

산란체법에 의한 다중 계단지형에서의 파랑변형 계산 Computation of Wave Transformation over a Multi-Step Topography by a Scatterer Method

서 승 남*
Seung-Nam Seo*

요 지 : 단일 계단지형에 대한 반사파와 투과파의 해를 이용하여 다중 계단지형에서의 파랑변형을 계산할 수 있는 새로운 산란체법의 모형을 구성하였다. 산란체법의 근사해를 보다 정밀한 Kirby and Dalrymple(1983)이 제시한 EFEM의 해와 비교검증하였다. 진행파만의 근사에서는 산란체법과 EFEM의 해는 동일하다. 계산된 반사율과 투과율에 대한 위상의 경우 억류파를 포함한 산란체법의 해는 진행파만의 근사해보다 훨씬 우수하다. 억류파의 영향이 감소할수록 산란체법의 해는 EFEM의 해로 접근한다.

핵심용어 : 파랑변형, 다중 계단지형, 고유함수 전개법, 산란체법, Galerkin방법

Abstract : Based on reflected and transmitted waves by a single step bottom, a new model of scatterer method is constructed which can be used to calculate wave transformation over a multi-step topography. The approximate results are tested by comparison with the more accurate results obtained from EFEM presented by Kirby and Dalrymple(1983). In the case of plane-wave approximation, solutions of the scatterer method and the EFEM are the same. Results obtained by the scatterer method with non-propagating modes are much better, in terms of phase for the calculated reflection and transmission coefficients, than those by plane-wave approximation. As the effect of non-propagating modes decreases, solutions of the scatterer method become closer to those of the EFEM.

Keywords : wave transformation, multi-step topography, eigenfunction expansion method, scatterer method, Galerkin method

1. 서 론

단일 계단지형은 입사 파랑을 반사파와 투과파로 분리하는 특성을 갖기 때문에 이를 산란체(scatterer)로 규정할 수 있다. 한편 다중 계단지형은 여러 개의 단일 계단지형으로 분리할 수 있고 만일 선형 파랑을 대상으로 하는 경우 이는 다중 계단지형에서 발생하는 파랑변형은 단일 계단지형의 파랑변형과 연관시킬 수 있음을 암시하므로 본 논문에서는 이 관계를 규명하고자 한다.

두 개 이상의 산란체가 존재하면 산란체간의 상호작용인 간섭이 존재하고 이로 인해 파랑변형은 복잡하게 된다. 산란체의 개수가 증가함에 따라 복잡성도 증가하게 되나 이에 내재된 물리 현상은 두 개의 산란체에 대해

Mei(1989)가 기술한 바와 같기 때문에 비교적 단순하다. 따라서 본 논문에서는 단일 산란체에 포함된 물리 현상을 바탕으로 다중 산란체에 의한 파랑변형을 해석함으로써 파랑 변형과정의 이해 폭을 넓히고자 한다.

단일 계단지형의 파랑변형은 1960년대에 집중적으로 이루어졌다. 계단지형에서는 수심이 구역별로 일정하므로 고유함수 전개법(EFEM, eigenfunction expansion method)을 사용할 수 있고 경계면에서 정합조건을 이용하여 연립방정식을 구성한다. 연립방정식에 포함된 고유함수의 개수를 증가시키면 엄밀해로 수렴하기 때문에 많은 연구자의 관심을 끌었다. Lamb(1932)은 천해역에서 진행파만을 이용하여 단일 계단지형에 직교 입사파랑에 의한 반사율과 투과율을 계산하였고 Takano(1960)는 억류파(evanescent

*한국해양연구원 연안개발·에너지연구부 책임연구원(Coastal Engineering & Ocean Energy Research Department, KORDI, Ansan PO. Box 29, Seoul 425-600, Korea. snseo@kordi.re.kr)

wave)를 포함한 해로 확장하였다. 한편 Newman(1965)은 경계면에서 미지유속을 도입하고 정합조건을 이용한 적분식을 구성하여 직교 입사파랑에 대한 해를 구하였다. Miles(1967)는 Newman의 적분식에 variational 방법으로 변형한 적분식을 구성하여 사각입사 파랑에 대한 해를 유도하였다. Evans(1975)는 Miles의 방법을 흐름이 존재하는 심해역에 적용하여 사각 입사파랑에 대한 해로 확장하였다.

두 개의 단일 계단지형으로 구성된 Trench에 대한 직교 입사파랑의 해를 Lee and Ayer(1981)는 transform 방법으로 구하였다. Miles(1982)는 등각사상을 이용하여 정의구역을 직사각형으로 변형하여 직교입사에 대한 해와 variational 방법으로 사각 입사에 대한 해를 구하였다. Kirby and Dalrymple(1983, 이후 KD로 표기)은 Takano의 방법을 이용하여 사각 입사파랑의 해를 구하였으며 Galerkin 방법의 하나인 이 방법을 본 논문에서 사용하고 자 한다. 그리고 Kirby *et al.*(1987)은 KD의 방법을 이용하여 흐름이 존재하는 Trench에서의 사각 입사파랑의 해로 확장하였다.

임의 형태의 지형을 다중 계단지형으로 모사하고 이 지형에 대한 해를 구하기 위한 방법이 시도되었다. Galerkin 방법에 의한 EFEM을 다중 계단지형에 적용하면 상당한 크기의 연립방정식을 풀어야하기 때문에 Devillard *et al.*(1988)는 2×2 의 단위 연립방정식으로 구성되는 Miles(1967)의 산란행렬을 변형한 변환행렬을 도입하여 축차적으로 파랑변형의 해를 구하는 기법을 제시하였다. O'Hare and Davies(1992)는 위의 변환행렬을 이용하여 연안사주 지형에 대한 직교 입사파랑의 수치해를 구하였다. 연안사주 하나를 200개의 단일 계단으로 구성하여 연안사주가 2개, 4개 그리고 10개인 각각의 경우에 대해 직교 입사파랑의 수치해를 구하였고 수치실험의 결과와 수치해는 대체적으로 일치한다. 한편 Bender and Dean(2003)은 역류파를 포함한 KD 방법을 이용하여 다중 계단지형에 대한 직교 입사파랑의 수치해를 제시하였다.

국내 연구로는 서·김(1992)은 Kirby *et al.*(1987)의 방법을 이용하여 흐름이 존재하는 Trench에서의 생성되는 역류파의 영향을 분석하였다. 조·이(1998)은 연안사주와 원호형 지형을 다중 계단지형으로 모사하여 KD 방법에 의한 파랑변형의 수치해를 구하였고 4개로 구성된 연안사주에 대한 수치해는 O'Hare and Davies(1992)의 결과와 유사하다. 한편 이·조(2002)는 진행파와 역류파의 총 에너지에 대한 식을 제시하였다.

제 2절에서는 다중 계단지형에서 사각 입사파랑에 의한 파랑변형의 해를 구하는 KD방법을 재정리하여 수식의 완결성을 피하였다. 일정 수심에서 사각 입사파랑에 대한 경계치 문제의 모든 고유함수를 제시하고 이 가운데 경계조건을 만족하는 고유함수로 속도포텐셜을 전개하였다. 해석의 편의상 각 구역으로 나누어 해석하는 경우에 필연적인 정합조건의 엄밀한 의미를 재정리하였다. 정의된 속도포텐셜은 무한급수이나 수치계산을 위해 이를 절단함으로써 발생하는 오차를 method of weighted residual의 측면에서 해석하였다.

제 3절에서는 단일 계단에 대한 Galerkin 방법에 의한 진행파만의 근사해를 나타내었다. 이 근사해는 해석적으로 구할 수 있어 해에 포함된 물리적 의미를 해석하기에 용이하고 이는 본 논문 산란체법의 근간이 된다. 제 4절에서는 단일 산란체의 해를 이용하여 다중 산란체의 간섭에 의한 파랑변형을 나타내었다. 본 산란체법은 산란체에 의한 간섭에 대한 물리 현상에 근거하여 다중 산란체에 의한 반사율과 투과율을 단일 산란체의 반사파와 투과파의 식으로 나타낸 것이다. 그러므로 산란체법은 Devillard *et al.*(1988)의 변환행렬과 유사하나 물리 현상에 기초한 것으로 모든 산란체에 적용할 수 있고 의미가 쉽고 분명하다.

제 5절에서는 다중 계단지형에 대한 수치실험을 통해 진행파만을 대상을 한 산란체법의 해, 역류파를 포함한 산란체법의 해를 보다 정밀한 KD의 EFEM 해와 비교하였다. 진행파만을 대상을 한 산란체법의 해는 수식상 진행파만을 이용한 EFEM 해와 일치하고 이를 수치실험에서 확인하였다. 수치실험은 산란체의 개수가 2개(Trench), 3개 그리고 20개에 대해 수행하였으며 그 결과를 분석하였다.

2. 계단형 지형의 파랑변형 해

계단형 지형은 수심이 일정한 구역으로 구분할 수 있고 임의의 한 구역에서 파랑의 선형 운동은 시간의존 함수를 분리한 속도 포텐셜을 이용하여 Laplace 미분식의 해로 나타낼 수 있다. 좌표계의 원점은 정지해면 상에 위치하며 축은 상향을 양의 방향으로 정한 오른손 좌표계를 사용한다. 구역 i 는 경계선 x_{i-1} 과 x_i 사이에 위치하며 수심은 h 로 표기한다.

$$\nabla^2 \tilde{\phi} + \tilde{\phi}_{zz} = 0, -h < z < 0 \quad (1)$$

$$\tilde{\phi}_z - \frac{\omega^2}{g} \tilde{\phi} = 0, \quad z = 0 \quad (2a)$$

$$\tilde{\phi}_z = 0, \quad z = -h \quad (2b)$$

$$\tilde{\phi}_x = 0 \text{ 계단의 직벽에서} \quad (2c)$$

여기서 각주파수는 $\omega = 2\pi/T_w$ 로 정의된 주기 T_w 의 함수이며 g 는 중력가속도이다. 식 (2)는 경계조건으로 해면과 해저면에서 각각 정의된다. 그리고 속도포텐셜의 크기가 한정되어야 하기 때문에 방사조건이 부가된다.

사각입사의 경우 y 방향으로 지형의 변화가 없다면 y 방향 함수는 진행파 형태인 e^{iby} ($b>0$)가 되므로 지배방정식은 식 (3)으로 변형된다.

$$0 = \tilde{\phi}_{xx} + \tilde{\phi}_{yy} + \tilde{\phi}_{zz} = \phi_{xx} - b^2\phi + \phi_{zz} \quad (3)$$

여기서 b 는 입사구역($i=1$)의 진행파 파수 k_1 에 $\sin\theta_1$ 를 곱한 값이며 θ_1 는 입사각이다. 식 (3)과 관련된 경계조건은 식 (2)에 $\tilde{\phi} = \phi(x,z)e^{iby}$ 를 대입하면 얻어지며 동일한 형태를 유지한다.

2.1 계단형 지형에서 선형파랑의 해

식 (3)을 지배방정식으로 갖는 수심이 일정한 각 구역에서는 변수분리법을 이용하여 해를 구할 수 있고 변수분리법으로 분리한 z 관련 미분방정식은 Sturm-Liouville 식임을 보일 수 있다. 그러므로 관련된 고유치(eigenvalue)는 Sturm-Liouville 이론으로부터 실수이며 파생된 고유함수들의 정의구역 ($0, -h$)에 대한 내적(inner product)은 직교성을 갖는다. 또한 이 고유함수들은 일차독립인 무한차원 공간(space)을 형성할 뿐만 아니라 온전한 집합(complete set)을 이룬다. 따라서 어떠한 임의함수도 이들의 일차결합인 다항식으로 나타낼 수 있으며 만일 이 고

유함수들의 일차 결합으로 전개하고자 하는 함수에 불연속점이 존재하면 이 일의적인 다항식은 이점 좌우극한의 평균값으로 수렴한다(Harberman, 2004).

수심 h 인 한 구역에서 사각으로 입사하는 파랑의 운동을 변수분리법으로 구한 속도포텐셜의 일반해를 Table 1에 정리하였다. 본 논문에서는 고유치가 0보다 큰 경우에는 진행파, 0보다 작은 경우에는 역류파로 각각 표현한다. 여기서 주목해야할 점은 고유치 $\lambda=0$ 의 경우에도 해가 존재하나(Dean and Dalrymple, 1984) 뒤에 보인 바와 같이 이에 해면 경계조건을 적용하면 trivial solution이 되어 배제된다. 사각입사의 경우에는 진행파 가운데 인 경우 특이한 파형(mode)이 존재한다. 또한 $0 < k < b$ 인 경우에는 진행파의 x 방향 파수가 허수가 됨으로 이는 역류파의 형태로 전환된다. 따라서 진행파의 파형은 k 와 b 의 상대적 크기에 따라 진동, 선형 또는 역류 형태를 보인다. 한편 직교입사의 경우 ($b=0$)에는 진행파는 진동형태 파형만이 존재하고 $\lambda=0$ 의 경우에는 x 방향의 고유함수는 1과 x 로 바뀐다.

미분방정식 (3)과 상응하는 경계조건식 (2)는 선형이므로 해는 Table 1에 보인 고유함수들의 일차결합으로 나타낼 수 있다. 해저 경계조건에 해를 대입하면 Table 1의 z 축 고유함수 가운데 첫 항들만 남게 된다. 그리고 해면 경계조건을 대입하면 고유치 $\lambda=0$ 는 trivial solution이 되어 배제되므로 해는 KD가 제시한 것과 동일한 식 (4)가 된다.

$$\phi = \begin{cases} (c_1 e^{iax} + c_2 e^{-iax}) \cosh k(z+h) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (d_1 e^{a_n x} + d_2 e^{-a_n x}) \cos k_n(z+h), k \neq b > 0 \\ (c_1 + c_2 x) \cosh k(z+h) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (d_1 e^{a_n x} + d_2 e^{-a_n x}) \cos k_n(z+h), k = b \end{cases} \quad (4)$$

Table 1. Solution set of the velocity potential with an incident angle for a region in a multi-step topography.

eigenvalue	$\lambda = k^2 > 0$		
x-component wave number	$a = \sqrt{k^2 - b^2} > 0$	$k = b > 0$	$a = \sqrt{k^2 - b^2}, 0 < k < b$
eigen functions	x e^{iax}, e^{-iax}	$1, x$	e^{iax}, e^{-iax}
	z $\cosh kz, \sinh kz$	$\cosh kz, \sinh kz$	$\cosh kz, \sinh kz$
dispersion relationship	$\omega^2 = gk \tanh kh$	$\omega^2 = gk \tanh kh$	$\omega^2 = gk \tanh kh$
eigenvalue	$\lambda = -k_n^2 < 0$		
x-component wave number	$a_n = \sqrt{k_n^2 - b^2} > 0$		b
eigen functions	x $e^{b_n x}, e^{-b_n x}$		e^{bx}, e^{-bx}
	z $\cos k_n z, \sin k_n z$		$1, z$
dispersion relationship	$\omega^2 = -gk \tan k_n h$		-

여기서 파수 k 와 $k_n(n=1,2,\dots)$ 는 Table 1의 파랑 분산식으로부터 계산한다. 식 (4) 우변에 존재하는 미지 상수들은 다음 절의 정합조건을 이용하여 계산한다.

2.2 정합조건

해석의 편의상 정의구역을 구분하여 구역별로 해를 분리하여 각각 구하였기 때문에 경계지점에서는 각 구역에서 구한 유속(kinematics)과 압력(dynamics)이 동일해야하는 정합조건을 부여한다. Evans(1975)가 보인 바와 같이 이 조건을 일반화하기 위해 각 구역의 상이한 운동으로 미지의 경계면 $x = \xi(z, t)$ 이 형성된다고 간주한다. 미지 경계면의 도입으로 해면 조건식 (2a)에서와 같이 두 개의 조건 즉 운동학 정합조건(kinematic matching condition)과 동역학 정합조건(dynamic matching condition)을 부여하여 경계 좌우의 파랑운동을 매끄럽게 접합한다.

경계면 위에 존재하는 수입자는 경계면과 같은 운동을 해야함으로 운동학 정합조건은 식 (5a)로 나타낼 수 있다. 여기서 x_i 는 지형 경계면의 좌표이다.

$$0 = \frac{D(x-x_i-\xi)}{Dt} = -\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial z}, \text{ at } x = x_i + \xi \tag{5a}$$

식 (5a)를 $x = x_i$ 에서 Taylor 전개한 후 경계면의 운동이 작다고 가정하여 선형화하면 식 (5b)가 된다.

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \text{ at } x = x_i \tag{5b}$$

식 (5b)를 경계면 좌우의 속도포텐셜을 이용하여 나타내면 식 (6)이 된다. 여기서 첨자는 구역의 번호를 의미한다.

$$\frac{\partial \phi_{i-1}}{\partial x} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \tag{6}$$

선형화된 운동학 정합조건은 수심이 상대적으로 낮은 지점에서부터 해면까지 모든 수층에서 경계면 좌우의 유속이 같아야 함을 의미한다. 식 (6)에 수심이 낮은 구역의 수심을 곱해 적분하면 volume flux 조건으로 바뀐다. 그리고 수심이 깊은 구역에서는 적벽에 부여된 불투과 조건을 이용하여 이 구역의 수심으로 확장할 수 있다.

경계면에서 압력(P)이 연속이어야 하는 동역학적 조건은 Bernoulli 식을 이용하여 부여할 수 있다.

$$\frac{P}{\rho} = -\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} - \frac{1}{2} |\nabla \hat{\phi}|^2 - gz \tag{7a}$$

여기서 $\hat{\phi} = \hat{\phi} e^{-i\omega t}$ 이다. 위에서와 같이 $x=x_i$ 에서 Taylor 전개한 후 선형화하면 식 (7b)를 얻는다.

$$P = i\omega\phi - gz, \text{ at } x = x_i \tag{7b}$$

식 (7b)를 경계면 좌우의 속도포텐셜에 적용하면 식 (8)이 된다.

$$\phi_{i-1} = \phi_i \tag{8}$$

선형화된 동역학 정합조건도 수심이 상대적으로 낮은 지점에서부터 해면까지 모든 수층에서 경계면 좌우의 속도포텐셜이 같아야 함을 의미한다. 수심 방향의 속도포텐셜의 변화가 거의 없는 천해역에서는 식 (8)은 각 구역의 해면이 연속인 조건과 동일하게 된다.

2.3 미지상수 계산

구역 i 에서의 속도포텐셜은 식 (4)에 수심 h_i , 파수에 첨자 i 를 붙여 사용하면 식 (9)로 나타낼 수 있다. 여기서 진행파와 관련된 미지상수는 p , 역류파의 미지상수는 s 로 각각 표기하였고 역류파에는 수치계산의 안정을 위해 상수를 곱해 변형하였다.

$$\phi_i = \begin{cases} (p_i^+ + p_i^- e^{-2ia_{i,0}x}) e^{ia_{i,0}x} \cosh k_{i,0}(z+h_i) \\ + \sum_{j=1}^{\infty} [s_{i,j}^+ e^{-a_{i,j}(x-x_{i-1})} + s_{i,j}^- e^{-a_{i,j}(x-x_i)}] \cos k_{i,j}(z+h_i), k_{i,0} \neq 0 \\ (p_i^+ + p_i^- x) \cosh k_{i,0}(z+h_i) \\ + \sum_{j=1}^{\infty} [s_{i,j}^+ e^{-a_{i,j}(x-x_{i-1})} + s_{i,j}^- e^{-a_{i,j}(x-x_i)}] \cos k_{i,j}(z+h_i), k_{i,0} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

식 (9)의 역류파의 개수는 무한개이나 수치계산에서는 이를 N 개로 국한한다. 우변 둘째 식은 파형이 선형인 특수한 경우로 파랑이 좌측에서 입사할 때는 내부구역과 투과구역에 존재할 수 있으나 투과구역에서는 방사조건에 의해 $p_{N_r}^- = 0$ 가 된다.

본 논문에서의 입사 파랑은 좌측 또는 우측 한 방향으로만 진행하는 것으로 가정한다. 만일 입사 파랑이 좌측에서 우측으로 진행하면 좌측 첫 구간에서는 $p_1^+ = 1, s_{1,j}^+ = 0$ 로 각각 정한다. 이 경우 마지막 구역 N_r 에서는 우에서 좌로 진행하는 파랑이 존재하지 않기 때문에 $p_{N_r}^- = 0, s_{N_r,j}^- = 0$ 이 된다. 이들을 제외한 모든 구역에서의 $p_i^+, s_{i,j}^+$ 는 미지상수로 제 2.2절의 정합조건을 이용하여 계산한다. 따라서 N_r 개 구역으로 구성된 계단형 지형에는 $(N_r-1)(2+2N)$ 개의 미지상수가 존재한다.

2.3.1 경계 $x=x_i$ 에 대한 연립방정식

정합조건은 미지상수에 대한 연립방정식을 생성하게 된다. 식 (6)과 (8)의 정합조건은 동일한 수층에 대해서 성립한다. 경계선 상에 $N+1$ 개의 수심에서 정합조건이 만족하도록 연립방정식을 구성하면 Collocation 방법이 된다. 한편 각각의 고유함수를 곱해 정합조건의 구역에 대해 적분하는 Galerkin 방법을 사용할 수도 있다. 본 논문에서는 Galerkin 방법을 사용하며 연립방정식의 행렬 안정성을 위해 고유함수의 직교성을 최대한으로 이용하고자 한다. 이 방법 외에도 서론에 기술한 바와 같이 여러 형태의 연립방정식을 만들 수 있고 이들은 각기 다른 수렴 속도를 갖게 된다(Kirby *et al.*, 1987).

본 논문의 방법은 KD를 따른 것으로 운동학 정합조건에는 수심이 깊은 구역의 고유함수를 곱하고 경계 좌우의 수심이 낮은 값을 적분 하한으로 정하여 해면까지 적분한다. 그리고 경계의 직벽에 부여된 불투과 경계조건을 이용하면 수심이 깊은 구역에서의 적분 하한은 깊은 수심으로 확장할 수 있다. 정합조건을 보다 분명하게 나타내기 위해 두 개의 경우로 나누어 각각의 연립방정식을 나타내었다. 각 경우의 첫째와 둘째 식은 운동학 정합조건을 셋째와 넷째 식은 동력학 경계조건을 각각 적용한 것이다.

$h_i < h_{i+1}$ 의 경우

$$\begin{aligned} & \int_{-h_i}^0 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \cosh k_{i+1,0}(z+h_{i+1}) dz \\ &= \int_{-h_i}^0 \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial x} \cosh k_{i+1,0}(z+h_{i+1}) dz \\ &= \int_{-h_{i+1}}^0 \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial x} \cosh k_{i+1,0}(z+h_{i+1}) dz \\ & \int_{-h_i}^0 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \cosh k_{i+1,j}(z+h_{i+1}) dz \\ &= \int_{-h_{i+1}}^0 \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial x} \cosh k_{i+1,j}(z+h_{i+1}) dz, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & \int_{-h_i}^0 \phi_i \cosh k_{i,0}(z+h_i) dz = \int_{-h_i}^0 \phi_{i+1} \cosh k_{i,0}(z+h_i) dz \end{aligned} \tag{10}$$

$$\int_{-h_i}^0 \phi_i \cosh k_{i,j}(z+h_i) dz = \int_{-h_i}^0 \phi_{i+1} \cosh k_{i,j}(z+h_i) dz, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$h_i \geq h_{i+1}$ 의 경우

$$\int_{-h_{i+1}}^0 \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial x} \cosh k_{i,0}(z+h_i) dz = \int_{-h_i}^0 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \cosh k_{i,0}(z+h_i) dz$$

$$\begin{aligned} & \int_{-h_{i+1}}^0 \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial x} \cosh k_{i,j}(z+h_i) dz = \int_{-h_i}^0 \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \cosh k_{i,j}(z+h_i) dz \\ & j = 1, 2, \dots, n \\ & \int_{-h_{i+1}}^0 \phi_{i+1} \cosh k_{i+1,0}(z+h_{i+1}) dz = \int_{-h_{i+1}}^0 \phi_{i+1} \cosh k_{i+1,0}(z+h_{i+1}) dz \\ & \int_{-h_{i+1}}^0 \phi_i \cosh k_{i+1,j}(z+h_{i+1}) dz = \int_{-h_{i+1}}^0 \phi_{i+1} \cosh k_{i+1,j}(z+h_{i+1}) dz \\ & j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{11}$$

식 (10) 또는 식 (11)으로부터 $2N+2$ 개의 연립방정식이 만들어지고 위의 식을 모든 경계면에 적용한다. 그리고 여기에 식 (9) 또는 이를 x 에 대해 미분한 식을 대입하면 미지 상수의 개수만큼의 연립방정식이 구성된다. 이 연립방정식을 풀면 미지 상수가 정해져 해를 얻게 된다.

2.3.2 투과율과 반사율

계산된 미지 상수로부터 물리적 의미가 있는 투과율 K_T 과 반사율 K_R 을 구할 수 있다. 투과율과 반사율은 진행파인 투과파고와 반사파고를 입사파고로 각각 나눈 값으로 정의되고 식 (9)로 표현된 속도포텐셜을 해면함수 η 로 나타내면 식 (12)가 된다.

$$\eta_i(x) = \frac{i\omega}{g} \phi_i(x, 0) \tag{12}$$

식 (12)에 절대값을 취하면 진폭을 얻는다.

좌측에서 입사하는 파랑의 경우 반사율과 투과율은 식 (13a), 우측에서 입사하는 경우는 식 (13b)으로 각각 나타내진다.

$$K_R = \begin{cases} |p_{11}^-| \\ 1 \end{cases}, K_T = \begin{cases} |p_{KR}^+| \frac{\cosh k_{Nr,0} h_{Nr}}{\cosh k_{1,0} h_1} \\ 0 \end{cases}, \begin{cases} Im(a_{Nr,0}) = 0 \\ Re(a_{Nr,0}) = 0 \end{cases} \tag{13a}$$

$$K_R = \begin{cases} |p_{KR}^+| \\ 1 \end{cases}, K_T = \begin{cases} |p_{11}^-| \frac{\cosh k_{1,0} h_1}{\cosh k_{Nr,0} h_{Nr}} \\ 0 \end{cases}, \begin{cases} Im(a_{1,0}) = 0 \\ Re(a_{1,0}) = 0 \end{cases} \tag{13b}$$

위의 반사율과 투과율은 일반적인 정의를 따른 것이나 본 논문에서는 식 (4)와 같이 정의된 속도포텐셜을 사용하였기 때문에 해면함수를 사용한 Mei(1989)의 관련 식과는 차이가 있게 된다. 그러므로 속도포텐셜이 정의된 바에 따라 반사율과 투과율을 표현하는 식에 차이가 있으나 이들은 물리 변수(physical variable)이므로 동일한 파랑과

지형조건에서는 속도포텐셜의 정의에 관계없이 항상 같아야 한다.

계산된 미지상수를 검증하기 위한 한 방법으로 에너지 보존식($\nabla \cdot E\vec{C}_g = 0$)을 이용한다. 이는 반사율과 투과율의 관계식이 된다.

$$1 = K_R^2 + K_T^2 \frac{k_{1,0}^2 a_{Nr,0} n_{Nr}}{k_{Nr,0} a_{1,0} n_1} \quad (14)$$

여기서 $n_i = Cg_i/C_i$ 로 정의되며 Cg 는 군속도, C 는 파속이다.

3. 단일 계단지형에서 진행파만을 이용한 근사

진행파의 크기는 역류파의 크기보다 일반적으로 크고 진행파만의 근사는 해석적인 방법으로 해를 구할 수 있어 관련된 물리 현상을 이해하기 쉽다. 경계가 $x=x_i$ 에 위치하는 하나의 계단지형에서 진행파만을 이용한 근사식으로 수심의 형상별 좌우측에서 입사하는 파랑에 대한 해를 나타내고자 한다. 식 (9)로 표현된 속도포텐셜에서 역류파를 무시하고 진행파만을 고려한 구역 x 에서의 속도포텐셜은 식 (15)로 가정한다.

$$\phi_i = p_i^+ \cosh k_{i,0}(z+h_i) e^{ia_{i,0}x} + p_i^- \cosh k_{i,0}(z+h_i) e^{-ia_{i,0}x}, \quad x \leq x_i \quad (15)$$

수심이 $h_i < h_{i+1}$ 이고 좌측에서 입사하는 경우 미지상수 p_i^+ 는 R_i^+ 로, p_{i+1}^+ 는 T_i^+ 로 각각 변경하고 $p_{i+1}^- = 0$, 입사파와 연관된 $p_i^- = 1$ 로 각각 설정한다. 입사파 위상의 기준점은 $x=0$ 으로 정해 기준점에서 입사파형은 파봉이 된다. 그리고 이후의 입사파 기준점은 $x=0$ 을 사용하고 정합조건 식 (10)에서부터 연립방정식 (16)을 얻는다.

$$\begin{cases} e^{-2ia_{i,0}x_i} R_i^+ + \frac{a_{i+1,0} I_{i+1,i+1}}{a_{i,0} I_{i,i+1}} e^{i(a_{i+1,0}-a_{i,0})x_i} T_i^+ = 1 \\ e^{-2ia_{i,0}x_i} R_i^+ + \frac{I_{i,i+1}}{I_{i,i}} e^{i(a_{i+1,0}-a_{i,0})x_i} T_i^+ = 1 \end{cases} \quad (16)$$

여기서 $I_{i,j} \equiv \int_{-h_i}^0 \cosh k_{i,0}(z+h_i) \cosh k_{j,0}(z+h_j) dz$ 이고 실수이다. 식 (16)를 풀면 해는 식 (17)이 된다.

$$R_i^+ = e^{2ia_{i,0}x_i} \frac{1 - \frac{a_{i+1,0} I_{i+1,i+1}}{a_{i,0} I_{i,i}} \left(\frac{I_{i,i}}{I_{i,i+1}}\right)^2}{1 + \frac{a_{i+1,0} I_{i+1,i+1}}{a_{i,0} I_{i,i}} \left(\frac{I_{i,i}}{I_{i,i+1}}\right)^2},$$

$$T_i^+ = \frac{2e^{i(a_{i,0}-a_{i+1,0})x_i} \frac{I_{i,i}}{I_{i,i+1}}}{1 + \frac{a_{i+1,0} I_{i+1,i+1}}{a_{i,0} I_{i,i}} \left(\frac{I_{i,i}}{I_{i,i+1}}\right)^2} \quad (17)$$

식 (17)의 반사파 해를 식 (15)에 대입하면 임의점 x 에서 지수함수로 표현된 겹보기 위상은 기준점에서 경계 x_i 까지의 거리의 2배에서 기준점에서 x 까지 거리를 뺀 값에 파수 $a_{i,0}$ 를 곱한 값 $a_{i,0}(2x_i-x)$ 으로 물리적 의미와 일치한다. 이를 겹보기 위상이라 함은 x 방향의 파수 $a_{i,0}$ 또는 $a_{i+1,0}$ 가 Table 1에 나타난 바와 같이 허수가 되는 경우가 있어 실제 위상은 겹보기 위상에 이를 제외한 부분의 위상이 포함되기 때문이다.

단일 계단에서 입사구역의 수심이 상대적으로 낮은 본 경우에는 겹보기 위상은 실제 위상과 다를 수 있다. 즉 $b(k_{i,0} \sin \theta_i) = k_{i+1,0}$ 인 경우에는 전반사가 발생하게 되고 수심 h_{i+1} 이 전반사 수심보다 깊게 되면 $x \geq x_i$ 에는 역류파형이 존재한다. 한편 투과파의 해는 구역 $x_i \leq x$ 에서만 성립하고 이에 대한 임의점 x 에서 겹보기 위상은 $a_{i,0}x_i + a_{i+1,0}(x-x_i)$ 이 된다. 이 경우 투과파의 실제 위상은 조정된 겹보기 위상으로 나타나기도 한다.

식 (16)에서 적분 $I_{i,i} = (CCg) \cosh^2 k_{i,0} h_i / g$ 이고 x 방향의 파수 $a_{i,0} = k_{i,0} \cos \theta_i$ 가 실수인 경우 이들의 곱은 식 (18)이 된다.

$$a_{i,0} I_{i,i} = k_{i,0} \cos \theta_i \frac{C_i C g_i}{g} \cosh^2 k_{i,0} h_i = \frac{\omega}{g} \cosh^2 k_{i,0} h_i C g_i \cos \theta_i \quad (18)$$

식 (18)은 구역 i 군속도의 x 성분에 비례하며 식 (17)의 분모에 존재하는 이들의 비는 구역 $i+1$ 의 군속도 x 성분과 구역 i 의 군속도 x 성분의 비임을 알 수 있다. 만일 식 (9)의 속도포텐셜을 $\cosh k_{i,0} h_i$, $\cos k_{i,j} h_i$ 로 해당 항을 나누어 다시 정의하면 식 (18)에 항은 존재하지 않아 의미가 분명해진다. 한편 군속도는 에너지의 전파속도이므로 이 비율은 각 구역의 에너지가 1인 경우에 에너지 이송량의 비에 대한 함수이다. 식 (17)의 반사파와 투과파 해의 분모는 에너지가 1인 경우에 에너지 이송량의 비에 조정계수 $(I_{i,i}/I_{i,i+1})^2$ 를 곱해 1을 더한 동일한 형태를 갖는다.

수심이 $h_i < h_{i+1}$ 이고 우측에서 입사하는 경우 식 (15)의 미지상수 p_i^- 는 T_i^- 로, p_{i+1}^- 는 R_i^- 로 각각 바꾸고 $p_i^+ = 0$, 입사파와 관련된 $p_{i+1}^+ = 1$ 로 각각 설정한다. 정합조건 식 (10)에서부터 연립방정식 (19)를 얻고 이를 풀 해는 식 (20)이 된다.

$$\begin{cases} e^{-i(a_{i,0}-a_{i+1,0})x_i} \frac{a_{i,0}}{a_{i+1,0}} \frac{I_{i,i+1}}{I_{i+1,i+1}} T_i^- + e^{2ia_{i+1,0}x_i} R_i^- = 1 \\ e^{-i(a_{i,0}-a_{i+1,0})x_i} \frac{I_{i,i}}{I_{i,i+1}} T_i^+ - e^{2ia_{i+1,0}x_i} R_i^- = 1 \end{cases} \quad (19)$$

$$R_i^- = e^{-2ia_{i+1,0}x_i} \frac{1 - \frac{a_{i,0}}{a_{i+1,0}} \frac{I_{i,i}}{I_{i+1,i+1}} \left(\frac{I_{i,i+1}}{I_{i,i}}\right)^2}{1 + \frac{a_{i,0}}{a_{i+1,0}} \frac{I_{i,i}}{I_{i+1,i+1}} \left(\frac{I_{i,i+1}}{I_{i,i}}\right)^2},$$

$$T_i^- = \frac{2e^{i(a_{i,0}-a_{i+1,0})x_i} \frac{I_{i,i+1}}{I_{i,i}}}{1 + \frac{a_{i,0}}{a_{i+1,0}} \frac{I_{i,i}}{I_{i+1,i+1}} \left(\frac{I_{i,i+1}}{I_{i,i}}\right)^2} \quad (20)$$

동일한 계단 지형에서 수심이 상대적으로 깊은 우측으로부터 입사하는 파랑의 경우 각 구역의 파수 x 성분은 항상 실수이다. 그러므로 이 경우에는 결보기 위상과 실제 위상은 동일하다. 구역 $x_i \leq x$ 에서만 성립하는 반사파의 기준점에 대한 위상은 $a_{i+1,0}(x-2x_i)$ 이 되고 구역 $x \leq x_i$ 에서만 성립하는 투과파의 기준점에 대한 위상은 $-a_{i,0}(x-x_i) - a_{i+1,0}x_i$ 로 주어진다.

그리고 식 (20)으로부터 동일한 b 를 갖도록 좌우 입사파의 입사각을 조절한 경우에는 식 (21)이 성립하며 모든 직교입사는 이 경우에 속한다.

$$R_i^- = -R_i^+ e^{-2i(a_{i+1,0}+a_{i,0})x_i}, T_i^- = T_i^+ \frac{a_{i+1,0}I_{i+1,i+1}}{a_{i,0}I_{i,i}}; \text{ for same } b \quad (21)$$

우측 입사파에 의한 반사파(R_i^-)는 좌측에서 입사하는 파랑의 반사파(R_i^+)와 크기(절대값)는 같으나 기준점에 대한 입사파의 위상 때문에 특수한 경우를 제외하면 이들의 위상은 다르다. 한편 우측 입사파에 의한 투과파는(T_i^-) 좌측 입사파에 의한 투과파(T_i^+)와 위상은 같고 두 파랑의 크기에는 차이가 있으나 이들의 비율은 균속도 x 성분 비율의 함수이다. 따라서 식 (21)은 물리적으로 매우 중요한 의미를 갖는다.

수심이 위의 경우와 반대인 $h_i \geq h_{i+1}$ 경우에 대한 해만을 제시하면 좌측 입사파에 의한 해는 식 (22a)이고 우측 입사파에 의한 해는 식 (22b)가 된다.

$$R_i^+ = e^{2ia_{i,0}x_i} \frac{1 - \frac{a_{i+1,0}I_{i+1,i+1}}{a_{i,0}} \frac{I_{i,i}}{I_{i+1,i+1}} \left(\frac{I_{i+1,i}}{I_{i+1,i+1}}\right)^2}{1 + \frac{a_{i+1,0}I_{i+1,i+1}}{a_{i,0}} \frac{I_{i,i}}{I_{i+1,i+1}} \left(\frac{I_{i+1,i}}{I_{i+1,i+1}}\right)^2},$$

$$T_i^+ = \frac{2e^{i(a_{i,0}-a_{i+1,0})x_i} \frac{I_{i+1,i}}{I_{i+1,i+1}}}{1 + \frac{a_{i+1,0}I_{i+1,i+1}}{a_{i,0}} \frac{I_{i,i}}{I_{i+1,i+1}} \left(\frac{I_{i+1,i}}{I_{i+1,i+1}}\right)^2} \quad (22a)$$

$$R_i^- = e^{-2ia_{i+1,0}x_i} \frac{1 - \frac{a_{i,0}}{a_{i+1,0}} \frac{I_{i,i}}{I_{i+1,i+1}} \left(\frac{I_{i+1,i+1}}{I_{i+1,i}}\right)^2}{1 + \frac{a_{i,0}}{a_{i+1,0}} \frac{I_{i,i}}{I_{i+1,i+1}} \left(\frac{I_{i+1,i+1}}{I_{i+1,i}}\right)^2},$$

$$T_i^- = \frac{2e^{i(a_{i,0}-a_{i+1,0})x_i} \frac{I_{i+1,i+1}}{I_{i+1,i}}}{1 + \frac{a_{i,0}}{a_{i+1,0}} \frac{I_{i,i}}{I_{i+1,i+1}} \left(\frac{I_{i+1,i+1}}{I_{i+1,i}}\right)^2} \quad (22b)$$

식 (22)와 이와 관련된 해인 식 (17)과 식 (20)을 비교하면 분모와 분자의 조정계수에만 차이가 있다. 본 절에서 제시한 단일 계단지형의 파랑변형 해인 식 (17), (20) 그리고 (22)는 단일 산란체에서 발생할 수 있는 기본적인 해가 된다. 다음 절에서는 이 기본해를 이용하여 다중 산란체에 의한 파랑변형을 구하기로 한다.

4. 다중 계단지형에서 진행파만을 이용한 근사

본 절에서는 제 3절에서 구한 하나의 계단지형에 의한 파랑변형 해를 이용하여 2개 이상의 계단지형으로 구성된 다중 계단지형에 의한 파랑변형을 기술하기로 한다. 여기서 입사파랑은 좌측 또는 우측 한 방향에서만 입사하는 것으로 가정한다. 다중 지형에 의한 파랑변형은 Mei (1989)가 기술한 바와 같이 내부 구역에서 복합적인 반사와 투과과정이 발생하여 입사파에 대한 최종 반사파와 투과파가 형성된다. 관련 파랑변형 과정을 서술적으로 기술한 기준 문헌과 달리 본 논문에서는 다중 계단지형에서 발생하는 반사파와 투과파를 단일 계단지형의 해에 대한 식으로 나타내고자 한다.

다중 계단지형 가운데 가장 단순한 Trench에 대한 해를 구하고 보다 복잡한 지형에 대한 해로 확장하고자 한다. Fig. 1에 Trench 지형에 좌측에서 입사하는 파랑에 의한 반사파와 투과파를 나타내었다. 여기서 $x_i(i=1,2)$ 는 지형 경계면이 위치하는 좌표이고 3개의 구역이 존재한다. 선형 문제를 다루기 때문에 입사파의 크기가 1인 경우 구한 해에 실제 크기(A_i)를 곱해 얻을 수 있다. 따라서 입사파의 크기는 1로 설정하고 앞에서 기술한 바와 같이 입사파의 기준점은 $x=0$ 에 위치한다.

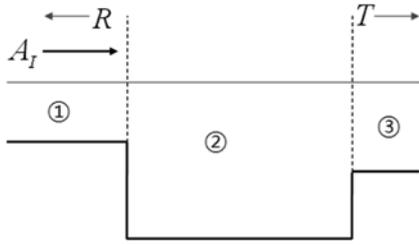


Fig. 1. Propagation of water waves over a trench.

Fig. 1의 Trench 지형에 대한 파랑변형을 Fig. 2와 같은 3개로 구성된 단일 계단지형에 의한 파랑변형으로 분리하여 다루고 분리된 각각의 해를 더해 최종 해를 구성하고자 한다. 첫 그림은 입사파에 의한 경계 x_1 에 의한 반사파(R_1^+)와 투과파(T_1^+)를 나타낸다. 하단의 둘째와 셋째 그림은 내부 구역에서의 반사파와 투과파를 나타내었고 위 첨자는 x 축에 대한 파랑의 진행방향, 아래첨자는 해당 경계의 좌표번호를 각각 의미한다.

좌측에서 입사하는 파랑이 경계 x_1 를 만나면 파랑이 변형되어 반사파(R_1^+)와 투과파(T_1^+)를 생성한다. 반사파와 투과파는 앞 절에서 보인 바와 같이 입사파의 특성과 지형의 특성의 함수가 된다. 모든 변형과정에는 역류파도 함께 생성되어 반사파와 투과파에 영향을 미치나 본 절에서는 편의상 역류파를 무시하고 다음 절에서 이 가운데 일부를 포함하여 비교하고자 한다.

경계 x_1 에서 생성된 반사파는 x 축의 음의 방향으로 변형되지 않고 진행함으로 총 반사파(R)의 일부가 되며 경계 x_1 을 지난 투과파는 경계 x_2 를 만나서 또 다른 변형을 겪는다. Fig. 2의 하단 우측의 그림이 이를 나타내며 이 때 입사파는 상단 그림의 T_1^+ 이다. 단위 크기의 입사파로부터 생성되는 투과파(T_2^+)는 x 축의 양의 방향으로 변형되지 않고 계속 진행함으로 총 투과파(T)의 일부($T_1^+T_2^+$)가 된다.

한편 경계 x_2 에서 생성된 반사파는 x 축의 음의 방향으

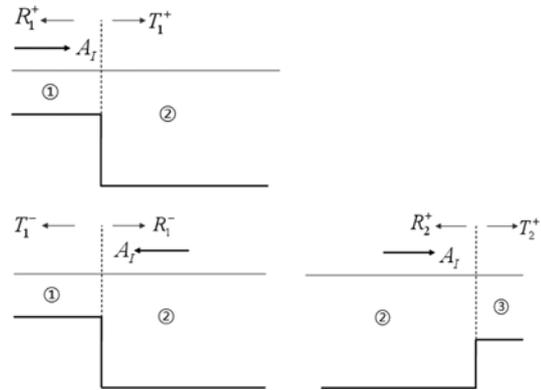


Fig. 2. Subdivision of wave transformation over a trench into those over different single steps.

로 진행하여 경계 x_1 을 만나 변형된다. 이 때 입사파는 $T_1^+R_2^+$ 이고 이로부터 생성된 투과파($T_1^+R_2^+T_1^+$)는 총 반사파의 일부가 되고 반사파($T_1^+R_2^+R_1^-$)은 경계 x_2 쪽으로 진행하여 입사파로 작용하게 된다. 이러한 과정은 내부 구역에서 형성된 입사파의 크기가 0이 될 때까지 반복된다. 이 반복적인 파랑변형 과정을 Table 2에 순서적으로 정리하였다.

경계 x_1 에서는 반사파와 투과파의 합이 총 반사파가 되며 이는 Table 2의 반사파를 합산하면 식 (23a)가 된다.

$$R = R_1^+ + T_1^+R_2^+T_1^+ + T_1^+R_2^+R_1^-R_2^+T_1^+ + \dots$$

$$= R_1^+ + T_1^+R_1^+T_1^+[1 + R_2^+R_1^- + (R_2^+R_1^-)^2 + \dots] = R_1^+ + \frac{T_1^+R_2^+T_1^+}{1 - R_2^+R_1^-} \quad (23a)$$

한편 경계 x_2 를 투과한 모든 파랑의 합이 총 투과파가 되며 식 (23b)로 표현된다.

$$T = T_1^+T_2^+ + T_1^+R_2^+R_1^-T_2^+ + T_1^+(R_2^+R_1^-)^2T_2^+ + \dots$$

$$= T_1^+T_2^+[1 + R_2^+R_1^- + (R_2^+R_1^-)^2 + \dots] = \frac{T_1^+T_2^+}{1 - R_2^+R_1^-} \quad (23b)$$

Table 2. Wave transformation process over a trench for an incident wave from left

No	incident waves		Dir	reflected waves	transmitted waves	bnd
	p_1^+					
1	1		→	R_1^+		x_1
2	T_1^+		→		$T_1^+T_2^+$	x_2
3	$T_1^+R_2^+$		←	$T_1^+R_2^+T_1^-$		x_1
4	$T_1^+R_2^+R_1^-$		→		$T_1^+R_2^+R_1^-T_2^+$	x_2
5	$T_1^+R_2^+R_1^-R_2^+$		←	$T_1^+R_2^+R_1^-R_2^+T_1^-$		x_1
6	$T_1^+R_2^+R_1^-R_2^+R_1^-$		→		$T_1^+R_2^+R_1^-R_2^+R_1^-T_2^+$	x_2
⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮

식 (23)에서 알 수 있듯이 총 반사파와 총 투과파는 기하급수(geometric series)이고 그 비율 ($R_2^+ R_1^+$) 은 일반적으로 1보다 작아 수렴함으로 간단한 식으로 표현된다. 그리고 식 (23)에 제 3절에서 구한 단일 계단지형의 해를 대입하면 Trench 지형에 의한 파랑변형을 구성하는 총 반사파와 총 투과파를 구할 수 있다. 위의 식 (23)은 제 2절의 진행파만을 이용하여 구한 4개의 연립방정식의 해와 동일함을 밝힌다.

위의 방법을 확장하기로 한다. 우선 4개의 구역으로 구성된 다중 계단지형의 파랑변형은 우측 마지막 구역과 나머지 구역으로 나누어 생각한다. 나머지 구역은 3개의 구역으로 구성되며 이를 하나의 산란체(scatterer)로 간주하여 좌측에서 입사하는 파랑에 의한 반사파(R_s^+)와 투과파(T_s^+)는 식 (23)과 동일한 식 (24a)이 된다. 한편 이 산란체에 우측으로부터 입사하는 파랑에 의한 반사파(R_s^-)와 투과파(T_s^-)는 위와 같은 계산법을 사용하여 구하면 식 (24b)가 된다.

$$R_s^+ = R_1^+ + \frac{T_1^+ R_2^+ T_1^-}{1 - R_2^+ R_2^-}, T_s^+ = \frac{T_1^+ T_2^+}{1 - R_2^+ R_2^-} \quad (24a)$$

$$R_s^- = R_2^- + \frac{T_2^- R_1^- T_2^+}{1 - R_1^- R_1^+}, T_s^- = \frac{T_2^- T_1^-}{1 - R_1^- R_1^+} \quad (24b)$$

이제 4개 구역의 다중 계단지형의 파랑변형을 위의 산란체와 마지막 구역의 단일 계단으로 구성된 두개의 산란체에 대한 식으로 표현하고자 한다. 그러면 이 경우 좌측 입사파에 의한 파랑 변형은 식 (25)로 표현할 수 있다.

$$R = R_s^+ + \frac{T_s^+ R_3^+ T_s^-}{1 - R_3^+ R_3^-}, T = \frac{T_s^+ T_3^+}{1 - R_3^+ R_3^-} \quad (25)$$

만일 5개 이상의 구역으로 구성된 다중 계단지형에 의한 파랑변형은 위의 경우와 같이 두 개의 산란체로 간주하여 이전에서 구한 값을 이용하여 같은 방법으로 계산할 수 있다. 본 논문에서는 앞에 기술한 방법 즉 다중 계단지형을 두 개의 산란체로 간주하여 단계적으로 파랑변형을 계산하는 방법을 산란체법(Scatterer method; SM)이라고 표현하고자 한다.

다중 계단지형이 Nr 개 구역으로 구성되면 여기에는 $Nr-1$ 개의 단일 계단(또는 산란체)이 존재한다. 식 (25)를 이 경우로 확장한 산란체법에 의한 해는 식 (26)이 된다.

$$R = R_{s,Nr-1}^+ + \frac{T_{s,Nr-1}^+ R_{Nr}^+ T_{s,Nr-1}^-}{1 - R_{Nr}^+ R_{s,Nr-1}^-}, T = \frac{T_{s,Nr-1}^+ T_{Nr}^+}{1 - R_{Nr}^+ R_{s,Nr-1}^-} \quad (26a)$$

$$\begin{cases} R_{s,i}^+ = R_{s,i-1}^+ + \frac{T_{s,i-1}^+ R_i^+ T_{s,i-1}^-}{1 - R_i^+ R_{s,i-1}^-}, T_{s,i}^+ = \frac{T_{s,i-1}^+ T_i^+}{1 - R_i^+ R_{s,i-1}^-} \\ R_{s,i}^- = R_i^- + \frac{T_i^- R_{s,i-1}^- T_i^+}{1 - R_{s,i-1}^- R_i^+}, T_{s,i}^- = \frac{T_i^- T_{s,i-1}^-}{1 - R_i^- R_{s,i-1}^+} \end{cases}, \quad i \geq 2 \quad (26b)$$

여기서 $R_{s,1}^+ = R_1^+, T_{s,1}^+ = T_1^+$ 이다. 산란체법을 이용하여 파랑변형을 계산하기 위해서는 모든 단일 계단의 좌우측에서 입사하는 단위 크기의 입사파에 대한 반사파와 투과파를 제 3절의 식을 이용하여 먼저 계산해야 한다. 이 계산된 값과 식 (26)을 이용하여 축차적으로 계산하면 좌측 입사파에 대한 파랑변형(진행파에 의한 근사)을 계산할 수 있다.

5. 수치실험

본 절에서는 본 논문에서 제시한 제 4절의 다중 산란체법에 의한 파랑변형의 해를 계산하여 이를 제 2절에 기술한 보다 엄밀한 EFEM의 해와 비교하였다. 기존 결과와 비교를 위해 수치실험의 대상은 산란체가 두 개 이하인 경우에는 KD의 수치실험을 대상으로 정하였다. 3개 이상의 산란체에 대해서는 2개의 실험을 수행하였고 그 가운데 하나는 Bender and Dean(2003)의 실험이다.

진행파만을 이용하여 제 2절과 같이 연립방정식으로 풀 근사해(Plane-Wave solution)는 진행파만을 이용하여 제 4절의 산란체법으로 구한 해와 동일하며 이는 두 해의 수식이 같기 때문이다. 따라서 아래의 모든 실험결과에서 진행파만을 이용하여 산란체법으로 구한 해는 Plane-Wave 해와 같기 때문에 그림에서 생략하였다.

본 실험결과에서 알 수 있듯이 진행파만에 의한 산란체법의 해는 EFEM의 해와 경우에 따라 차이가 발생한다. 그래서 진행파에 역류파를 포함한 산란체법(SM)의 해도 나타내었다. 역류파 개수는 10개를 기준 개수로 사용하였고 이는 반사율과 투과율을 도시하기에 충분히 정밀한 것으로 나타났기 때문이다. 그리고 모든 수치실험의 결과는 관련된 기존 결과와 동일하며 에너지 보존식 (14)을 만족한다.

Fig. 3은 KD의 Fig. 4에 대한 실험 결과로 $h_3/h_1 = 1$, $h_2/h_1 = 3$ 이고 폭(W)과 입사구역 수심(h_1)의 비가 10인 대형 Trench에서 입사각 45°의 파랑이 좌측으로부터 입사하는 경우에 대해 계산한 반사율(K_r)과 투과율(K_t)이다. 위 실험은 입사구역의 수심이 상대적으로 낮기 때문에

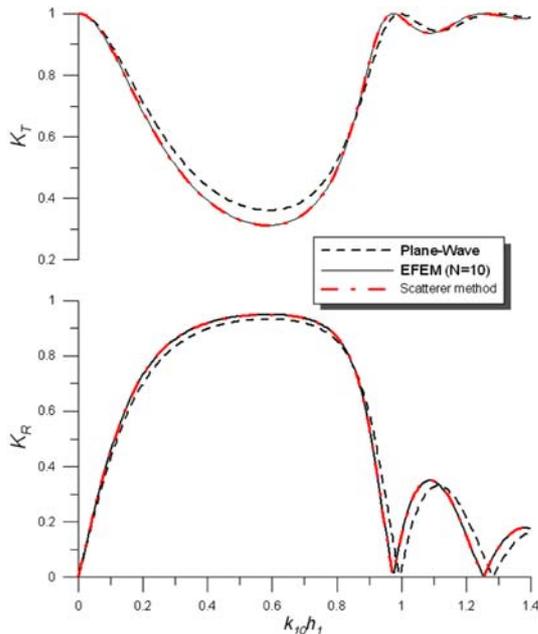


Fig. 3. Reflection and transmission coefficients for a symmetric trench; $h_3/h_1=1$, $h_2/h_1=3$, $W/h_1=10$ and incidence angle 45° .

제 3절에 기술한 바와 같이 $k_{1,0}h_1$ 가 0.792보다 작으면 구역 2의 진행파 파수는 허수가 되어 역류파형을 보인다. 그리고 수심 비 h_2/h_1 가 상대적으로 작아 EFEM의 결과(실선)와 진행파만의 근사해(점선)에는 작지만 차이를 보인다. 이 차이를 줄이기 위해 제 4절의 산란체법을 사용하였고 각 산란체에는 EFEM과 같이 10개의 역류파를 포함한 결과(일점 쇄선)는 EFEM 결과와 그림의 해상도에서는 차이를 보이지 않는다.

산란체에 역류파를 포함하는 경우는 연립방정식을 풀어야 하기 때문에 EFEM에 의한 해를 구하는 정도의 노력이 든다. 이 경우 산란체법의 연립방정식은 EFEM에 비해 작지만 우측에서 입사하는 파랑에 대한 반사파고와 투과파고가 필요하므로 계산상의 이득은 크지 않다고 할 수 있다. 그러나 산란체법은 산란체간의 상호 간섭에 기초한 것이기 때문에 파랑변형에 내포된 물리 현상을 분명하게 이해할 수 있는 장점이 있다.

Fig. 4은 KD의 Fig. 2에 대한 실험 결과로 $h_3/h_1=1$, $h_2/h_1=7.625$ 이고 $W/h_1=5.28$ 인 대형 Trench에서 입사각 0° 의 파랑이 좌측으로부터 입사하는 경우에 대해 계산한 반사율과 투과율이다.

이 실험은 Fig. 3의 실험에 비해 폭이 좁고 Trench 수심이 깊어 역류파의 영향이 상대적으로 강하다. 그래서 진

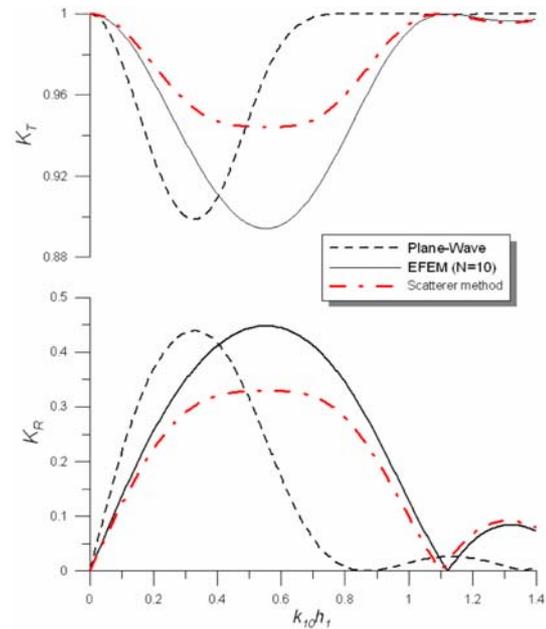


Fig. 4. Reflection and transmission coefficients for a symmetric trench; $h_3/h_1=1$, $h_2/h_1=7.625$, $W/h_1=5.28$ and incidence angle 0° .

행파만의 근사해는 EFEM의 해와는 위상에서 큰 차이를 보이고 역류파를 포함한 산란체법은 위상은 거의 같으나 크기에서 상당한 차이를 보인다. 이 결과로부터 또는 제 4절로부터 산란체법에 포함된 가정으로부터 산란체간의 상호 간섭을 완벽하게 재현하지 못함을 알 수 있다.

Fig. 5는 Fig. 4의 차이를 줄이기 위해 Trench 수심을 조금 낮춘 $h_2/h_1=4$ 를 제외한 모든 조건이 Fig. 4와 같은 경우에 대한 결과이다. Fig. 5를 Fig. 4와 비교할 때 지형조건이 바뀌었기 때문에 반사율과 투과율이 서로 다르게 되나 EFEM의 해와 산란체법의 해 사이의 상대적인 차이는 현저하게 감소함을 발견할 수 있다. 즉 Fig. 5에서는 Trench 폭에 대한 수심이 비가 커져 역류파의 영향이 상대적으로 감소하기 때문이다. 위 두 Trench에 대한 실험으로부터 역류파를 포함한 산란체법 역시 근사해이기 때문에 산란체의 상호 간섭을 완벽하게 재현하지는 못하나 Trench 폭에 대한 수심이 비가 대략 2배 정도로 큰 경우 EFEM의 해와 일치한다.

Fig. 6는 3개의 산란체에 대한 실험에 대한 결과이다. 본 실험의 지형조건은 Fig. 5의 조건과 유사하나 우측에 산란체 하나가 더해진 경우이다; $h_3/h_1=1$, $h_2/h_1=4$, $h_3/h_1=2$, $x_1/h_1=0$, $x_2/h_1=5.28$, $x_3/h_1=9$. 파랑의 입사조건은 좌측 그림에서는 직교입사이고 우측은 45° 로 입사한 결과

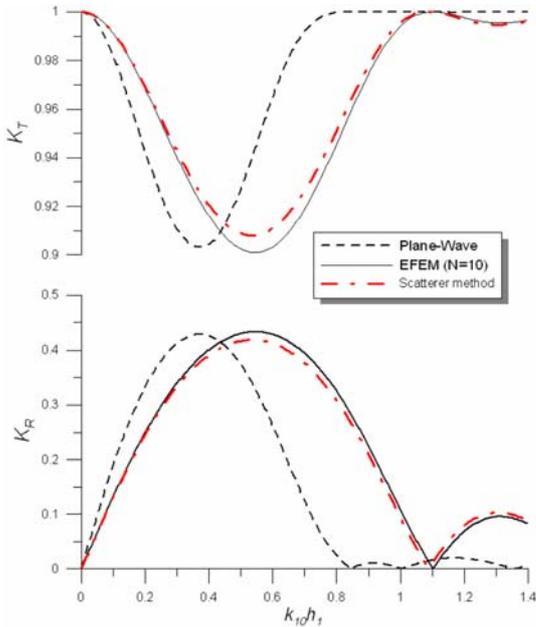


Fig. 5. Reflection and transmission coefficients for a symmetric trench; $h_3/h_1=1$, $h_2/h_1=4$, $W/h_1=5.28$ and incidence angle 0° .

이다.

본 실험에서 역류파를 포함한 산란체법은 처음 3구역으로 구성된 하나의 산란체와 마지막 산란체 두 개에 대해 제 4절의 방법을 사용하였다. 이는 Fig. 5의 결과에서

알 수 있듯이 단일 계단의 산란체에 대한 해를 조합하면 상호 간섭을 완벽하게 재현할 수 없고 본 수치모형은 좌우측에서 입사하는 EFEM의 해를 구할 수 있도록 작성되었기 때문에 2개의 산란체로 구성된 처음 산란체에 대해 좌우측에서 입사하는 파랑(b 가 동일하도록 입사각이 조정된)의 해를 이용하였다.

Fig. 6에 도시된 EFEM의 결과와 SM의 결과는 동일함을 보인다. 그러나 Fig. 5의 지형에 단일 계단이 추가된 Fig. 6의 좌측 그림은 Fig. 5의 결과와 확연히 다르다. 또한 동일한 지형에서 입사 파랑이 다른 Fig. 6의 좌우측 결과는 현저하게 다르다. 그러므로 반사율과 투과율은 지형 조건과 파랑조건에 따라 변함을 알 수 있다.

마지막 실험은 Bender and Dean(2003)의 Fig. 6에 대한 것이다. 이 실험의 목적은 대칭 사면 Trench($h_3/h_1=1$, $h_2/h_1=2$, $W/h_1=15$)의 각 단일 계산을 10개의 동일한 높이 (Δh)를 갖는 다중 계단으로 모사하여 다중 계단의 동일한 폭(ΔW)을 조정함으로써 주어진 경사의 사면 Trench와 같은 효과를 나타내고자 하였다. 이를 부연 설명하면 다중 계단의 폭을 줄이면 평균 사면의 경사가 줄어들어 주어진 평균 경사를 나타내는 다중 계단의 일련의 해를 얻고 이들이 계단 Trench의 해에 수렴하는 정도를 보이고자 한 것이다. 본 실험은 이 가운데 $\Delta h/h_1=0.1$, $\Delta W/h_1=0.1$ 에 대한 것으로 다중 계단에 의한 평균 경사는 1:1이다.

본 다중 계단지형에는 총 20개의 경계면이 존재하고 원

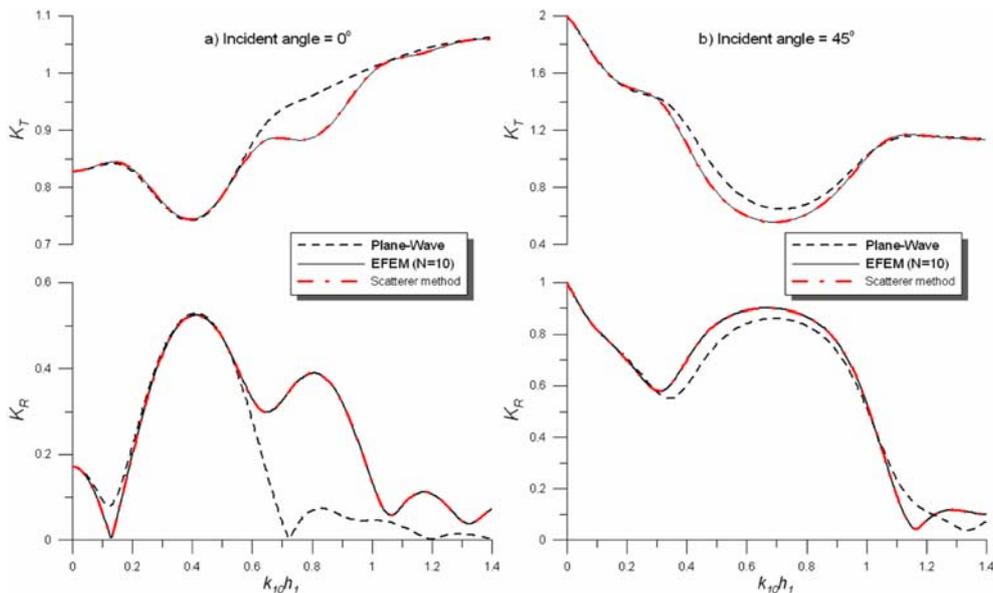


Fig. 6. Reflection and transmission coefficients for three scatterers; $h_3/h_1=1$, $h_2/h_1=4$, $h_3/h_1=2$, $x_1/h_1=0$, $x_2/h_1=5.28$, $x_3/h_1=9$.

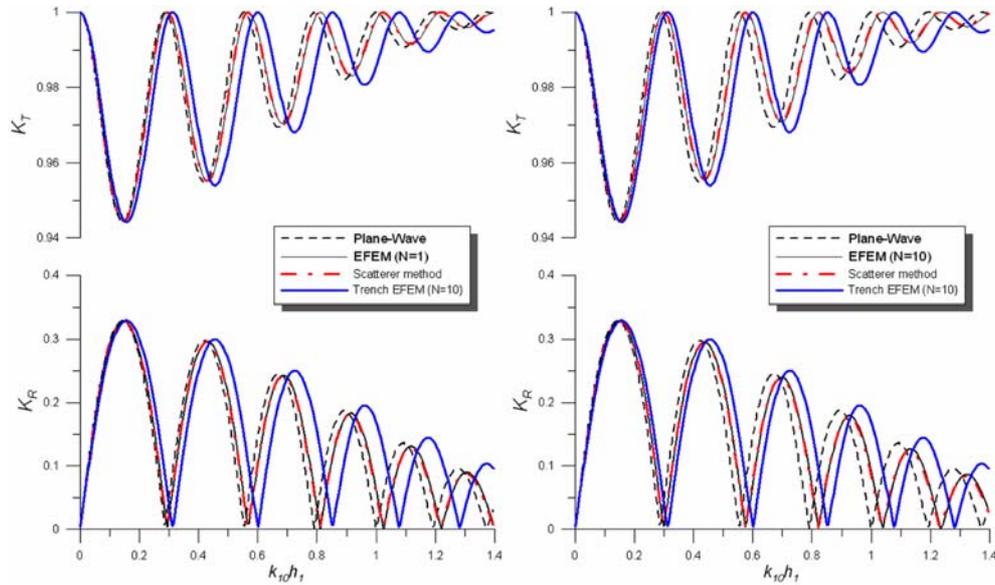


Fig. 7. Reflection and transmission coefficients for a stepped trench and a multi-step topography which mimics a sloping trench with slope of 1:1.

쪽 사면과 오른쪽 사면을 모사한 경계의 위치와 각 구역의 수심은 식 (27)로 각각 정하였다.

$$\frac{x_i}{h_1} = \begin{cases} 0.1(i-1)-0.45, & i = 1, \dots, 10 \\ 0.1(i-11)+14.55, & i = 11, \dots, 20 \end{cases}$$

$$\frac{h_i}{h_1} = \begin{cases} 0.1(i-1)+1, & i = 1, \dots, 11 \\ -0.1(i-11)+2, & i = 12, \dots, 21 \end{cases} \quad (27)$$

Fig. 7에서 푸른색 실선은 좌측에서 직교 입사하는 파랑이 직벽 Trench에 의한 반사율과 투과율로 좌우 그림에서 이들은 동일하다. 그리고 그 밖의 선들은 경사 1:1인 사면 Trench를 다중 계단지형으로 모사하여 구한 결과이다. 그림의 점선은 Plane-wave 근사해로 좌우 그림에서 동일한 값을 가지며 다중 계단지형에 대한 EFEM 해와 산란체법의 해는 그림의 해상도에서는 일치한다. 그러나 EFEM 해인 검은 색 실선은 본 다중 계단지형의 억류파 개수에 대한 영향을 나타내기 위하여 좌측 그림은 1개의 억류파를 우측은 10개의 억류파를 이용한 결과이다. $k_{10}h_1$ 의 값이 증가함에 따라 두 결과가 약간의 차이를 보이는 앞에 기술된 바와 같이 인접 계단의 폭과 수심과의 비율에 영향을 받기 때문이다. 즉 인접 구역의 수심차이가 비교적 작고 계단 폭도 작은 본 경우에는 억류파의 영향을 고려하기 위해 개수를 늘려야 한다.

위 실험과 기존 결과를 종합하여 다중 계단지형에서 억

류파의 영향을 분석하고자 한다. 본 수치실험에서 억류파의 영향은 인접 계단의 수심차와 폭의 비에 연관된 것을 보였다. 변형행렬법을 사용한 Devillard *et al.*(1988)은 억류파의 영향이 무시될 조건으로 계단 폭이 수심에 비해 충분히 커야함을 보였다. 한편 O'Hare and Davies(1992)는 수심차가 작은 경우 폭이 좁아도 성립한다고 기술하였고 KD의 방법을 연안사주에 적용한 수치실험 결과를 분석한 조이(1998)는 O'Hare and Davies의 분석이 옳바르다고 평가하였다.

수심차가 작은 경우의 극한은 인접 구역의 수심이 같은 경우로 이 때 억류파는 존재하지 않게 된다. 따라서 수심이 같은 지역을 두 개의 구역으로 나눈 경우에는 폭이 좁더라도 경계부근에 억류파가 존재하지 않음을 유추할 수 있다. 만일 수심차가 작은 경우에는 식 (9)의 억류파 미지상수는 작은 값을 가질 것으로 예상되며 이는 연립방정식의 해이므로 지형과 파랑의 특성을 반영하게 된다. 그러나 폭이 함께 작은 이 경우에는 식 (9)로부터 억류파의 영향을 무시할 수 없게 된다. 따라서 억류파의 영향은 수심차와 계단 폭의 함수로 나타나게 되며 Devillard *et al.*은 항상 성립하는 일반적인 조건을 나타낸 것이다.

6. 결 론

본 논문에서는 입사 파랑을 반사파와 투과파로 분리하

는 모든 물체 또는 지형을 산란체로 규정하고 단일 산란체에 대한 반사파와 투과파를 이용하여 다중 계단지형의 반사파와 투과파에 대한 식을 제시하였다. 본 논문의 산란체법은 산란체 간에 존재하는 상호간섭 현상에 기초하여 그 의미가 분명하고 적용성이 넓다. 그러나 보다 정밀하게 파랑변형을 계산할 수 있는 Kirby and Dalrymple (1983)의 EFEM에서 구성되는 연립방정식의 일부분을 풀기 때문에 근사해에 속한다.

기존 수치실험을 포함하여 다수의 실험에 대한 산란체법의 해를 나타내었고 EFEM의 결과와 비교하였다. 진행파만을 고려한 근사해는 산란체법과 EFEM의 해가 동일하며 이는 수식과 수치실험에서도 입증되었다. 또한 검증 대상이 된 EFEM에 대한 유도과 내재된 가정을 재정리하여 수식 전개에 엄밀성을 피하였다.

입의 지형을 다중 계단지형으로 모사하고 이에 대한 파랑변형의 계산을 위해 Devillard *et al.*(1988)이 제시한 변환행렬법은 또 다른 좋은 해석방법으로 평가할 수 있다. 따라서 본 산란체법과 변환행렬법과의 관계에 대한 연구가 필요하다.

감사의 글

본 연구는 한국해양연구원의 기본연구사업인 “연안 국지 해일 정밀예보 지원체계 현업화 기술”, “해양관측시스템 개발”과 “해상파랑 관측 및 조사” 연구에서 수행된 결과의 일부이며 연구비 지원에 감사를 드립니다.

참고문헌

서승남, 김상익 (1992). 해저단에 제형 및 흐름에 의한 역류파랑. 한국해양공학학회지, 4(1), 1-9.
 이창훈, 조용식 (2002). 선형과 이론을 사용하여 파랑변형 예측시 소멸과 성분의 중요성 검토: 1. 에너지 식 유도. 한국해양공학학회지, 14(4), 282-285.
 조용식, 이창훈 (1998). 수심이 변하는 지형을 통과하는 파랑의 반사율과 통과율 산정. 대한토목학회논문집, 18(II-

4), 351-358.

- Bender, C.J. and Dean, R.G. (2003). Wave transformation by two-dimensional bathymetric anomalies with sloped transitions. Coastal Eng., 50, 61-84.
 Dean, R.G. and Dalrymple, R.A. (1984). Water wave mechanics for engineers and scientists. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
 Devillard, P., Dunlop, F. and Souillard B. (1988). Localization of gravity waves on a channel with a random bottom. J. Fluid Mech., 186, 521-538.
 Harberman, R. (2004). Applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems, 4th ed. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.
 Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A. (1983). Propagation of obliquely incident water waves over a trench. J. Fluid Mech., 133, 47-63.
 Kirby, J.T., Dalrymple, R.A. and Seo, S.N. (1987). Propagation of obliquely incident water waves over a trench. Part 2. Currents flowing along the trench. J. Fluid Mech., 176, 95-116.
 Lamb, H. (1932). Hydrodynamics. Dover, New York.
 Lee, J.-J. and Ayer, R.M. (1981). Wave propagation over a rectangular trench. J. Fluid Mech., 110, 335-347.
 Mei, C.C. (1989). The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves. World Scientific, Singapore.
 Miles, J.W. (1967). Surface-wave scattering matrix for a shelf. J. Fluid Mech., 28, 755-767.
 Miles, J.W. (1982). On surface-wave diffraction by a trench. J. Fluid Mech., 115, 315-325.
 Newman, J.N. (1965). Propagation of water waves over an infinite step. J. Fluid Mech., 23, 399-415.
 O'Hare, T.J. and Davies, A.G. (1992). A new model for surface-wave propagation over undulating topography. Coastal Eng., 18, 251-266.
 Takano, K. (1960). Effets d'un obstacle parallépipédique sur la propagation de la houle. La Houille Blanche, 15, 247-267.

Received August 6, 2008

Accepted September 21, 2008