}{\sqrt{P_2 I_2}} e^{iS_2/\mu}, n = 1, 2, \dots
 \end{cases}
 \tag{32b}$$

반사율과 투과율에 대한 식 (32)를 계산하기 위해서는 경계점에 관한 식 (29)에 존재하는 적분을 계산하여야 한다. 이를 위하여 식 (29)의 피적분 함수 가운데 일부인 kernel을 식 전개에 편의를 위해 식 (33)으로 정의한다.

$$G(\xi) \equiv e^{-2iS(\xi)/\mu} \frac{d}{d\xi} \ln \sqrt{PI}
 \tag{33}$$

식 (33)은 지수함수로 표현된 빠른 진동을 나타내는 위상을 갖는 파형이 서서히 변하는 함수에 의해 변조(modulation)된 두 부분의 곱이다. 변조함수는 미분 형태로 PI 의 변화율이 없는 즉 수심이 일정한 지점에서는 그 값이 0이 된다. 한편 변조부분은 실수이므로 kernel G 의 공액함수 G^* 는 위상함수에 (-) 부호를 갖게 된다. 그리고 식 (33)을 식 (29)에 대입하고 위에서 구한 경계조건을 이용하면 경계점에서의 미지함수는 식 (34)가 된다.

$$\begin{cases}
 E_n(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} G(\xi) F_{n-1}(\xi) d\xi \\
 F_n(x_1) = -\int_{x_1}^{x_2} G^*(\xi) E_{n-1}(\xi) d\xi, n = 1, 2, \dots \\
 E_0(x) = \sqrt{P_1 I_1}, F_0(x) = 0
 \end{cases}
 \tag{34}$$

이 순환식 (34)를 사용하여 경계점에서 모든 미지함수를 계산할 수 있고 이를 식 (32)에 대입하면 μ 의 멱승별 반사율과 투과율을 계산할 수 있다. 계산된 차수별 반사율과 투과율을 식 (31)에 대입하면 최종 반사율과 투과율이 계산된다. 한편 해면함수를 계산하기 위해서는 식 (29)와 (28)을 이용하여 적분함으로써 차수별 미지함수를 계산하고 이를 식 (20)에 대입하면 최종 미지함수가 계산된

다. 그리고 계산된 미지함수를 식 (15)에 대입하면 임의 점에서의 해면함수를 계산할 수 있다.

2.4 선두 투과율과 반사율

본 연구에서 유도된 해는 수렴이 빠르며 이는 다음 절에서 보이기로 하고 여기서는 해의 선두 항만을 고려하여 이에 포함된 물리적 의미를 검토하기로 한다. 지점 2에서의 선두 투과율은 식 (32b)로부터 식 (35)가 되며 선두 반사율은 식 (32a)에서 0으로 주어진다. 여기서 Mei(1989)와 같이 매개변수는 $\mu = 1$ 로 설정하였고 이 후부터는 이 값을 사용한다.

$$T_0 = \frac{\sqrt{P_1 I_1}}{\sqrt{P_2 I_2}} e^{i \int_{x_1}^{x_2} I dx} = \frac{\sqrt{(C_g \cos \theta)_1}}{\sqrt{(C_g \cos \theta)_2}} e^{i \int_{x_1}^{x_2} I dx}
 \tag{35}$$

식 (35)는 지형이 아주 완만하여 반사가 무시된 경우의 해로 이 경우 지점 2에서 파고를 입사파고로 나눈 투과율은 천수 계수 $\sqrt{(C_g)_1}/\sqrt{(C_g)_2}$ 와 굴절계수 $\sqrt{(\cos \theta)_1}/\sqrt{(\cos \theta)_2}$ 의 곱으로 표현되어서 Snell 법칙으로 구한 파고와 동일하다. 그리고 지점 2에서의 위상은 파수의 x 성분을 입사점(x_1)에서 지점 2(x_2)까지 적분한 값이 된다. 그러나 이는 지형 변화 구역을 고려하지 않은 투과율이므로 지형변화에 의한 첫 투과율은 $O(\mu^2)$ 에서 나타난다.

다음 차수인 $O(\mu)$ 을 고려하면 투과율은 식 (30)과 (32b)로부터 0으로 주어지나 식 (34)를 이용한 반사율은 식 (36)이 된다.

$$R_1 = -\frac{E_0}{\sqrt{P_1 I_1}} \int_{x_1}^{x_2} G^*(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d(\ln \sqrt{PI})}{dx} e^{2i \int_{x_1}^{x_2} I d\xi} dx
 \tag{36}$$

식 (36)은 Porter(2003)가 유도한 반사율의 선두 항과 동일하고 이에 대한 물리적 의미는 다음과 같다.

식 (36)의 반사율은 정의구역에 대한 적분이므로 정의구역을 다수의 미소구간으로 나누어 계산한 구간 반사율을 더한 값으로 근사할 수 있다. 정의구역 내의 미소구간 $[x, x+\Delta x]$ 에서의 구간 반사율은 식 (33)으로 정의된 피적분 함수 G^* 의 구간 평균값에 미소거리 Δx 를 곱한 값이다. 그리고 G^* 의 평균값은 군속도 성분에 비례하는 PI 의 제곱근에 log를 취한 값의 평균 변화율과 위상의 곱이며 이 때 위상은 입사점(x_1)에서 평균 변화율의 계산지점(x)까지 파수 x 성분을 적분한 값의 2배가 된다.

군속도 성분의 변화율이 없는 구간 즉 수심의 변화율이 없는 구간에서는 값이 0이 되어 이 구간은 최종 반사율에 기여하지 않는다. 한편 구간 반사율은 G^* 의 절대값

이 0이 아니라도 여기에 위상이 곱해져 결국 구간 위상에 의해 반사율 기여도가 변경된다. 그래서 구간 위상이 상이함에 의해 동일한 입사 파랑조건 아래서도 지형의 형상에 따라 국지 반사율이 증가 또는 감소하며 이들을 합한 것이 최종 반사율이 된다. 그러므로 반사율은 파랑과 지형의 특성에 따라 달라지며 연안사주(ripple) 지형과 같이 주기성을 갖는 지형에서는 어느 특정한 주기의 파랑에서 반사율이 뚜렷이 커지는 Bragg scattering이 발생하게 된다.

Bragg scattering을 본 해석해와 연관하여 해석하기 위해 설명이 간단한 입사 경계점이 $x_1=0$ 에 위치하는 직교 입사의 경우를 상정한다. 입사점에서 x 까지의 평균 파수를 $k_a(\equiv 2\pi/L_a)$ 라 하면 구간 반사파의 위상은 $2k_a(x-x_1)$ 가 되며 두 점간의 거리의 2배인 $2(x-x_1)$ 가 평균 파장 L_a 의 정수(integer) 배가 되면 입사점에 파봉이 위치한다. 주기성을 갖는 지형에서 한 주기의 지형에 의한 반사파의 위상이 파봉이 되면 나머지 지형에서 생성되는 반사파의 위상도 기준점에서 파봉이 되어 결국 반사율이 증폭되는 Bragg scattering이 발생한다.

이제 입사 경계점의 위치에 따른 반사율과 투과율의 영향을 검토하기로 한다. 구역 1과 구역 3의 지형상의 경계점을 $x = 0(x_1 \leq 0)$ 에, 구역 2와 구역 3의 지형 경계점은 $x=x_b(x_2 \geq x_b)$ 로 정한다. 그러면 식 (36)의 오른쪽 적분은 위에 기술한 바와 같이 수심이 일정한 구간에서는 함수 G^* 가 0이므로 식 (37)로 변형할 수 있다.

$$\begin{aligned} \beta_1(x_2) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d(\ln\sqrt{Pl})}{dx} e^{2i \int_{x_1}^{ld\xi} dx} \\ &= \int_0^{x_b} \frac{d(\ln\sqrt{Pl})}{dx} e^{2i \int_{x_1}^{ld\xi} dx} = e^{-2il_1x_1} \int_0^{x_b} \frac{d(\ln\sqrt{Pl})}{dx} e^{2i \int_{x_1}^{ld\xi} dx} \end{aligned} \quad (37)$$

여기서 l_1 은 수심이 일정한 구역 1에서 파수의 x 성분으로 구간 $[x_1, 0]$ 에서의 위상 적분은 해석적으로 계산되고 이는 상수이다. 만일 일 경우에는 수심이 일정함으로 $\beta(x)=0$ 이고 구간 $(0, x_b)$ 에 존재하면 상한은 x 가 된다. 이를 수식으로 나타내면 식 (38)이 된다.

$$\beta_1(x) = \begin{cases} 0, & x_1 \leq x \leq 0 \\ e^{-2il_1x_1} \int_0^x \frac{d(\ln\sqrt{Pl})}{dx} e^{2i \int_0^{ld\xi} dt}, & 0 < x < x_b \\ e^{-2il_1x_1} \int_0^{x_b} \frac{d(\ln\sqrt{Pl})}{dx} e^{2i \int_0^{ld\xi} dt}, & x_b < x < x_2 \end{cases} \quad (38)$$

식 (38)로부터 $x>0$ 이면 입사점으로부터 지형 경계점 0까지의 위상은 상수인 공통인수를 가진다. 한편 반사율과 투과율은 크기이므로 이 공통인수의 위상은 반사율 또는 투과율에 영향을 주지 않는다. 따라서 정의구역의 경계점 위치설정에 따른 반사율과 투과율은 이들의 위치가 해당 구역 내 어떤 점에 위치하든지 동일하므로 위치설정에 따른 반사율과 투과율은 변하지 않는다.

3. 수치계산

본 절에서는 제 2절에서 유도한 해석해를 구체적인 지형에 적용하여 반사율을 계산하고 이를 기존 결과와 비교하였다. 앞에서 기술한 바와 같이 $\mu=1$ 을 사용하고 해에 포함된 적분은 수치적분으로 계산하였다.

3.1 수치계산 기법

본 해석해는 축차적인 적분식인 식 (28)에서 원하는 차수까지의 미지 함수를 계산하고 이를 식 (20)에 대입하여 미지 함수 E, F 를 구한 뒤 이를 다시 해면함수 식 (15)에 대입함으로써 얻어진다. 축차적인 미지 함수는 상호 연결되어 있고 경계조건에서 얻은 초기 값으로부터 순차적으로 계산할 수 있다. 미분방정식의 해인 식 (28)을 식 (33)으로 정의한 kernel G 로 표기하면 식 (39a)가 되고 경계조건과 관련된 식 (27)과 (30)을 묶으면 식 (39b)가 된다.

$$\begin{cases} E_n(x) = \int_{x_1}^x G(t)F_{n-1}(t)dt \\ F_n(x) = F_n(x_1) + \int_{x_1}^x G^*(t)F_{n-1}(t)dt \end{cases}, n=1,2,\dots \quad (39a)$$

$$\begin{cases} E_0(x) = \sqrt{P_1}l_1, F_0(x) = 0 \\ E_{2n+1}(x) = 0, E_{2n}(x) = 0, n = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (39b)$$

식 (39)의 적분을 체계적으로 계산하기 위해 식 (38)에 보인 함수와 같이 $\beta_n(x)$ 를 식 (40)으로 정의한다.

$$\begin{cases} \beta_n(x) = \int_{x_1}^x G(t)\beta_{n-1}^*(t)dx, n = 1, 2, \dots \\ \beta_0(x) = 1 \end{cases} \quad (40)$$

여기서 첨자 *는 공액 복소수(complex conjugate)이다. 식 (39)를 풀어쓰고 식 (40)을 이용하여 정리하면 미지함수들은

식 (41)과 같은 순환식으로 간단히 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} E_{2n}(x) = \sum_{i=1,3,\dots}^{2n-1} F_{2n-i}(x_1)\beta_i(x) + E_0\beta_{2n}(x) \\ E_{2n-1}(x) = F_{2n-i}(x_1) + \sum_{i=1,3,\dots}^{2n-3} F_{2n-2-i}(x_1)\beta_{i+1}^*(x) \\ \quad + E_0\beta_{2n-1}^*(x) \end{cases}, n=1,2,\dots \quad (41)$$

식 (41)을 경계점 x_1 과 x_2 에서 계산한 값을 이용하면 식 (32)로부터 반사율과 투과율을 계산할 수 있다. 그리고 $F_n(x_1)$ 은 식 (27)과 (41)로부터 계산한다.

$$\begin{cases} R_0 = 0 \\ T_0 = \frac{\sqrt{P_1 l_1}}{\sqrt{P_2 l_2}} e^{iS_2/\mu} \end{cases} \quad (42a)$$

$$\begin{cases} R_{2n-1} = -\beta_{2n-1}^*(x_2) - \frac{1}{E_0} \sum_{i=1,3,\dots}^{2n-3} F_{2n-2-i}(x_1)\beta_{i+1}^*(x_2) \\ T_{2n} = \frac{E_0}{\sqrt{P_2 l_2}} \left[\beta_{2n}(x_2) + \frac{1}{E_0} \sum_{i=1,3,\dots}^{2n-1} F_{2n-i}(x_1)\beta_i(x_2) \right] e^{iS_2/\mu} \end{cases}, n=1,2,\dots \quad (42b)$$

식 (42)에 존재하는 반사율과 투과율은 복소수이며 이들의 계산을 위해 식 (40)으로 정의된 함수가 먼저 계산되어야 한다.

해저면이 변하는 구간의 시점 $x=0$ 와 종점 $x=x_b$ 에 $nl+1$ 개의 등간격 격자점을 위치시키고 좌우에 nf 개의 격자점을 각각 설정하여 정의구역에서 격자점의 총수는 $2nf+nl+1$ 개로 구성한다. 그리고 점 $x=0$ 의 격자번호를 $j=0$, $x=x_b$ 를 $j=nl$ 로 각각 나타내면 x_1 과 x_2 의 격자번호는 각각 $-nf$, $nf+nl$ 가 된다. 함수 $\beta_n(x)$ 을 계산하기 위해 사다리꼴 적분식을 사용하면 식 (43)이 된다. 그리고 nf 는 1 이상의 값을 가져야 한다.

$$\int_{x_1}^{x_2} l dx \approx \sum_{j=-nf+1}^n \frac{[l(x_{j-1})+l(x_j)]}{2} \Delta x \equiv \sum_{j=-nf+1}^n \frac{l_{j-1}+l_j}{2} \Delta x$$

$$G(x_n) = \frac{d(\ln\sqrt{Pl})}{dx} e^{-2i \int_{x_1}^{x_n} l dx} \approx \frac{1}{2\Delta x} \ln \frac{(Pl)_n}{(Pl)_{n-1}} \exp \left[-i \sum_{j=-nf+1}^n (l_{j-1}+l_j) \Delta x \right] \equiv G_n$$

$$\beta_n(x_n) = \int_{x_1}^{x_n} G(x) \beta_{n-1}^*(x) dx$$

$$\approx \sum_{j=-nf+1}^n \frac{\Delta x}{2} (G_{j-1} \beta_{n-1,j-1}^* + G_j \beta_{n-1,j}^*), n=1,2,\dots \quad (43)$$

3.2 에너지 보존식

여기서 다루는 파랑변형에는 마찰에 의한 손실이 없기 때문에 파랑의 에너지를 E_w 로 표기하면 에너지 보존식은 $\nabla \cdot E_w \vec{C}_g = 0$ 으로 주어진다. 식 (42)는 축차적으로 반사율과 투과율을 구하기 때문에 처음 몇 차수까지 에너지가 완벽하게는 보존되지 않는다. 에너지 보존식을 경계점에 대한 값으로 나타내면 에너지 보존식 (44)를 얻는다. 이 식은 수치계산의 검증에 사용하였다.

$$1 = |R|^2 + \frac{(Pl)_2}{(Pl)_1} |T|^2 \quad (44)$$

3.3 사면계단 지형에 대한 계산결과

Booij(1983)가 수치실험에 사용한 사면계단 지형은 입사구역의 수심은 0.6 m, 투과지역의 수심은 0.2 m로 고정되었으나 경사구간의 폭은 변수이다. 사용된 파랑의 주기는 2초로 이 경우의 상대수심 조건은 입사구역 $k_1 h_1 = 0.8648$, 투과지역 $k_2 h_2 = 0.4644$ 로 전이구역에 해당된다.

Booij의 실험에 대한 본 해석해의 반사율과 투과율을 계산하여 Fig. 1에 나타내었다. 그림에서 횡축은 사면경사, 종축은 반사율 또는 투과율이고 수심이 일정한 구역에 각

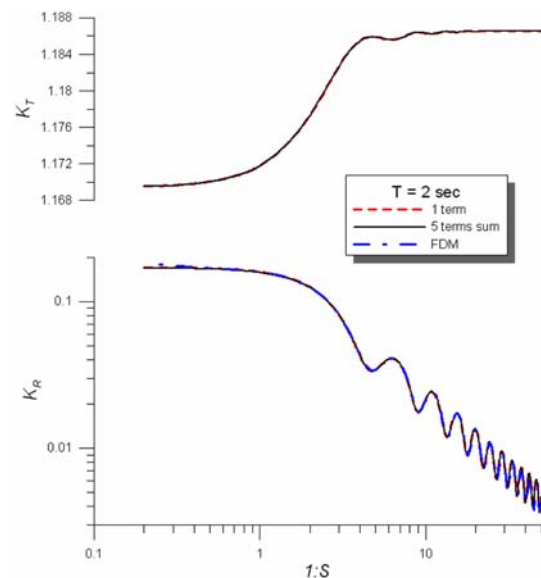


Fig. 1. Computed reflection and transmission coefficients for the Booij's ramp.

각 10개 그리고 사면구역에 60개의 격자점을 사용한 결과이다. 일점 쇄선은 유한차분법에 의한 결과(서, 2007b)이고 점선은 식 (42)에서 첫 하나의 계산 값을 의미하고 실선은 5번까지 계산한 값을 합산한 것이다. 그림의 해상도에서는 경사 1:0.4 이하의 모든 계산 값이 일치한다.

경계점 위치에 따른 실험의 결과는 제 2절의 이론과 같이 경계점의 위치에 관계없이 동일하였다. 식 (42)에서 알 수 있듯이 반사율과 투과율은 동일 차수에서 계산되지 않기 때문에 식 (44)의 에너지보존 검증은 현재와 이전 값으로 계산하였다. 소수점 아래 5자리에서 반올림한 에너지보존 값은 4번째부터 1이 되었고 반사율과 투과율은 3번째 합산부터 동일하여 본 경우에는 빠른 수렴을 보였다.

3.4 연안사주 지형에 대한 계산결과

Fig. 2는 Davies and Heathershaw(1984)의 연안사주 실험에 대한 하나의 결과로 일정한 평균수심에 설치된 사주의 개수는 4개이고 사주의 진폭과 수심의 비는 0.32이다. 그림의 횡축은 사주 파장의 2배와 파랑의 파장의 비($2k_{wave}/k_{ripple}$)로 이 비가 정수이면 상호 간섭에 의한 증폭(resonant reflection)이 발생하고 증폭은 반사율과 투과율이다.

그림은 수심이 일정한 구역에 각각 10개 그리고 사주 한 파장 당 50개의 격자점을 사용한 결과이다. 일점 쇄선은 유한차분법에 의한 결과(서, 2007b)이고 점선은 식

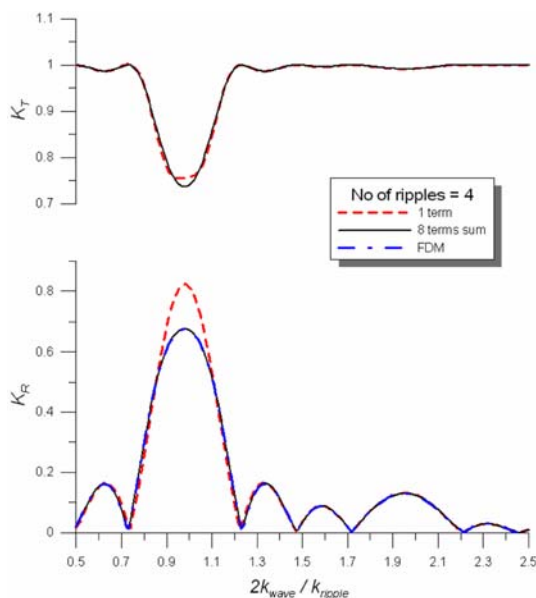


Fig. 2. Computed reflection and transmission coefficients for a ripple patch

(42)에서 첫 하나의 계산 값을 의미하고 실선은 8번까지 계산한 값을 합산한 것이다. 그림의 해상도에서는 유한차분 결과와 본 결과의 모든 계산 값이 일치한다.

여기서 하나의 계산 값은 반사율의 경우에는 입사 파랑이 사주의 우측 끝에서 반사되어 좌측으로 진행하여 입사 경계점을 지난 반사파의 크기의 비를 의미한다. 한편 투과율은 반사를 무시한 투과율에 입사 파랑이 사주를 통과하여 투과 경계점을 지난 파랑의 투과율을 합한 것이다. 가장 큰 증폭비를 보이는 구역을 제외하면 이들도 8번까지 내부 간섭에 의한 변형과 거의 같다.

이 경우 소수점 아래 5째 자리를 기준한 수렴속도는 상대적으로 늦어 에너지보존 값은 18번째부터 1이 되었고 반사율과 투과율은 10번째 합산부터 동일한 값을 보인다. 특히 증폭비가 가장 큰 부근에서 수렴이 늦은 것으로 나타났다.

4. 결 론

수심이 변하는 지역 위를 지나는 파랑의 변형에 대해 WKB 방법으로 구한 반사율(또는 투과율)은 에너지 전파 속도에 비례하는 항의 미분과 위상함수의 곱을 수심변화 구간에 대해 적분한 식으로 구성된다. 따라서 반사율과 투과율은 수심변화 구역의 지형 특성을 반영하게 되고 또한 파랑의 주기가 영향을 주기 때문에 파랑특성에 따라 변한다.

WKB 방법에 의한 환경사 파랑식의 해석해는 축차적으로 표현되어 각 단계의 반사율은 투과지역 지형 경계점에서 단계 수만큼 반사된 반사율을 의미하고 투과율은 이와 동등한 의미를 갖는 투과율이다. 그러므로 각 단계의 값들은 전 단계의 값보다 작게 되어 이들의 총합인 최종 반사율과 투과율은 수렴한다.

일차원 환경사 파랑식에 대한 본 해석해는 임의 지형에 적용할 수 있어 적용성에서는 수치모형과 동등하다. 한편 해는 파수의 적분형태로 주어져 임의 지형에서는 수치적분이 필요하고 본 해의 결과는 기존 결과와 일치한다. 유사한 Porter(2003)의 해와 비교분석, 2차원 문제에 대한 확장 그리고 보다 적용성이 넓은 수정 환경사 파랑식에 대한 해석해를 유도하기 위한 연구가 필요하다.

감사의 글

본 연구는 한국해양연구원의 기본연구사업인 “해양관측 시스템 개발”, “해일침수범람지역 예측 기술 및 재해도

(Hazard Map) 작성기술 개발: 부산, 마산, 여수”과 “해상 파랑 관측 및 조사” 연구에서 수행된 결과의 일부이며 연구비 지원에 감사사를 드립니다.

참고문헌

- 서승남 (2007a). Pade 근사에 의한 포물형 파랑 근사식 - 입사각 80°까지 적용 모형. 한국해양해양공학회지, 19(4), 375-384.
- 서승남 (2007b). 환경사 파랑식들의 재평가. 한국해양해양공학회지, 19(6), 521-532.
- 서승남 (2008). 산란체법에 의한 다중 계단지형에서의 파랑 변형 계산. 한국해양해양공학회논문집, 20(5), 439-451.
- 정태화, 서경덕 (2006). 축대칭 함몰지형 위를 진행하는 파의 변형에 관한 환경사 방정식의 해석 해. 한국해양해양공학회지, 18(4), 308-320.
- Bremmer, H. (1951). The WKB approximation as the first term of a geometric optical series. *Comm. Pure Appl. Math.*, 4, 105-115.
- Bender, C. M. and Orszag, S. (1978). *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York.
- Berkhoff, J. C. W. (1972). Computation of combined refraction-diffraction. *Proc. 13th Coastal Eng. Conf.*, 1, 471-490.
- Booij, N. (1983). A note on the accuracy of the mild-slope equation. *Coastal Eng.*, 7, 191-203.
- Chamberlain, P. G. and Porter, D. (1995). The modified mild-slope equation. *J. Fluid Mech.*, 291, 393-407.
- Copeland, G. J. M. (1985). A practical alternative to the mild-slope wave equation. *Coastal Engng.*, 9, 125-149.
- Davies, A. G. and Heathershaw, A. D. (1984). Surface-wave propagation over sinusoidally varying topography. *J. Fluid Mech.*, 144, 419-443.
- Dean, R. G. and Dalrymple, R. A. (1984). *Water wave mechanics for engineers and scientists*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Holmes, M. K. 1995. *Introduction to Perturbation Methods*. Springer-Verlag, New York.
- Jung, T.-H and Suh, K.-D. (2007). An analytic solution to the mild slope equation for waves propagating over an axisymmetric pit. *Coastal Engng.*, 54, 865-877.
- Kajiura, K. (1961). On the partial reflection of water waves passing over a bottom of variable depth. *Proc. Tsunami Meetings 10th Pacific Science Congress, IUGG Monograph 24*, 206-234.
- Keller, J. B. (1958). Surface waves on water on non-uniform depth. *J. Fluid Mech.*, 4, 607-614.
- Lee, C., Park, W. S., Cho, Y. S. and Suh, K. D. (1998). Hyperbolic mild-slope equations extended to account for rapidly varying topography. *Coastal Engng.*, 34, 243-257.
- Liu, H.-W, Lin, P. and Shankar, N. J. (2004). An analytical solution of the mild-slope equation for waves around a circular island on a paraboloidal shoal. *Coastal Engng.*, 51, 421-437.
- Mei, C. C. (1989). *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*. World Scientific, Singapore.
- Meyer, R. E. (1979). Surface-wave reflection by underwater ridges. *J. Phys. Ocean.*, 9, 150-157.
- Porter, D. (2003). The mild-slope equations. *J. Fluid Mech.*, 494, 51-63.

Received August 18, 2008

Accepted September 29, 2008