속도 함수를 가지는 기계들에 이기적 에이전트 스케줄링

(Scheduling Selfish Agents on Machines with Speed Functions)

김 재 훈 †
(Jae-Hoon Kim)

요 약 우리는 이기적이고 비협조적인 사용자들이 이용하는 시스템의 성능을 최적화하는 문제를 다룬다. 사용자들이 요구하는 작업들은 각각의 속도함수를 가지고 있는 기계들에 스케줄 된다. 여기서 속도함수는 기계에 할당된 작업량에 반비례한다. 시스템의 성능은 기계들이 할당된 작업들의 수행을 끝내는 완료시간의 최대값으로 평가한다.

이기적인 사용자들은 자신의 작업이 수행될 기계를 고를 수 있고 현재 가장 빠른 기계를 고른다. 그러나 이러한 스케줄은 시스템의 성능을 최적화하지 못한다. 사용자들의 이기적인 행동으로 발생되는 시스템의 성능 저하를 측정하는 기준으로서 *Price of Anarchy*(PoA)가 소개되었다[1]. 이것은 내쉬 평형의 비용과 최적의 비용의 비율로 정의된다. 이 논문에서 우리는 위 스케줄링 문제에 대한 PoA를 평가한다.

키워드 : 스케줄링, 이기적인 사용자, 내쉬 평형, Price of Anarchy

Abstract We consider the problem of optimizing the performance of a system shared by selfish non-cooperative users. In this problem, small jobs which the users request should be scheduled on a set of shared machines with their speed functions, each of which dependson the amount of jobs allocated on a machine. The performance of the system is measured by the maximum of the completion times when the machines complete the jobs allocated on them.

The selfish users can choose a machine on which their jobs are executed, and they choose the fastest machine. But it typically results in suboptimal system performance. The *Price of Anarchy*(PoA) was introduced as a measure of the performance degradation due to the user's selfish behavior[1]. The PoA is the worst-case ratio of the cost of a Nash equilibrium to the optimal cost. In this paper, we estimate the PoA for the above scheduling problem.

Key words : scheduling, selfish users, Nash equilibrium, Price of Anarchy

1. 서 론

시스템의 자원을 효율적으로 관리하는 것은 시스템의 성능 향상을 위해서 필요한 중요한 문제 중 하나이다. 이러한 문제의 일반적인 모델이 기계(machine)들이 주어지고 기계가 수행할 작업들이 주어질 때, 각 작업들이 수행될 기계를 결정하고 작업들의 실행 순서를 결정하는 것이다. 특히 본 논문에서는 각 기계에 작업들을 수행하는 속도가 주어지고, 이 속도는 기계에 할당된 작업량에 반비례하는 함수로 주어진다. 그리고 각 기계가 할당된 모든 작업들의 수행을 끝내는 시간, 다시 말해, 완료시간(completion time)의 최대값이 최소가 되도록 작업들을 할당한다.

인터넷과 광역 통신 네트워크와 같은 시스템에서는 작업들을 할당하는 중앙 통제 시스템이 존재하지 않는다. 각각의 시스템 사용자들은 이기적인(selfish) 방식으로 행동한다. 따라서 이러한 시스템에서 사용자들의 행동을 모델링하는데 비협조적 게임(non-cooperative game) 모델 또는 내쉬 평형(Nash equilibrium) 모델이

· 이 논문은 2007학년도 부산외국어대학교 학술연구 조성비에 의해서 연구되었음

† 종신회원 : 부산외국어대학교 컴퓨터공학부 교수
jhoon@pufs.ac.kr

논문접수 : 2007년 12월 10일
심사완료 : 2008년 6월 13일

연구되었다.

본 논문에서 각 작업은 수행될 기계를 자신이 직접 선택하고 할당된다. 이 때, 각 작업은 이미 기계에 할당된 작업량을 보고 기계의 속도를 계산해서 속도가 가장 빠른 기계를 선택한다. 이런 문제의 답을 설명하는데 가장 잘 사용되는 개념이 내쉬 평형이다. 내쉬 평형 상태란 모든 작업들이 현재 할당된 기계에서 다른 기계로 옮겨가더라도 실행될 속도가 향상되지 않는 상태를 말한다. 이런 내쉬 평형에 의해서 얻은 작업들의 할당은 일반적으로 최적의 작업 할당이 아니다. 다시 말해, 기계들의 완료시간의 최대값을 최소화하지 못한다. 이것은 각 작업들이 자기 자신의 이익만을 보고 이기적으로 행동하기 때문이다. 이러한 이기적인 행동에 의한 시스템 성능의 저하를 측정하는 도구로서 *Price of Anarchy* (PoA)라는 개념이 소개되었다[1]. PoA는 최악의 경우(worst-case) 내쉬 평형 비용 대 최적 비용의 비율이다. 본 문제에서의 PoA는 내쉬 평형의 작업 할당에서 기계들의 완료시간의 최대값과 이 최대값을 최소화하는 최적 할당에서의 완료시간의 최대값의 비율을 말한다. 우리의 관심은 이 PoA 값이 얼마나 되는 가이다.

이전 연구들에서는 각 기계의 완료시간이 할당된 작업량에 비례하는 함수로서 주어졌다. 그리고 동일한 기계에 할당된 작업들은 모두 같은 완료시간에 수행이 끝난다고 가정하고 각 작업들은 이 완료시간이 최소가 되는 기계를 선택한다. 이러한 가정은 각 기계가 Round Robin 방식으로 작업들을 수행하고 있다면 맞지만 일반적으로는 성립되지 않는다. 따라서 본 논문에서는 각 기계에 할당된 작업량에 반비례하는 속도함수가 주어지고, 각 작업들은 자신의 수행이 언제 끝나는지 알지 못하지만 각 기계의 속도는 알 수 있어서 속도가 가장 빠른 기계를 선택한다고 가정한다. 이러한 새로운 가정은 기존 모델과 다른 새로운 모델을 제안한다.

우리의 문제는 특정한 네트워크 모델에 대응된다. 소스(source)와 싱크(sink) 두 노드가 존재하고 두 노드를 m개의 링크가 연결하는 네트워크를 생각해 보자. 이 때, 우리 모델의 기계는 링크에 대응되고 작업들은 소스에서 시작해서 싱크로 흐르는 흐름(flow)에 대응된다. 우리는 각 작업들의 작업량이 모두 일치하고 아주 작다고(infinitesimal) 가정한다. 따라서 작업들을 흐름에 대응할 수 있고, 기계에 할당된 작업량을 링크에 흐르는 흐름의 량에 대응할 수 있다. 그리고 기계의 작업 완료시간을 흐름이 소스에서 시작해서 링크를 따라 싱크에 도착한 시간에 대응할 수 있다.

1.1 관련연구

Koutsoupias와 Papadimitriou[1]는 PoA의 개념을 최초로 소개하였다. 그들은 각 작업의 작업량이 임의로 주어지는 경우에 기계들의 완료시간의 최대값을 최소로 하는 스케줄에 대해서 연구하였다. 이 모델을 atomic 모델이라고 한다. 그리고 내쉬 평형의 스케줄과 최적 스케줄의 성능 비율을 계산하고 이 비율을 PoA 라고 불렀다. 이 연구 이후에 atomic 모델에 대한 연구가 계속해서 이루어져 왔다[2-6].

작업들의 작업량이 모두 같고 작업량의 크기가 아주 작은(infinitesimal) 경우를 non-atomic 모델이라고 한다. Roughgarden과 Tardos[7]는 일반적인 네트워크상에서의 흐름 트래픽의 PoA를 생각하였다. 또한 Roughgarden[8]은 트래픽의 일정 부분을 중앙에서 통제할 수 있는 경우의 모델을 제안하였고 이런 경우에 PoA를 고려하였다. 하지만 이 논문들에서는 기계의 작업량에 비례하는 함수로서 완료시간이 주어지고 동일한 기계에 할당된 작업들은 모두 같은 완료시간에 수행이 끝난다고 가정한다. 본 논문에서는 이전 모델과 다른 새로운 모델을 제안한다.

2. 모델

우리는 각 에이전트들이 요구하는 작업들을 수행하는 m개의 기계를 가지고 있다. 여기서 각 기계 i는 기계에 할당된 작업량 x_i의 함수인 속도 $s_i(x_i)$를 가진다. 속도함수 s_i는 양의함수, 계속함수, 그리고 감소함수라고 가정한다. 에이전트들에 의해서 요구되는 총 작업량을 r이라고 하면, 작업들이 기계에 할당된 결과 $x = (x_1, \ldots, x_m)$에 대해서 $\sum_{i=1}^{m} x_i = r$ 을 만족한다. 그리고 각 기계 i가 할당된 작업들을 마치는 완료시간 C_i는 $C_i = \frac{x_i}{s_i}$ 로 주어진다. 우리가 기계의 속도함수 $s_i(x_i)$의 역수함수 $\frac{1}{s_i(x_i)}$ 를 $\ell_i(x_i)$ 로 나타낸다고 하면, $C_i(x_i) = x_i \ell_i(x_i)$ 로 주어진다. 우리는 시스템의 성능을 평가하는 기준으로서 완료시간의 최대값 $\max_i C_i(x_i)$ 를 사용할 것이다.

본 논문에서 우리는 속도의 역수함수 $\ell_i(x_i)$ 가 작업량 x_i에 비례하는 경우, 다시 말해, 적당한 상수 a_i 에 대해서 $\ell_i(x_i) = a_i x_i$ 로 주어지는 경우를 다룬다.

3. PoA 의 계산

본 장에서는 각 기계의 속도의 역수함수 $\ell_i(x_i) = a_i x_i$ 가 주어지는 경우에 PoA가 얼마나 되는지 계산할 것이다. 이를 위해서 먼저 PoA의 상한을 생각한다.

우선 아래의 보조정리에서 내쉬 평형에서의 작업들의

할당 $\bar{x}$를 구한다.

보조정리 1. 작업들의 할당 $\bar{x}=(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_m)$가 내쉬 평형을 이룬다고 하면, $\bar{x}_i=\frac{r}{a_i}\cdot\frac{1}{\alpha},\forall i$. 여기서, $\alpha=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_m}$.

증명. $\bar{x}=(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_m)$가 내쉬 평형을 이룬다고 하면, $\ell_i(\bar{x}_i)=\ell_j(\bar{x}_j),\forall i,j$. 다시 말해서, $a_1\bar{x}_1=a_2\bar{x}_2=\dots=a_m\bar{x}_m$을 만족한다. 이 공통의 값을 $k=a_1\bar{x}_1=a_2\bar{x}_2=\dots=a_m\bar{x}_m$라고 하면, 각각의 $\bar{x}_i$는 $\bar{x}_i=\frac{k}{a_i}$로 주어진다. 그러면 $\bar{x}_i$들은 $\bar{x}_1+\bar{x}_2+\dots+\bar{x}_m=r$을 만족해야 함으로 $\frac{k}{a_1}+\frac{k}{a_2}+\cdots+\frac{k}{a_m}=r$을 얻을 수 있다. 이로부터 $k=\frac{r}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_m}}$ 임을 알 수 있다. 따라서 $\bar{x}_i=\frac{r}{a_i}\cdot\frac{1}{\alpha}$. □

기계들의 완료시간의 최대값을 최소로하는 최적의 할당 x^*를 생각해보자. 보조정리 2는 이 최적 할당의 필요충분 조건을 설명한다. 이것은 각 기계의 완료시간이 모두 같아지는 할당을 말한다.

보조정리 2. $x^*=(x_1^*,\dots,x_m^*)$가 최적해일 필요충분 조건은 $C_i(x_i^*)=C_j(x_j^*),\forall i,j$.

이와 같은 최적의 할당 x^*를 구하면 다음과 같다.

보조정리 3. $x^*=(x_1^*,\dots,x_m^*)$가 최적해이면, $x_i^*=\frac{r}{\sqrt{a_i}}\cdot\frac{1}{\beta},\forall i$.

여기서, $\beta=\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_m}}$.

증명. $x^*=(x_1^*,\dots,x_m^*)$가 최적해라고 하면, 보조정리 2에 의해서 $C_i(x_i^*)=C_j(x_j^*),\forall i,j$. 다시 말해서, $a_1(x_1^*)^2=a_2(x_2^*)^2=\dots=a_m(x_m^*)^2$을 만족한다. $h^2=a_1(x_1^*)^2=a_2(x_2^*)^2=\dots=a_m(x_m^*)^2$라고 하면, 각각의 x_i^*는 $x_i^*=\frac{h}{\sqrt{a_i}}$로 주어진다. $x_1^*+x_2^*+\dots+x_m^*=r$을 만족해야 함으로 $\frac{h}{\sqrt{a_1}}+\frac{h}{\sqrt{a_2}}+\cdots\frac{h}{\sqrt{a_m}}=r$을 얻을 수 있다. 이로부터 $h=\frac{r}{\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_m}}}$ 임을 알 수 있다. 따라서 $x_i^*=\frac{r}{\sqrt{a_i}}\cdot\frac{1}{\beta}$. □

위의 보조정리들에서 구한 내쉬 평형의 할당 $\bar{x}$와 최적의 할당 x^*를 이용해서 PoA의 상한을 구해보자.

정리 2. m개의 기계가 존재하고 속도의 역수함수 $\ell_i(x_i)=a_ix_i$가 주어질 때, $a_1\le a_2\le\dots\le a_m$이면, $PoA\le\min\{m,\frac{a_m}{a_1}\}$.

증명. $(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_m)$가 내쉬 평형을 이루고, $k=\ell_i(\bar{x}_i)=\ell_j(\bar{x}_j),\forall i,j$이라고 하면, 보조정리 1의 증명에서, $\bar{x}_i=\frac{k}{a_i}$이고 $k=\frac{r}{\alpha}$. 여기서 $\alpha=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_m}$. 따라서 $\max_i C_i(\bar{x}_i)=\max_i\bar{x}_i\ell_i(\bar{x}_i)=\max_i\frac{k}{a_i}\cdot k=\frac{k^2}{a_1}=\frac{1}{a_1}\cdot\frac{r^2}{\alpha^2}$.

$(x_1^*,\dots,x_m^*)$가 최적해이고 $h^2=x_i^*\ell_i(x_i^*)=x_j^*\ell_j(x_j^*),\forall i,j$라고 하면, 보조정리 3의 증명에서 $x_i^*=\frac{h}{\sqrt{a_i}}$이고 $h=\frac{r}{\beta}$. 여기서 $\beta=\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_m}}$. 따라서 $\max_i C_i(x_i^*)=\max_i x_i^*\ell_i(x_i^*)=h^2=\frac{r^2}{\beta^2}$.

결과적으로 $PoA=\frac{\max_i C_i(\bar{x}_i)}{\max_i C_i(x_i^*)}=\frac{1}{a_1}\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$. 상수 b_i를 $b_i=\frac{1}{\sqrt{a_i}},\forall i$이라고 하면, $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{b_1+b_2+\dots+b_m}{b_1^2+b_2^2+\dots+b_m^2}$을 만족한다.

여기서 $\frac{\beta}{\alpha}$의 상한을 구해보자. Cauchy-Schwartz 방정식에 의해서, $b_1+b_2+\dots+b_m\le\sqrt{b_1^2+b_2^2+\dots+b_m^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+\dots+1^2}=\sqrt{m}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\dots b_m^2}$.

따라서 $\frac{\beta}{\alpha}\le\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+\dots+b_m^2}}$. 위의 식으로부터,

$$PoA = \frac{1}{a_1}\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \le \frac{1}{a_1}\cdot\frac{m}{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_m^2} = \frac{m}{\frac{a_1}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_1}{a_m}}.$$

$\frac{a_1}{a_i} \ge \frac{a_1}{a_m}, \forall i$ 이기 때문에 $PoA \le \frac{m}{m\cdot\frac{a_1}{a_m}} = \frac{a_m}{a_1}$.

또한 $\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_m^2} \ge b_1$ 이기 때문에, $\frac{\beta}{\alpha} \le \frac{\sqrt{m}}{b_1}$.

따라서 $PoA = \frac{1}{a_1}\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \le m$.

위의 결과들로부터 $PoA \le \min\{m, \frac{a_m}{a_1}\}$. □

다음으로 우리는 PoA의 하한을 보임으로서 위에서 구한 상한이 최적임을 보일 것이다.

정리 3. m개의 기계가 존재하고 속도의 역수함수 $\ell_i(x_i) = a_i x_i (a_1 \le \ldots \le a_m)$가 주어질 때,

$$PoA = \Omega(\min\{m, \frac{a_m}{a_1}\}).$$

증명. $a_1 = \frac{1}{m-1}$, $a_2 = \ldots = a_m = 1$로 주어지는 경우를 생각해 보자. 그러면 $\frac{a_m}{a_1} = m-1$. $b_i = \frac{1}{\sqrt{a_i}}, \forall i$ 라고 하면, 위 정리 2의 증명에서,

$$PoA = \frac{1}{a_1}\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = b_1^2\cdot\left(\frac{b_1+b_2+\ldots+b_m}{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_m^2}\right)^2 = \left(\frac{b_1(b_1+b_2+\ldots+b_m)}{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_m^2}\right)^2.$$

따라서

$$PoA = \left(\frac{\sqrt{m-1}(\sqrt{m-1}+m-1)}{(m-1)+(m-1)}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{m-1}+1}{2}\right)^2 = \Theta(m).$$

□

4. 결 론

본 논문에서는 이기적으로 행동하는 사용자가 요구하는 작업들이 시스템의 성능을 저하하는 정도를 분석하였다. 최근 들어 전산학에 게임이론(game theory)의 개념들을 적용해서 새로운 모델을 만들고 새로운 분석 방법을 제시하는 연구들이 활발히 이루어지고 있다[9-12]. 앞으로도 게임이론 분야의 개념과 결과들이 전산학의 여러 문제들에 적용되고 연구될 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

[1] E. Koutsoupias and C. Papadimitriou.. "Worst-case equilibria," In Proc. of 16th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, 404-413, 1999.

[2] S. Aland, D. Dumrauf, M. Gairing, B. Monien, and F. Schoppmann. "Exact price of anarchy for polynomial congestion games," In Proc. of 23th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, 218-229, 2006.

[3] B. Awerbuch, Y. Azar, and A. Epstein. "The price of routing unsplittable flow," In Proc. of 37th ACM Symposium on Theory of Computing, 57-66, 2005.

[4] G. Christodoulou and E. Koutsoupias. "The price of anarchy of finite congestion games," In Proc. of 37th ACM Symposium on Theory of Computing, 67-73, 2005.

[5] M. Gairing, T. Lucking, M. Mavronicolas, B. Monien, and M. Rode. "Nash equilibria in discrete routing games with convex latency functions," In Proc. of 31th Int. Colloquium on Automata, Languages and Programming, 645-657, 2004.

[6] T. Lucking, M. Mavronicolas, B. Monien, and M. Rode. "A new model for selfish routing," In Proc. of 21th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, 547-558, 2004.

[7] T. Roughgarden. "Stackelberg scheduling strategies," SIAM Journal on Computing, 33(2):332-350, 2004.

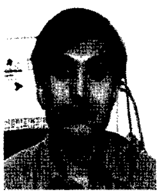
[8] T. Roughgarden and E. Tardos. "How bad is selfish routing?," Journal of ACM, 49(2):236-259, 2002.

[9] A. Archer and E. Tardos. "Truthful mechanisms for one-parameter agents," In Proc. of 42nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 14-17, 2001.

[10] A. Goldberg, J. Hartline, and A. Wright. "Competitive auctions and digital goods," In Proc. of 12th ACM Sym. of Discrete Algorithms, 735-744, 2001.

[11] J. Feigenbaum, C. Papadimitriou, and S. Shenker. "Sharing the cost of multicast transmissions," Journal of Computer and System Sciences, 63(1): 21-41, 2001.

[12] N. Nisan and A. Ronen. "Algorithmic mechanism design," In Proc. of 31th ACM Symposium on Theory of Computing, 129-140, 1999.



김 재 훈

1990년 3월~1994년 2월 서강대학교 수학과(학사). 1994년 3월~1996년 2월 KAIST 수학과(석사). 1996년 9월~2003년 2월 KAIST 전산학과(박사). 2003년 3월~현재 부산외국어대학교 컴퓨터공학부 조교수. 관심분야는 온라인 알고리즘, 스케줄링