이븐 연결망의 노드 중복 없는 병렬 경로
(Node Disjoint Parallel Paths of Even Network)

김 종 석 [†] 이 형 옥 [††]
(Kim Jongseok) (Lee Hyeongok)

요 약 [1]에서 A. Ghafoor는 고장허용 다중컴퓨터에 대한 하나의 모형으로 이븐 연결망 E_d를 소개하였고, 최단거리를 갖는 노드 중복 없는 경로를 포함한 여러 가지 성질들을 발표하였다. [1]에서 제안한 노드 중복 없는 경로에 의해 고장 지름을 구하면, 고장 지름은 d+2(d=홀수)와 d+3(d=짝수)이다. 그러나 [1]에서 증명한 노드 중복 없는 경로는 최단 거리가 아니다. 본 논문에서는 이븐 연결망 E_d가 노드 대칭임을 보이고, 순환적 교환 순서를 이용하여 이븐 연결망의 최단 거리를 갖는 노드 중복 없는 경로를 제시하고, 고장지름이 d+1임을 증명한다.

키워드 : 상호 연결망, 이븐 연결망, 노드 대칭성, 노드 중복 없는 경로, 고장 지름, 순환적 교환 순서

Abstract A. Ghafoor proposed Even networks as a class of fault-tolerant multiprocessor networks in [1] and analyzed so many useful properties include node disjoint paths. By introducing node disjoint paths in [1], fault diameter of Even networks is d+2(d=odd) and d+3(d=even). But the lengths of node disjoint paths proved in [1] are not the shortest. In this paper, we show that Even network E_d is node symmetric. We also propose the shortest lengths of node disjoint paths using cyclic permutation, and fault diameter of Even networks is d+1.

Key words : Interconnection network, Even network, Node symmetry, Node disjoint path, Fault diameter, Cyclic permutation

1. 서 론

현대의 공학과 과학 기술의 발달, 특히 VLSI 기술과 광섬유(optic fiber) 기술의 발달로 인해 고성능 컴퓨터에 대한 요구의 증가로 병렬 처리 컴퓨터에 대한 관심이 증가하고 있다. 병렬 처리 컴퓨터는 크게 다중 프로세서 시스템과 다중 컴퓨터 시스템으로 나눌 수 있는데, 다중 컴퓨터 시스템은 자신의 메모리를 갖는 프로세서들을 상호 연결망으로 연결하고, 프로세서들 사이에 통신은 상호 연결망을 통해 메시지를 교환하는 방식으로 이루어진다. 이러한 다중 컴퓨터에서 각 프로세서를 연결하는 상호 연결망 구조는 전체 시스템의 성능 및 확장성에 큰 영향을 미치는 것으로 병렬 처리 컴퓨터 개발의 기반 기술 제공을 위해 그 필요성이 증가되고 있다[2].

상호 연결망은 각 프로세서들을 노드로, 프로세서들 사이에 통신 채널을 에지로 표현한다. 상호 연결망을 구성하는 요소 즉, 프로세서(processor)와 통신 링크(link)들이 증가하면서 구성 요소들의 고장 가능성은 더욱더 높아지고 있으므로 대규모 연결망일수록 높은 고장 허용도를 필요로 하며, 연결망의 일부분에서 고장이 발생해도 전체 성능을 유지할 수 있는 방안들이 요구된다. 특히 연결망에서는 프로세서와 프로세서 간에 메시지 전송을 위한 라우팅 알고리즘과 최단 경로 길이에 의해 성능이 결정된다.

대칭성은 상호 연결망을 평가하는 아주 중요한 요소 중의 하나이다[2,3]. 대칭성이 있는 연결망은 노드의 부하를 다른 노드들에게 동일하게 분산할 수 있으므로 부하가 한 노드에 집중되지 않으며, 모든 노드가 같은 역할을 수행하므로 모든 노드에 동일한 알고리즘을 적용할 수 있게 한다. 또한 임의의 두 노드 사이의 라우팅

† 정 회 원 : 영남대학교 정보통신공학과 연구교수
rockhee7@gmail.com
†† 정 회 원 : 순천대학교 컴퓨터교육과 교수
oklee@sunchon.ac.kr
(Corresponding author임)
논문접수 : 2008년 4월 10일
심사완료 : 2008년 6월 16일

정보과학회논문지: 시스템 및 이론 제35권 제9호(2008.10)

알고리즘을 쉽게 설계할 수 있도록 한다.

연결망에서 고장 허용도를 평가하기 위한 방척도로 고장지름(fault diameter)이 있다. 연결망 G의 지름은 연결망을 구성하는 노드들 중 임의의 두 개 노드 사이에 최단 경로 길이 중 최대값으로 $D(G)$로 표현한다. 고장 지름은 Krishnamoorthy와 Krishnamurthy에 의해 처음으로 제안된 개념으로, 연결망 G의 고장 지름이란 연결망 G가 나누어지지 않는 한도 내에서 노드가 고장이 발생했을 때 최대 지름을 의미하는 것으로 G_f로 표현하며[4], 지금까지 많은 연결망에서 연구가 진행되어 왔다[1,5-18]. 연결망에서 고장 지름을 분석하는 문제는 그래프의 곱을 이용한 방법[10], 노드 중복 없는 경로를 이용한 방법[1,5,11-14,16,17], 에지 중복 없는 스패닝 트리를 이용한 방법[8,9], 독립 스패닝 트리를 이용한 방법[15] 등이 있다. 그래프의 곱을 이용한 방법은 연결망에 특정한 조건을 제안하여 좀 더 많은 고장 노드가 존재해도 고장 지름을 분석할 수 있음을 나타내는 방법이고, 노드 중복 없는 경로를 이용한 방법은 임의의 두 노드 사이에 노드 중복하지 않는 경로가 여러 개 존재하는 것을 증명하는 방법이다. 에지 중복 없는 스패닝 트리를 이용한 방법은 하나의 노드에 분지수-1개의 고장 에지가 존재할 때 연결망의 스패닝 트리를 구하여 스패닝 트리를 이용하여 라우팅을 하는 방법이며, 독립 스패닝 트리를 이용한 방법은 동일한 정점 노드를 갖는 분지수 만큼의 노드 중복 없는 스패닝 트리를 구하여 라우팅을 하는 방법이다. 에지 중복 없는 스패닝 트리를 이용한 방법과 독립 스패닝 트리를 이용한 방법은 연결망의 방송을 분석할 때 더 많이 사용되는 방법이고, 그래프의 곱을 이용한 방법은 특정 조건 즉, 절대로 고장 나지 않는 노드를 지정해야 하기 때문에 일반적으로 사용되는 방법은 아니다. 노드 중복 없는 경로는 두 노드 사이에 많은 양의 데이타를 전송할 때 메시지 전송 속도를 향상할 수 있을 뿐만 아니라, 경로상의 노드나 에지가 고장이 발생해도 대체 경로를 설정할 수 있으므로 많이 사용된다.

4가지 방법을 이용하여 분석된 연결망으로 하이퍼큐브 Q_n가 있다. 하이퍼큐브 Q_n의 지름(diameter)은 n이다. 각각의 방법을 살펴보면, [10]에서 제안한 방법은 고장노드를 $2n$-3개까지 허용할 때 Q_n의 고장지름은 n+2이며, [13]에서 제안한 방법은 고장 노드를 n-1개까지 허용할 때 Q_n의 고장지름은 n+1임을 보였고, 에지 중복 없는 스패닝 트리를 이용한 방법[9]과 독립 스패닝 트리를 이용한 방법[15]에서는 n-1개의 고장 에지가 발생했을 때 Q_n의 고장지름이 n+1임을 보였다.

[1]에서 Ghafoor는 고장허용 다중컴퓨터에 대한 하나의 모형으로 이븐 연결망 E_d를 소개하였고, 최단거리를 갖는 노드 중복 없는 경로를 포함한 여러 가지 성질들을 발표하였지만, 이븐 연결망에 대한 고장지름을 분석한 연구는 아직까지 발표되지 않았고, [1]에서 제안한 노드 중복 없는 경로는 최단 경로를 구성하고 있지 않다. 본 논문에서는 순환적 교환 순서를 이용하여 이븐 연결망의 최단 경로를 갖는 노드 중복 없는 경로를 제안하고, 이븐 연결망의 고장 지름이 d+1임을 보인다.

2. 관련연구

[1]에서 Ghafoor는 고장허용 다중컴퓨터에 대한 하나의 모형으로 이븐 연결망 E_d를 소개하였다. 이븐 연결망 E_d에 대한 연구는 최대고장허용도, 노드 및 에지 대칭성, 노드중복 없는 경로, 간단한 라우팅 알고리즘, 하다마드 매트릭스(hadamard matrix)를 이용한 고장허용도 등이 발표되었다[1,19]. 이븐 연결망 E_d의 노드수는 $\binom{2d-2}{d-1}$이고, 분지수는 d이며, 지름 $D(E_d)$은 d-1이다. 이븐 연결망 E_d의 각 노드는 이진수의 비트스트링 $x_1x_2...x_i...x_{2d-3}$으로 나타내고, 각 노드를 구성하는 비트스트링에서 이진수 "0"과 "1"의 개수는 한 개 차이난다. 즉, $|0|=|1|\pm1$이다. $|a|$는 a의 개수를 나타낸다. 이븐 연결망 E_d의 임의의 두 노드를 $U=u_1u_2...u_i...u_{2d-3}$와 $V=v_1v_2...v_i...v_{2d-3}$이라 할 때, 두 노드 U와 V 사이에 Exclusive-OR 함수(⊕)를 적용시킨 결과를 $R=r_1r_2...r_i...r_{2d-3}$, ($r_i=u_i\oplus v_i$)라고 표시하겠다($1\le i\le 2d-3$). 두 노드 U와 V 사이의 해밍거리(hamming distance) H_{UV}는 r_i=1인 r_i의 개수이다. 노드를 연결하는 에지는 노드의 해밍거리가 1 혹은 $2d$-3인 두 노드 사이에 에지가 존재한다. 해밍거리가 1인 두 노드를 연결하고 있는 에지를 i-에지라 하고, 해밍거리가 $2d$-3인 두 노드를 연결하고 있는 에지를 c-에지라 하겠다. 다시 표현하면, 각 노드를 구성하는 이진비트스트링 중에서 하나의 비트스트링 x_i만 보수로 변환하거나 모든 비트스트링을 보수로 변환하는 치환을 σ_i 또는 σ_c라 하면, $U=\sigma_i(V)$ 또는 $U=\sigma_c(V)$인 두 노드 U와 V 사이에 i-에지 또는 c-에지가 존재한다. 이븐 연결망 E_d는 이분할연결망(bipartite network)이며, E_d의 내부에는 짝수 길이 사이클은 존재하지 않는다[1]. 그림 1은 5개의 비트를 이용하여 나타낸 이븐 연결망 E_4이다.

본 논문에서는 이븐 연결망 E_d의 한 노드, d-2개의 0과 d-1개의 1로 구성된 노드 S=0...01...1을 $S=0^{d-2}1^{d-1}$로 표현하겠다. 두 노드 U와 V 사이의 거리(distance)를 $dist(U,V)$라고 표시하면, 두 노드 사이의 거리 $dist(U,V)$는 다음과 같다[1].

- $dist(U,V)=\min\{H_{UV},\ 2d-2-H_{UV}\}$

임의의 노드 U에서 치환 $\sigma_{k1},\sigma_{k2},...,\sigma_{kt}$을 순차적으로

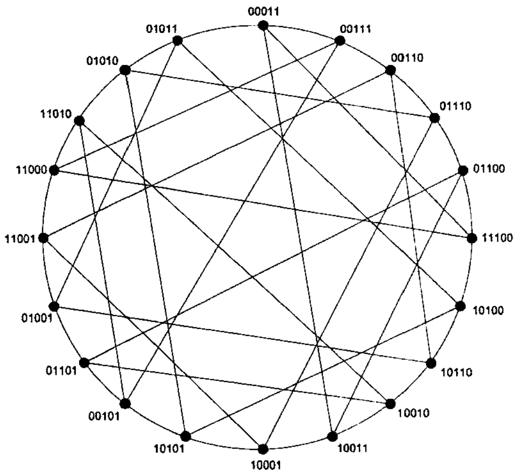

그림 1 이븐 연결망 E_4

적용하여 정해지는 경로를 $[k_1,k_2,...,k_l]$로 표시하겠다. 두 노드 U와 V를 연결하는 최단경로를 P라고 하면, P에 포함되는 원소들의 집합은 $S=\{i|r_i=1,\ 1\le i\le 2d-3\}$이거나 $S'=\{c,\ i|r_i=0,\ 1\le i\le 2d-3\}$이다. 왜냐하면 임의의 두 노드 U와 V 사이의 거리는 $dist(U,V)=\min\{H_{UV},\ 2d-2-H_{UV}\}$ 임을 [1]에서 증명했기 때문에 U와 V사이의 거리가 H_{UV}인 경우에는 P에 포함되는 원소들의 집합은 S이고, U와 V 사이의 거리가 $2d-2-H_{UV}$인 경우에는 P에 포함되는 원소들의 집합은 S'이다. 예를 들면 노드 U=00111, 노드 V=10101이라고 하면, R=10010이므로 $H_{UV}=2$이고 $S=\{1,4\}$이고, $2d-2-H_{UV}=4$이고 $S'=\{c,2,3,5\}$이므로 $dist(U,V)=H_{UV}=2$임을 알 수 있고, 최단경로 P는 [4,1]이다.

[1]에서 이븐 연결망 E_d의 노드 중복 없는 경로를 다음과 같이 나타냈다.

정리 1. 이븐 연결망 E_d의 임의의 두 노드 U와 V 사이의 노드 중복 없는 경로의 개수는 최대 d이고, 경로들의 길이는 다음과 같다.

경우 1) $dist(U,V)$가 짝수일 때 : 길이가 $dist(U,V)$인 경로는 $dist(U,V)/2$개 존재하고, 나머지 다른 경로들은 모두 동일한 길이, $dist(U,V)+2$를 갖는다.

경우 2) $dist(U,V)$가 홀수일 때 : 길이가 $dist(U,V)$인 경로는 $(dist(U,V)+1)/2$개 존재하고, 길이가 $dist(U,V)+2$인 경로가 하나 존재하며, 나머지 경로들은 모두 동일한 길이, $dist(U,V)+4$를 갖는다.

정리 1에 의해 이븐 연결망 E_d의 고장 지름을 구하면 $d+2$(d=홀수)와 $d+3$(d=짝수)이다. 하지만 정리 1에서 제시한 노드 중복 없는 경로와 정리 1에 의해 구해진 고장지름은 최단거리가 아니다. 예를 들어, 이븐 연결망 E_4의 두 노드를 U=00111, V=01001라 하면, $dist(U,V)=3$이므로 이 예는 정리 1의 경우 2에 해당하므로 길이가 3인 경로 2개와 길이 5인 경로 1개와 길이 7인 경로 1개가 존재해야한다. 그러나 본 논문에서 제안하는 노드 중복 없는 경로에 의하면 길이가 3인 경로 4개가 존재한다. 본 논문에서는 이븐 연결망 E_d의 임의의 두 노드 사이의 노드 중복 없는 경로들 중에 최대거리를 갖는 경로의 길이를 $D_d(E_d)$라고 표현하겠다.

3. 이븐 연결망의 노드 중복 없는 경로

연결망 G에 속한 어떤 노드에서도 G가 똑같이 보일 때 G는 노드 대칭적이라 한다. 즉, 연결망의 임의의 두 노드 V와 W에 대응시키는 자기동형(automorphism)이 존재하면 그 연결망은 노드 대칭적이다[2,12]. 대칭성은 주어진 연결망으로 노드 중복 없는 컴퓨터를 설계할 때 각종 자원의 관리를 쉽게 하고, 효율적인 라우팅을 설계할 수 있도록 한다.

정리 2. 이븐 연결망 E_d는 노드 대칭이다.

증명. 증명을 위해 이븐 연결망 E_d의 임의의 노드들을 $U=x_1x_2\cdots x_i\cdots x_{2d-3}$, $V=x_1x_2\cdots \overline{x_i}\cdots x_{2d-3}$, $V'=\overline{x_1x_2\cdots x_i\cdots x_{2d-3}}$라고 하자. 노드 U와 V 또는 U와 V'는 인접한 노드들이다. E_d의 모든 노드들을 구성하는 이진비트스트링 0과 1을 1과 0으로 바꾸는 함수를 ϕ라 하자. 그러면 $\phi(U)=\overline{x_1x_2\cdots x_i\cdots x_{2d-3}}$이고, $\phi(V)=\overline{x_1x_2\cdots x_i\cdots x_{2d-3}}$이며, $\phi(V')=x_1x_2\cdots x_i\cdots x_{2d-3}$이다. 함수 ϕ에 의해 변환된 노드 $\phi(U)$와 $\phi(V)$, 또는 $\phi(U)$와 $\phi(V')$는 인접한 노드임을 쉽게 알 수 있다. 이러한 결과로 E_d의 임의의 두 노드 U와 V 또는 U와 V'에 대응되는 자기동형이 존재함을 알 수 있으므로 E_d는 노드대칭이다.

보조정리 1. 이븐 연결망 E_d의 임의의 노드 U에 치환 σ_i $(1\le i\le 2d-3)$와 σ_c를 모두 적용하면 길이 $2d-2$인 하나의 사이클을 구성한다.

증명. 이븐 연결망 E_d의 임의의 노드 U에 치환 σ_i $(1\le i\le 2d-3)$를 적용하면 U의 보수 노드인 $\overline{U}$와 연결된다. $\overline{U}$에 치환 σ_c를 적용하면 노드 U에 연결됨을 알 수 있다. 그러므로 이븐 연결망 E_d의 임의의 노드 U에 치환 σ_i $(1\le i\le 2d-3)$와 σ_c 를 모두 적용하면 하나의 사이클을 구성한다. 노드 U에 적용한 치환의 개수는 $2d-3$(σ_i 의 개수)+1(σ_c의 개수)이므로 이 사이클의 길이는 $2d-2$임을 알 수 있다.

$S_1=(a_1,a_2,...,a_p)$, $S_2=(b_1,b_2,...,b_q)$이라 하자. $p=q$ 또는 $p=q+1$이면, S_1과 S_2는 순환적 교환 순서($\odot$)를 구성하는 두 집합을 나타낸다. 그리고 $S_1\odot S_2$는 S_1과 S_2의 원소들을 번갈아 사용하여 구성되는 집합이다. 만약 S_2의

원소가 S_1의 원소보다 하나 적은 상태에서 S_1과 S_2의 원소들을 번갈아 사용하여 구성되는 집합은 $S_1 \odot S_2^-$로 표시하겠다. 또한 순환적 교환 순서에 원소 c가 포함되는 경우는 $c \circ S_1 \odot S_2$ 또는 $c \circ S_1 \odot S_2^-$로 표시하겠다. 본 논문에서는 순환적 교환 순서를 이용하여 노드 중복 없는 경로 집합을 구성하겠다.

$$S_1 \odot S_2 = \left\{ \begin{array}{c} A_1 : a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_{p-1}, b_{p-1}, a_p, b_p \\ A_2 : a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots, a_p, b_p, a_1, b_1 \\ \vdots \\ A_p : a_p, b_p, a_1, b_1, \ldots, a_{p-1}, b_{p-1} \end{array} \right\}$$

$$S_1 \odot S_2^- = \left\{ \begin{array}{c} A_1 : a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_{p-1}, b_{p-1}, a_p \\ A_2 : a_2, b_1, a_3, b_2, \ldots, a_p, b_{p-1}, a_1 \\ \vdots \\ A_p : a_p, b_1, a_1, b_2, \ldots, a_{p-2}, b_{p-1}, a_{p-1} \end{array} \right\}$$

$$c \circ S_1 \odot S_2 = \left\{ \begin{array}{c} A_0 : c, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_{p-1}, b_{p-1}, a_p, b_p \\ A_1 : a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_{p-1}, b_{p-1}, a_p, b_p, c \\ A_2 : a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots, a_p, b_p, a_1, c, b_1 \\ \vdots \\ A_p : a_p, b_p, a_1, b_1, \ldots, a_{p-1}, c, b_{p-1} \end{array} \right\}$$

$$c \circ S_1 \odot S_2^- = \left\{ \begin{array}{c} A_0 : c, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_{p-1}, b_{p-1}, a_p \\ A_1 : a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_{p-1}, b_{p-1}, a_p, c \\ A_2 : a_2, b_1, a_3, b_2, \ldots, a_p, b_{p-1}, c, a_1 \\ \vdots \\ A_p : a_p, b_1, a_1, b_2, \ldots, a_{p-2}, b_{p-1}, c, a_{p-1} \end{array} \right\}$$

예를 들면, S_1=(10,11,12), S_2=(2,3,4)라고 하면 $S_1 \odot S_2$={(10,2,11,3,12,4), (11,3,12,4,10,2), (12,4,10,2,11,3)}이다. 또 S_1=(10,11,12), S_2=(2,3)라고 하면 $S_1 \odot S_2^-$= {(10,2,11,3,12), (11,2,12,3,10), (12,2,10,3,11)}이다. 순환적 교환 순서에 의해 구해진 각 순서들 $A_1, A_2, \ldots, A_p$는 이븐 연결망 E_d의 임의의 두 노드를 연결하는 최단경로들을 의미한다. 그러므로 예를 들었던 $S_1 \odot S_2$는 세 개의 경로 [10,2,11,3,12,4], [11,3,12,4,10,2], [12,4,10,2,11,3]로 나타낼 수 있다. 마찬가지로 $S_1 \odot S_2^-$도 [10,2,11,3,12], [11,2,12,3,10], [12,2,10,3,11]인 세 개의 경로로 나타낼 수 있다. 이븐 연결망이 노드대칭임을 정리 2에서 증명하였으므로, 본 논문에서는 노드 U를 $0^{d-2}1^{d-1}$라고 하겠다.

정의 1. 이븐 연결망 E_d의 임의의 두 노드를 $U=u_1u_2 \ldots u_i \ldots u_{2d-3}=0^{d-2}1^{d-1}$와 $V=v_1v_2 \ldots v_i \ldots v_{2d-3}$라 하고, $U \oplus V=r_1r_2 \ldots r_i \ldots r_{2d-3}$라 하자.

$dist(U,V)=H_{UV}$이면, $S_1=\{i|r_i=1,\ d-1 \le i \le 2d-3\}$이고 $S_2=\{i|r_i=1,\ 1 \le i \le d-2\}$이며, $T_1=\{i|r_i=0,\ d-1 \le i \le 2d-3\}$이고 $T_2=\{i|r_i=0,\ 1 \le i \le d-2\}$이다.

$dist(U,V)=2d-2-H_{UV}$이면, $S_1=\{i|r_i=0,\ d-1 \le i \le 2d-3\}$이고 $S_2=\{i|r_i=0,\ 1 \le i \le d-2\}$이며, $T_1=\{i|r_i=1,\ d-1 \le i \le 2d-3\}$이고 $T_2=\{i|r_i=1,\ 1 \le i \le d-2\}$이다.

보조정리 2. 순환적 교환 순서$S_1 \odot S_2$에 의해 구해진 모든 경로 $A_t(1 \le t \le p)$들은 노드 중복 없는 경로이다.

증명. 이븐 연결망 E_d은 노드 대칭이므로 임의의 두 노드를 $U=0^{d-2}1^{d-1}$와 노드 V라고 하자. 순환적 교환 순서$S_1 \odot S_2$에 의해 구해진 경로 A_t는 노드 U와 V를 연결하기 위해 노드 U에 적용되는 σ_i 들의 순서를 나타낸다. 순환적 교환 순서에 의해 구해진 경로들은 모두 최단 거리를 갖는다. 왜냐하면 [1]에서 정의한 최단거리 라우팅 알고리즘은 σ_i 들의 선택에 의해 구성되기 때문이다. 증명을 위해 $S_1 \odot S_2$에 의해 구해진 두 개의 경로 A_1과 A_x를 선택하겠다. A_x는 A_1의 모든 원소를 왼쪽으로 x만큼 로테이트(rotate)한 경로이다. 두 경로 A_1과 A_x 안에 공통 노드 $W(\neq U,V)$가 존재한다고 가정하자. 그러면 두 경로 안에 노드 U로부터 적용되는 동일한 σ_i 들의 집합이 존재해야 하지만 존재할 수 없다. 왜냐하면 A_x는 A_1의 모든 원소를 왼쪽으로 x만큼 로테이트(rotate)한 경로라고 했기 때문이다. 그렇기 때문에 두 경로 안에는 공통노드 $W(\neq U,V)$가 존재하지 않는다. 그러므로 두 경로 A_1과 A_x는 노드 중복 없는 경로이다.

그림 2는 이븐 연결망 E_4 내부에 존재하는 두 노드 U=00111과 V=11001 사이의 노드 중복 없는 경로를 보여준다. S_1=(3,4), S_2=(1,2)라고 하면, 두 노드 00111과 11001를 연결하는 경로 A_1은 [3,1,4,2]이고, A_1의 모든 원소를 왼쪽으로 2만큼 로테이트(rotate)한 경로 A_2는 [4,2,3,1]이다. 두 경로 A_1과 A_2 안에 공통 노드 $W(\neq U,V)$가 존재하기 위해서는 노드 U로부터 적용되는 동일한 σ_i 들의 집합이 두 경로 안에 존재해야만 한다. 예를 들어 경로 A_1 안에 존재하는 노드 U로부터 적용되는 경로 [3,1,4]와 동일 원소로 구성된 경로 [4,1,3]이 경

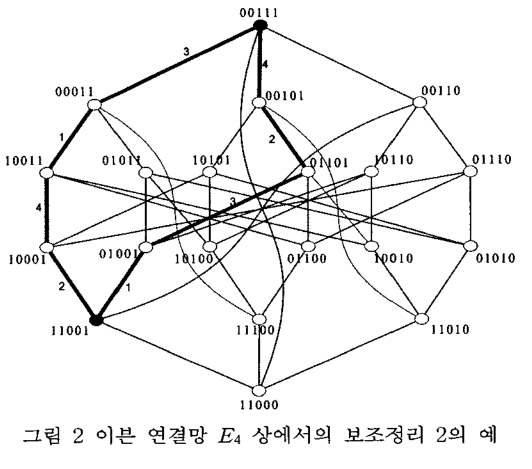

그림 2 이븐 연결망 E_4 상에서의 보조정리 2의 예

로 A_2 안에 존재해야만 공통 노드 10001을 갖는다. 그러나 경로 A_2는 경로 A_1의 모든 원소를 왼쪽으로 2만큼 로테이트한 경로이기 때문에 경로 A_2 안에는 경로 [4,1,3]이 존재하지 않는다. 그러므로 두 경로 A_1과 A_2는 노드 중복 없는 경로이다.

보조정리 2와 유사한 방법으로 순환적 교환 순서 $S_1 \odot S_2^-$, $c \circ S_1 \odot S_2$, $c \circ S_1 \odot S_2^-$에 의해 구해진 모든 경로 A_t(0 또는 $1 \le t \le p$)들은 노드 중복 없는 경로임을 증명할 수 있다. 그리고 보조정리 1과 2에 의해 $S_1 \odot S_2$에 의해 구해진 모든 경로와 $c \circ S_1 \odot S_2^-$에 의해 구해진 모든 경로는 노드 중복 없는 경로이고, $S_1 \odot S_2^-$에 의해 구해진 모든 경로와 $c \circ S_1 \odot S_2$에 의해 구해진 모든 경로는 노드 중복 없는 경로이다.

정리 3. 이븐 연결망 E_d의 임의의 두 노드를 U와 V라고 하면, $D_d(E_d) \le dist(U,V)+4$이다($d \ge 4$).

증명. E_d은 노드 대칭이므로 임의의 두 노드를 노드 $U=0^{d-2}1^{d-1}$와 노드 V라고 하고, $dist(U,V)=\phi$라고 하자. ϕ가 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나누어 증명하겠다. E_3의 $D_d(E_d)$는 2(ϕ=2), 3(ϕ=1)임을 쉽게 알 수 있다.

경우 1) ϕ가 짝수인 경우: 네 가지 경우로 나누어 $D_d(E_d)$을 구한다.

경우 1.1) $\phi=d-1$인 경우

순환적 교환 순서 $S_1 \odot S_2$에 의해 두 노드 U와 V 사이의 경로를 구성할 수 있다. ϕ가 짝수이므로, S_1과 S_2의 원소 개수가 동일함을 알 수 있고, $C(U,V)$의 크기는 $\frac{\phi}{2}$임을 알 수 있다. $S_1 \odot S_2$에 의해 노드 U와 V를 연결하는 하나의 경로를 P라고 하자. E_d의 분지수는 d이므로 보조정리 1에 의해 길이 $d-1$인 $d-\frac{\phi}{2}$개의 다른 경로 Q가 존재함을 알 수 있고, 경로 Q를 구성하는 원소들은 경로 P를 구성하는 원소들과 다르다는 것을 알 수 있다. 그러므로 $D_d(E_d)=d-1$이다. 경로 Q는 순환적 교환 순서 $c \circ T_1 \odot T_2^-$에 의해 구할 수 있다.

경우 1.2) $\phi=2d-2-H_{UV}=d-2$인 경우

순환적 교환 순서 $c \circ S_1 \odot S_2$에 의해 두 노드 U와 V 사이의 경로를 구성할 수 있다. ϕ가 짝수이므로, S_2의 원소 개수가 S_1의 원소 개수보다 하나 적음을 알 수 있고, $C(U,V)$의 크기는 $\frac{\phi}{2}+1$임을 알 수 있다. $c \circ S_1 \odot S_2$에 의해 노드 U와 V를 연결하는 하나의 경로를 P라고 하자. 보조정리 1에 의해 길이 d인 $d-\frac{\phi}{2}-1$개의 다른 경로 Q가 존재함을 알 수 있고, 경로 Q를 구성하는 원소들은 경로 P를 구성하는 원소들과 다르다는 것을 알 수 있다. 그러므로 $D_d(E_d)=d$이다. 경로 Q는 순환적 교환 순서 $T_1 \odot T_2$에 의해 구할 수 있다.

경우 1.3) $\phi=H_{UV}$인 경우

순환적 교환 순서 $S_1 \odot S_2$에 의해 두 노드 U와 V 사이의 경로를 구성할 수 있다. ϕ가 짝수이므로, S_1과 S_2의 원소 개수가 동일함을 알 수 있고, $C(U,V)$의 크기는 $\frac{\phi}{2}$임을 알 수 있다. $S_1 \odot S_2$에 의해 노드 U와 V를 연결하는 하나의 경로를 P라고 하자. E_d의 내부에는 홀수 길이를 갖는 사이클이 존재하지 않는다고 했으므로[6], $\phi+1$인 경로는 존재하지 않는다. 그러므로 길이 $\phi+2$인 경로를 구성한다. 먼저, $[c,P,c]$ 형태를 갖는 하나의 경로를 구성한다. 경로 P와 $[c,P,c]$ 형태를 갖는 경로들은 c가 경로 P에 포함되지 않은 원소이기 때문에 노드 중복이 발생하지 않는다. 그리고 E_d의 분지수는 d이므로 노드 U로부터 임의의 노드 V에 이르는 $[j,P',j]$ 형태를 갖는 $d-1-\frac{\phi}{2}$개의 경로 Q를 구성하겠다($d-1 \le j \le 2d-3$, $j \not\in P$). 경로 P'는 경로 P를 구성하는 원소들의 순서를 거꾸로 뒤집은 순서(reverse order)를 갖는 경로이다. 경로 P와 경로 Q는 j가 경로 P에 포함되지 않은 원소이기 때문에 노드 중복이 발생하지 않는다. 노드 V를 σ_j에 의해 치환한 노드를 V'라고 하자. 그러면 Q의 서브 경로 $Q'=[j,P']$는 노드 U로부터 노드 V'에 이르는 경로가 된다. 그러므로 P를 포함하는 노드 U로부터 노드 V'에 이르는 경로와 경로 Q'를 연결하면 길이 $2\phi+2$인 사이클이 구성된다. 경로 P의 길이는 ϕ이므로, 경로 Q의 길이는 $\phi+2$이다. 그러므로 $D_d(E_d)=dist(U,V)+2$이다.

경우 1.4) $\phi=2d-2-H_{UV}$인 경우

순환적 교환 순서 $c \circ S_1 \odot S_2^-$에 의해 두 노드 U와 V 사이의 경로를 구성할 수 있다. ϕ가 짝수이므로, S_2의 원소 개수가 S_1의 원소 개수보다 하나 적다는 것을 알 수 있고, $C(U,V)$의 크기는 $\frac{\phi}{2}+1$임을 알 수 있다. $c \circ S_1 \odot S_2^-$에 의해 노드 U와 V를 연결하는 하나의 경로를 P라 하자. E_d의 내부에는 홀수 길이를 갖는 사이클이 존재하지 않는다고 했으므로[6], $\phi+1$ 또는 $\phi+3$인 경로는 존재하지 않는다. $\phi+2$인 경로도 존재하지 않는다. 왜냐하면 노드 U에 인접한 i-에지들은 $d-1 \le i \le 2d-3$이고, 경로 P를 구성하는 원소들을 보면 첫 번째 원소 p와 마지막 원소 p'는 $d-1 \le p,p' \le 2d-3$이므로 임의의 원소 $j(d-1 \le j \le 2d-3)$가 포함된 길이 $\phi+2$인 경로 $[j,P,j]$ 또는 $[j,P',j]$를 구성할 수 없다. 그러므로 길이 $\phi+4$인 경로를 구성한다. E_d의 분지수는 d이므로 노드 U로부터 임의의 노드 V에 이르는 $[x,y,P,x,y]$ 형태를 갖는 길이 $\phi+4$인 경로 Q를 구성하겠다($d-1 \le x \le 2d-3$, $1 \le y \le d-2$, $x,y \not\in P$). x,y가 경로 P에 포함되지 않은 원소들이기 때문에 노드 중복이 발생하지 않는다. σ_x, σ_y에 의해

치환된 노드 V를 V'라고 하면, Q의 서브경로 $Q'=[x,y,P]$는 노드 U로부터 노드 V'에 이르는 경로가 된다. 그러므로 P를 포함하는 노드 U로부터 노드 V' 에 이르는 경로와 경로 Q'를 연결하면 길이 $2\phi+4$인 사이클이 구성된다. 경로 P의 길이는 ϕ이므로, 경로 Q의 길이는 $\phi+4$이다. 그러므로 $D_d(E_d)=dist(U,V)+4$이다.

경우 2) ϕ가 홀수인 경우: 다섯 가지 경우로 나누어 $D_d(E_d)$을 구한다.

경우 2.1) $\phi=d-1$인 경우

순환적 교환 순서 $S_1 \odot S_2^-$에 의해 두 노드 U와 V 사이의 경로를 구성할 수 있다. ϕ가 홀수이므로, S_2의 원소 개수가 S_1의 원소 개수보다 하나가 적음을 알 수 있고, $C(U,V)$의 크기는 $\frac{\phi+1}{2}$임을 알 수 있다. $S_1 \odot S_2$에 의해 노드 U와 V를 연결하는 하나의 경로를 P라 하자. E_d의 분지수는 d이므로 U와 V를 연결하는 $d-\frac{\phi+1}{2}$개의 다른 노드 중복 없는 경로 Q가 존재한다. 보조정리 1에 의해 길이 $d-1$인 다른 경로 Q가 존재함을 알 수 있고, 경로 Q를 구성하는 원소들은 경로 P를 구성하는 원소들과 다르다는 것을 알 수 있다. 그러므로 $D_d(E_d)=d-1$이다. 경로 Q는 순환적 교환 순서 $c \circ T_1 \odot T_2$에 의해 구할 수 있다.

경우 2.2) $\phi=2d-2-H_{UV}=d-2$인 경우

순환적 교환 순서 $c \circ S_1 \odot S_2$에 의해 두 노드 U와 V 사이의 경로를 구성할 수 있다. ϕ가 홀수이므로, S_1과 S_2의 원소 개수는 같다는 것을 알 수 있고, $C(U,V)$의 크기는 $\frac{\phi+1}{2}$임을 알 수 있다. $S_1 \odot S_2$에 의해 노드 U와 V를 연결하는 하나의 경로를 P라 하자. E_d의 분지수는 d이므로 U와 V를 연결하는 $d-\frac{\phi+1}{2}$개의 다른 노드 중복 없는 경로 Q가 존재한다. 보조정리 1에 의해 길이 d인 다른 경로 Q가 존재함을 알 수 있고, 경로 Q를 구성하는 원소들은 경로 P를 구성하는 원소들과 다르다는 것을 알 수 있다. 그러므로 $D_d(E_d)=d$이다. 경로 Q는 순환적 교환 순서 $T_1 \odot T_2^-$에 의해 구할 수 있다.

경우 2.3) $\phi=H_{UV}=d-2$인 경우

순환적 교환 순서 $S_1 \odot S_2^-$에 의해 두 노드 U와 V 사이의 경로를 구성할 수 있다. ϕ가 홀수이므로, S_2의 원소 개수가 S_1의 원소 개수보다 하나가 적음을 알 수 있고, $C(U,V)$의 크기는 $\frac{\phi+1}{2}$임을 알 수 있다. $S_1 \odot S_2$에 의해 노드 U와 V를 연결하는 하나의 경로를 P라 하자. E_d의 분지수는 d이므로 U와 V를 연결하는 $d-\frac{\phi+1}{2}$개의 다른 노드 중복 없는 경로 Q가 존재한다. 보조정리 1에 의해 길이 d인 다른 경로 Q가 존재함을 알 수 있고, 경로 Q를 구성하는 원소들은 경로 P를 구성하는 원소들과 다르다는 것을 알 수 있다. 그러므로 $D_d(E_d)=d$이다. 경로 Q는 순환적 교환 순서 $c \circ T_1 \odot T_2$에 의해 구할 수 있다.

경우 2.4) $\phi=2d-2-H_{UV}$인 경우

순환적 교환 순서 $c \circ S_1 \odot S_2$에 의해 두 노드 U와 V 사이의 경로를 구성할 수 있다. ϕ가 홀수이므로, S_1과 S_2의 원소 개수는 같다는 것을 알 수 있고, $C(U,V)$의 크기는 $\frac{\phi+1}{2}$임을 알 수 있다. $S_1 \odot S_2$에 의해 노드 U와 V를 연결하는 하나의 경로를 P라 하자. E_d의 분지수는 d이므로 U와 V를 연결하는 $d-\frac{\phi+1}{2}$개의 다른 노드 중복 없는 경로 Q가 존재한다. E_d의 내부에는 홀수 길이를 갖는 사이클이 존재하지 않는다고 했으므로[6], $\phi+1$인 경로는 존재하지 않는다. 그러므로 길이 $\phi+2$인 경로를 구성한다. E_d의 분지수는 d이므로 노드 U로부터 임의의 노드 V에 이르는 $[j,P',j]$ 형태를 갖는 경로 Q를 구성하겠다($d+\frac{\phi}{2} \le j \le 2d-1$). 경로 P'는 경로 P를 구성하는 원소들의 순서를 거꾸로 뒤집은 순서(reverse order)를 갖는 경로이다. 경로 P와 경로 Q는 j가 경로 P에 포함되지 않은 원소이기 때문에 노드 중복이 발생하지 않는다. 노드 V를 o_j 에 의해 치환한 노드를 V'라고 하고, 경로 Q를 $[j,P',j]$ 형태를 갖는 경로라고 하자. 그러면 V'는 레벨 $L_{\phi+1}$에 위치하고, Q의 서브경로 $Q'=[j,P']$는 노드 U로부터 노드 V'에 이르는 경로가 된다. 그러므로 P를 포함하는 노드 U로부터 노드 V'에 이르는 경로와 경로 Q'를 연결하면 길이 $2\phi+2$인 사이클이 구성된다. 경로 P의 길이는 ϕ이므로, 경로 Q의 길이는 $\phi+2$이다. 그러므로 $D_d(E_d)=dist(U,V)+2$이다.

경우 2.5) $\phi=H_{UV}$인 경우

순환적 교환 순서 $S_1 \odot S_2^-$에 의해 두 노드 U와 V 사이의 경로를 구성할 수 있다. ϕ가 홀수이므로, S_2의 원소 개수가 S_1의 원소 개수보다 하나가 적음을 알 수 있고, $C(U,V)$의 크기는 $\frac{\phi+1}{2}$임을 알 수 있다. $S_1 \odot S_2$에 의해 노드 U와 V를 연결하는 하나의 경로를 P라 하자. E_d의 분지수는 d이므로 U와 V를 연결하는 $d-\frac{\phi+1}{2}$개의 다른 노드 중복 없는 경로 Q가 존재한다. E_d의 내부에는 홀수 길이를 갖는 사이클이 존재하지 않는다고 했으므로[6], $\phi+1$ 또는 $\phi+3$인 경로는 존재하지 않는다. 그러므로 길이 $\phi+2$인 경로를 구성한다. 길이 $\phi+2$인 경로는 $[c,P,c]$ 형태를 갖는 하나의 경로만이 존재한다. 왜냐하면 노드 U에 인접한 i-에지들은 $d \le i \le 2d-1$이고,

경로 P를 구성하는 원소들을 보면 첫 번째 원소 p와 마지막 원소 p'는 $d \le p, p' \le 2d-1$이므로 임의의 원소 $j(d \le j \le 2d-1)$가 포함된 길이 $\phi+2$인 경로 $[j,P,j]$ 또는 $[j,P',j]$를 구성할 수 없다. 경로 P와 $[c,P,c]$ 형태를 갖는 경로들은 c가 경로 P에 포함되지 않은 원소이기 때문에 노드 중복이 발생하지 않는다. $S_1 \odot S_2$에 의해 노드 U와 V를 연결하는 하나의 경로를 P라 하자. E_d의 분지수는 d이므로 U와 V를 연결하는 $d-1\ \frac{\phi}{2}$개의 다른 노드 중복 없는 경로 Q가 존재한다. 그러므로 길이 $\phi+4$인 경로를 구성한다. E_d의 분지수는 d이므로 노드 U로부터 임의의 노드 V에 이르는 $[x,y,P,x,y]$ 형태를 갖는 길이 $\phi+4$인 경로 Q를 구성하겠다($d+\frac{\phi}{2} \le x \le 2d-3$, $\frac{\phi}{2}+1 \le y \le d-1$). 경로 Q를 구성하는 원소들은 경로 P를 구성하는 원소들과 다르다는 것을 알 수 있다. 왜냐하면, (x,y)가 경로 P에 포함되지 않은 순서쌍이기 때문에 노드 중복이 발생하지 않는다. σ_x, σ_y에 의해 치환된 노드 V를 V' 라고 하면, Q의 서브경로 $Q'=[x,y,P]$는 노드 U로부터 노드 V' 에 이르는 경로가 된다. 그러므로 P를 포함하는 노드 U로부터 노드 V' 에 이르는 경로와 경로 Q' 를 연결하면 길이 $2\phi+4$인 사이클이 구성된다. 경로 P의 길이는 ϕ이므로, 경로 Q의 길이는 $\phi+4$이다. 그러므로 $D_d(E_d)=dist(U,V)+4$이다.

정리 4. $D_f(E_d) = D(E_d) + 2 = d+1$.

증명. E_d는 노드 대칭이므로 E_d의 임의의 두 노드를 $U=0^{d-2}1^{d-1}$와 노드 V라고 하자. $dist(U,V)$에 따라 E_d의 고장지름 $D_f(E_d)$을 분석하겠다.

경우 1) $dist(U,V)=D=d-1$

정리 3에 의해 $D_d(E_d)=d-1$이므로 $D_f(E_d)=d-1$임을 알 수 있다.

경우 2) $dist(U,V)=d-2$

정리 3에 의해 $D_d(E_d)=d$이므로 $D_f(E_d)=d$임을 알 수 있다.

경우 3) $dist(U,V) \le d-3$

정리 3에 의해 $D_d(E_d)=dist(U,V)+4$이므로 $D_f(E_d)=d+1$임을 알 수 있다.

예제를 통하여 [6]에서 제안한 노드 중복 없는 경로와 본 논문에서 제안한 노드 중복 없는 경로를 비교하여 본 논문에서 제안한 방법이 더 우수함을 보인다.

예제) E_4의 두 노드를 $U=00111$, $V=01001$라 하면 $R=01110$이므로, $dist(U,V)=H_{(R)}=3$이고, $S_1=(3,4)$, $S_2=(2)$, $T_1=(5)$, $T_2=(1)$이다. 분지수가 4이므로 두 노드 사이의 노드 중복 없는 경로는 4개 존재한다.

1) 정리 1의 경우 2에 의한 노드 중복 없는 경로:

길이가 3인 경로: [3,2,4], [4,2,3]

길이가 5인 경로: $[c,3,2,4,c]$

길이가 7인 경로: [5,1,3,2,4,5,1]

2) 정리 3의 경우 2.1에 의한 노드 중복 없는 경로:

길이가 3인 경로: [3,2,4], [4,2,3], $[c,5,1]$, $[5,1,c]$

위의 예제를 보면 [6]에서 제안한 노드 중복 없는 경로는 길이가 3인 경로가 2개, 길이가 5인 다른 경로 1개, 길이가 7인 경로 1개가 존재하지만, 본 논문에서 제안하는 경로에 의하면 길이가 3인 경로 4개가 존재한다는 것을 알 수 있으므로 본 논문에서 제안한 경로가 더 우수함을 알 수 있다.

4. 결 론

[1]에서 Ghafoor는 이븐 연결망 E_d의 최단거리를 갖는 노드 중복 없는 경로를 제안하였다. [1]에서 제안한 노드 중복 없는 경로에 의해 고장 지름을 구하면, 고장지름은 $d+2$(d=홀수)와 $d+3$(d=짝수)이다. 본 논문에서는 이븐 연결망 E_d가 노드 대칭임을 보였고, 순환적 교환순서를 이용하여 E_d의 노드 중복 없는 경로를 구성하는 방법을 제안하였다. 본 논문에서 제안한 E_d의 노드 중복 없는 경로는 [1]에서 제안한 노드 중복 없는 경로보다 두 노드 사이의 거리를 더 단축했다. 그리고 E_d의 광역지름이 $dist(U,V)+4$ 이하임을 보였고, 고장지름이 $d+1$임을 보였다. 이러한 결과에 의해 [1]에서 제안한 노드 중복 없는 경로와 고장지름보다 본 논문에서 제안한 노드 중복 없는 경로와 고장지름이 더 우수함을 알 수 있다.

참 고 문 헌

[1] A. Ghafoor, "A Class of Fault-Tolerant Multiprocessor Networks," IEEE Trans. Reliability, Vol.38, No.1, pp. 5-15, 1989.

[2] S. B. Akers, D. Harel, and B. Krishnamurthy, "The Star Graph: An Attractive Alternative to the n-Cube," Proc. Int'l. Conf. on Parallel Processing, pp. 393-400, 1987.

[3] C.-P. Chang, T.-Y. Sung, and L.-H. HSu, "Edge Congestion and Topological Properties of Crossed Cubes," IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, Vol.11, No.1, pp. 64-80, 2000.

[4] M. S. Krishnamoorthy, and B. Krishnamurthy, "Fault diameter of interconnection networks," Comput. Math. Apl., Vol.13, No.5-6, pp. 577-582, 1987.

[5] S. A. Choudum, and V. Sunitha, "Augmented Cubes," Networks, Vol.40, No.2, pp. 71-84, 2002.

[6] D. Z. Du, D. F. Hsu, and Y. D. Lyuu, "On the diameter vulnerability of Kautz digraphs," Discrete Math. Vol.151, pp. 81-85, 1996.

[7] D. R. Duh, and G. H. Chen, "On the Rabin number problem," Networks, Vol.30, pp. 219-230, 1997.
[8] P. Fragopoulou, and S. G. Akl, "Edge-Disjoint Spanning Trees on the Star Network with Applications to Fault Tolerance," IEEE. Trans. Computers, Vol.45, No.2, pp. 174-185, 1993.
[9] S. L. Johnsson, and C. T. Ho, "Optimum Broadcasting and Personalized Communication in Hyperubes," IEEE. Trans. Computers, Vol.38, No.9, pp. 1249-1268, 1989.
[10] S. Latifi, "Combinatorial Analysis of the Fault-Diameter of the n-cube," IEEE. Trans. Computers, Vol.42, No.1, pp. 27-33, 1993.
[11] S. C. Liaw, G. J. Chang, F. Cao, and D. F. Hsu, "Fault-tolerant routing in circulant networks and cycle prefix networks," Ann. Comb., Vol.2, No.5-6, pp. 165-172, 1998.
[12] B. Parhami and D.-M. Kwai, "Unified Formulation of Honeycomb and Diamond Networks," IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, Vol.12, No.1, pp. 74-80, 2001.
[13] Y. Saad, and H. Schultz, "Topological Properties of Hypercubes," IEEE. Trans. Computers, Vol.37, No.7, pp. 867-872. 1988.
[14] W. Shi and P. K. Srimani, "Hierarchical star: a new two level interconnection network," Journal of Systems Architecture, Vol.51, pp. 1-14, 2005.
[15] J.-S. Yang, S.-M. Tang, J.-M. Chang, and Y.-L. Wang, "Parallel Construction of Optimal Independent Spanning Trees on Hypercubes," Parallel Computing, Vol.33, pp. 73-79, 2007.
[16] M. Xu, J.-M. Xu, and X.-M. Hou, "Fault diameter of Cartesian product graphs, Infomation Processing Letters," Vol.93, No.5, pp. 245-248, 2005.
[17] 김종석, 이형옥, "상호 연결망 하이퍼-스타 HS(2n,n)의 이분할 에지수와 고장지름 분석", 한국정보처리학회 논문지 A, Vol.12-A, No.6, pp. 499-506, 2005.
[18] 김희철, 임도빈, 박정흠, "다차원 토러스 네트워크의 고장지름과 서로소인 경로들", 한국정보과학회 논문지 A, Vol.34, No.5, pp. 176-186, 2007.
[19] A. Ghafoor, "Partitioning of Even Networks for Improved Diagnosability," IEEE Trans. Reliability, Vol.39, No.3, pp. 281-286, 1990.

김 종 석
정보과학회논문지 : 시스템 및 이론
제 35 권 제 7 호 참조

이 형 옥
정보과학회논문지 : 시스템 및 이론
제 35 권 제 8 호 참조