한국시뮬레이션학회 논문지
Vol. 17, No. 4, pp. 241-247 (2008. 12)

M/D/1/K 대기행렬에서의 차단확률

서동원[1†]

Blocking Probability in an M/D/1/K Queue

Dong-Won Seo

ABSTRACT

In this study we consider an M/D/1 queue with a finite buffer. Due to the finiteness of the buffer capacity arriving customers can not join the system and turn away without service when the buffer is full. Even though a computational method for blocking probabilities in an M/D/1/K queue is already known, it is very complex to use. The aim of this study is to propose a new way to compute blocking probability by using (max,+)-algebra. Our approach provide a totally different and easier way to compute blocking probabilities and it is, moreover, immediately applicable to more generous queueing systems.

Key words : Blocking probability, Finite buffer, (Max,+)-algebra, (Max,+)-linear systems

요 약

본 연구에서는 하나의 포아송 도착과정(Poisson Arrival Process)과 상수(constant) 서비스 시간을 갖는 유한 버퍼(finite buffer) 대기행렬을 분석 대상으로 한다. 유한 버퍼로 인한 차단현상으로 도착하는 고객이 시스템에 진입하지 못하고 시스템을 떠나게 된다. 이러한 M/D/1/K 대기행렬에서 차단확률(blocking probability)의 계산방법은 이미 연구되어있지만, 계산과정이 매우 복잡하다. 본 연구에서는 (max,+)-대수를 이용하여 차단확률을 도출하는 새로운 방법을 제안하고자 한다. 제안된 방법은 기존 연구결과보다 쉽게 차단확률을 계산할 수 있을 뿐만 아니라 보다 복잡한 대기행렬 망에서의 차단확률을 구하는데도 응용될 수 있을 것이다.

주요어 : 차단확률, 유한 버퍼 대기행렬, (Max,+)-대수, (Max,+)-선형 시스템

1. 서 론

통신시스템과 생산(제조)시스템에서 시스템의 성능과 효율, 비용, 품질과 같은 시스템 운영 특성치를 분석하기 위한 다양한 분석방법이 꾸준히 연구되어왔다. 특히, 시스템의 확률적 행태(stochastic behaviors)를 분석하기 위해 대상 시스템의 운영 특성치를 확률변수들의 함수로 표현하고, 이를 적절한 방법으로 분석하여 운영 특성치를 구하는 보편적인 방법이 대기행렬 이론(Queueing Theory)이다. 일반적으로 시스템 설계나 관리 및 운영의 관점에서 주로 안정대기시간의 평균과 고차평균, 평균 체재시간, 생산율, 안정상태확률, 차단확률과 같은 다양한 확률적 특성치들을 분석 대상으로 하여왔다. 그러나 분석대상 시스템의 규모가 크거나 복잡한 구조를 가지면, 잘 알려진 기존의 전형적인 대기행렬 이론은 더 이상 적절한 분석방법을 제공하지 못한다.

본 연구에서는 기존연구에서의 분석대상에 대한 제약을 극복하기 위해, 최근 활발히 연구되고 있는 분석방법인 (max,+)-대수(algebra)를 이용하여 대기행렬 시스템의 확률적 운영 특성치를 분석하고자한다. (Max,+)-대수를 이용한 분석방법은 기존 분석방법과 달리 (max,+)-선형 시스템에 속하는 다양한 대기행렬 망(network)에서의 확률적 운영 특성치에 대한 분석을 가능하게 한다. 시스템

* 이 논문은 2008년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음(KRF-2008-331-D00691)
2008년 11월 18일 접수, 2008년 11월 30일 채택
1) 경희대학교 국제경영학부
주 저 자 : 서동원
교신저자 : 서동원
E-mail; dwseo@khu.ac.kr

의 확률적 운영 특성치가 '최댓값(maximum)'과 '합(sum)', 이 두 개의 연산자만을 이용한 확률변수들의 선형함수로 표현되는 시스템을 (max,+)-선형 시스템이라 한다. 다시 말하면, (max,+)-선형 시스템은 단일서버로 구성된 단일 또는 다수의 노드(nodes)로 구성된 망으로, 시스템에 도착하는 고객은 고정된(predetermined) 경로를 따라 이동하는 선택불가(choice-free)형 망이다. 또한, 고객은 각 노드에서 서버로부터 선착순규칙(FIFO)에 따라 제공되는 서비스를 받는 시스템으로 고객들 간의 추월이 허용되지 않는 추월불가(non-overtaking)형 망이다. (Max,+)-선형 시스템은 확률적 페트리 넷(stochastic or Timed Petri Net)의 특정 형태인 확률적 이벤트 그래프(stochastic or Timed Event Graph)를 이용하여 적절하게 도식적으로 표현될 수 있으며, 이는 시스템의 확률적 행태의 이해를 보다 수월하게 한다. 생산(제조)시스템과 통신시스템에서 흔히 볼 수 있는 칸반(Kanban) 시스템, 유한 또는 무한 버퍼를 갖고 다양한 차단규칙을 따르는 일렬대기행렬(tandem queues) 망, 분리/접합형과 같은 조립형(assembly) 대기행렬 망 등이 (max,+)-선형 시스템에 포함된다.

현존하는 대부분의 시스템은 단일 또는 다수의 노드로 구성되어 있으며, 망을 구성하는 각 노드는 유한(finite) 크기의 버퍼를 갖는다. 버퍼의 유한성(finiteness)이 망을 구성하는 노드간의 고객의 이동에 있어 차단현상을 유발하여, 시스템의 확률적 운영 특성치에 대한 분석을 매우 어렵고 복잡하게 만든다. 이러한 이유로, 많은 연구에서 무한(infinite) 크기의 버퍼를 가정하거나, 매우 제한적이거나 매우 작은 규모의 대기행렬 망을 분석대상으로 하여 왔다. 예를 들면, 각 노드에서의 서비스 시간 분포로 지수분포 또는 단계형(phase-type)분포를 가정하거나, 무한 버퍼 또는 크기 1인 유한 버퍼이면서 2～3개의 노드로 구성된 매우 제한적이고 비현실적인 대기행렬 시스템을 가정하였다. 보다 일반적인 유한 버퍼 일렬대기행렬 망에 대한 연구에서는 시스템 운영 특성치의 평균 또는 이에 대한 근사치를 분석에 국한되어있다.

보다 현실적이고 일반적인 대기행렬 망에서의 운영 특성치를 정확하게 분석하기 위해서는 처음 노드를 포함한 모든 노드에서 유한 크기의 버퍼를 갖는 대기행렬 망을 대상으로 하여야한다. 그러나 비교적 간단한 모형인 일렬대기행렬 망에서조차 유한 버퍼(처음 노드는 무한)의 경우에는 시스템 전체 또는 일부의 대기시간에 관한 정확한 분석결과는 찾아보기 어렵다. 더욱이 처음 노드를 포함해 대기행렬 망 내의 모든 노드가 유한 버퍼를 갖는 시스템에 대한 분석은 되어있지 않다. 이러한 일련의 연구의 첫 단계로 본 연구에서는 유한 버퍼 시스템의 간단한 모형인 단일 노드 모형을 대상으로 (max,+)-대수를 이용한 분석 방법이 유효함을 검증하고자 한다. 앞서 언급한 바와 같이, 유한 버퍼 대기행렬 망의 분석에 있어 어려움은 유한 버퍼로 인한 차단현상에 있다. 즉, 이러한 차단현상을 정확히 표현할 수 있는 방법을 찾아 시스템 외부로부터의 입력을 적절히 보정해 줄 수 있다면, 보다 일반적인 유한 버퍼 대기행렬 망의 운영 특성치에 대한 분석이 가능할 것이다. 단일 노드 대기행렬에서의 차단확률에 대한 결과는 이미 알려져 있지만, 계산이 복잡하고 단일 노드 모형에 국한된 결과로 보다 일반적인 다노드 모형에 응용될 수 없는 단점을 가지고 있다. 반면에 본 연구에서 제안하고자 하는 (max,+)-대수를 이용한 결과는 유한 버퍼 다노드 대기행렬 망에 응용 가능하며 안정대기시간에 대한 고차평균을 포함한 다양한 시스템 운영 특성치의 분석에 응용 가능할 것이다.

(Max,+)-대수와 (max,+)-선형 시스템에서의 대기시간에 대한 보다 자세한 내용은 Baccelli 등 (1992, 1996, 1998)과 Ayhan 등 (2001, 2002)를 참조하기 바란다. 이 논문은 다음과 같이 구성되어있다. 2절은 본 연구에서 사용하는 분석방법인 (max,+)-대수와 (max,+)-선형 시스템에서 대기시간에 대한 표현식에 관한 간단한 소개와 선행 연구결과를 포함하고 있다. 3절에서 연구결과인 차단확률의 계산을 위한 새로운 방법을 제안하고, 제안된 방법의 수리적 검증은 4절에 있다. 마지막 5절에서 결론 및 추후 연구에 대해 언급한다.

2. (Max,+)-선형 시스템에서의 대기시간

먼저 개방형 (max,+)-선형 시스템 내의 한 노드에서 n번째 고객의 서비스 시작시점 X_n과 $n+1$번째 고객의 서비스 시작시점 X_{n+1}간의 관계를 살펴보자. 대기행렬 망의 각 노드에서 서비스 시작시점의 임의벡터(random vectors)수열 $\{X_n\}$은 (max,+)-대수를 이용하여 다음과 같은 회귀식(recursive equation)으로 표현될 수 있다[4].

$$X_{n+1} = A_n \otimes X_n \oplus B_{n+1} \otimes T_{n+1} \tag{1}$$

식 (1)에서 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$는 안정임의행렬(stationary random matrices)이고, 이 임의행렬의 원소들은 고객들의 각 노드에서 서비스시간 확률변수들의 선형 함수로 표현된다. $\{T_n\}$은 실수 값을 갖는 증가수열(increasing sequence)이며, 도착과정 분포에 따른 도착시간을 나타낸다. 예를

들어 (max,+)-선형 시스템 대기행렬 망이 α개의 노드로 구성되어 있다면, 임의행렬 A는 $\alpha\times\alpha$이고, 임의행렬 B는 $\alpha\times 1$인 행렬이다. (Max,+)-대수 연산자인 $\otimes$(o-times)와 $\oplus$(o-plus)는 각각 합(sum)과 최대치(maximum)를 의미한다. 따라서 $\{X_n\}=\left(X_n^1,X_n^2,\cdots,X_n^\alpha\right)$는 시스템의 n번째 도착고객이 노드 $i(i=1,2,\cdots,\alpha)$에서 서비스 시작 시점까지의 절대시간을 나타낸다. 이러한 절대시간은 도착 고객 수 n이 증가함에 따라 무한히 커지게 된다. 이러한 이유로 $W_n^i = X_n^i - T_n$와 같은 대기시간(n번째 고객의 시스템 도착시점부터 노드 i에서 서비스의 시작시점까지 시스템에 머문 시간)에 관심을 가지게 된다. 일반적으로 α가 2보다 큰 경우에 확률벡터 $W=\left(W^1,W^2,\cdots,W^\alpha\right)$의 간결한 표현식을 구하는 것은 매우 어렵다. 단일 노드인 경우, 즉 $\alpha=1$, 일시대기시간(transient waiting time)에 대한 회귀식은 잘 알려진 Lindley의 식과 같다.

Baccelli 등 (1996, 1998)는 $W^i=\lim_{n\to\infty}W_n^i$와 같은 분포극한값(convergence in distribution)이 존재하는 일정한 조건(certain condition)하에서, 안정대기시간(stationary waiting time)에 대한 분석도 같은 방법으로 도출 가능함을 보였다. 이러한 전개식은 유일해(unique solution)를 가지며, 그 해는 다음과 같은 서비스시간 확률변수의 회귀적 함수 형태를 갖는다.

$$W=D_0\oplus\bigoplus_{k\geq 1}C(-T_{-k})\otimes D_k \tag{2}$$

식 (2)에서 $k=0$이면 $D_0=B_0$이고, $k\geq 1$이면 임의벡터 D_k는 다음과 같이 정의된다.

$$D_k=\left(\bigotimes_{n=1}^{k}A_{-n}\right)\otimes B_{-k}$$

또한 식 (2)에서 $C(x)$는 행렬의 대각원소들이 $-x$인 대각행렬(diagonal matrix)이다. 임의벡터 D_k의 i번째 원소인 D_k^i는 이러한 개방형 (max,+)-선형 시스템 상응하는 task graph에서 맨 처음 노드에서 i번째 노드까지의 주공정시간(일종의 critical path time)을 나타낸다고 볼 수 있다. 즉, 확률벡터 D_k의 원소들은 고객들의 각 노드에서의 서비스시간 확률변수들만의 선형함수로 표현된다. 임의행렬 A_n의 각 원소는 비음(non-negative)이거나 $-\infty$이고, 모든 대각 원소는 모두 비음(non-negative)임을 가정한다.

더 나아가, 하나의 포아송 도착과정을 가지는 (max,+)-선형 시스템에서 안정대기시간의 특성치에 대해서도 다음과 같이 포아송 도착과정의 모수에 대한 테일러 시리즈 전개식으로 표현 가능함을 보였다[5,6]. 그들의 결과에 의하면 모든 $x(x\geq 0)$에 대해 비음이고, 적분가능하고, 유한(bounded)인 함수 $G(x)$가 $m+1$차까지 미분가능하다면, 노드 i에서의 시스템 안정대기시간 $W^i(i=1,2,\cdots,\alpha)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E\left[G\left(W^i\right)\right] = \sum_{k=0}^{m}\lambda^k E\left[q_{k+1}\left(D_0^i,D_1^i,\cdots,D_k^i\right)\right]+O(\lambda^{m+1})$$

여기서 다항함수 $q_k(\cdots)$는

$$\begin{aligned}&q_{k+1}\left(x_0,x_1,\cdots,x_k\right)\\&=\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}(-1)^{k-n}H^{[k]}\left(x_n\right)-\sum_{n=0}^{k-1}\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j}{n}(-1)^{j-n}H^{[j]}\left(x_n\right)\\&\quad\left\{p_{k-j}\left(x_{n+1},\cdots,x_{k-j+n}\right)-p_{k-j}\left(x_n,\cdots,x_{k-j+n-1}\right)\right\}\end{aligned}$$

로 정의되고, 다항함수 $p_k(\cdots)$는

$$\begin{aligned}&p_k\left(x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}\right)\\&=\sum_{(i_0,i_1,\cdots,i_{k-1})\in N_k}(-1)^{\gamma_k(i_0,i_1,\cdots,i_{k-1})}\frac{x_0^{i_0}}{i_0!}\frac{x_1^{i_1}}{i_1!}\cdots\frac{x_{k-1}^{i_{k-1}}}{i_{k-1}!}\end{aligned}$$

와 같다. 그리고

$$N_k=\left\{\begin{matrix}(i_0,i_1,\cdots,i_{k-1})\in\{0,1,\cdots\}^k: i_0+i_1+\cdots+i_{k-1}=k,\\ \text{if } i_s=l>1, i_{s-1\bmod k}=\cdots=i_{s-l+1\bmod k}=0\end{matrix}\right\}$$

이고, $k\geq 1$일 때 $\gamma_k(i_0,i_1,\cdots,i_{k-1})=1+\sum_{n=0}^{k-1}I(i_n>0)$이며, $I(x)$는 x이 참이면 1이고 x가 거짓이면 0을 갖는 표시함수(indicator function)이다. 다항함수 $q_k(\cdots)$의 정의에서 함수 $H(\cdot)$는 계산상의 복잡성을 줄이기 위해 구하고자 하는 특성치의 함수형태에 따라 적절하게 선택될 수 있다고 언급하였으며, 일반적으로 $H^{[0]}(x)=G(x)$, $H^{[n]}(x)=\int H^{[n-1]}(x)$와 같은 회귀적 형태를 가진다. 특히, $G(x)=x^\nu(\nu\in N)$이면 시스템 안정 대기시간에 대한 고차 평균에 대한 시리즈 전개식을 얻을 수 있다.

일반적으로 일시대기시간과 달리 특정서비스 시간분포를 갖는 경우 외에는 (max,+)-선형 시스템에서 안정대기시간에 대한 간결한 표현식은 구할 수 없다. 따라서 Ayhan 등 (2001, 2002), Seo (2005)는 시스템 안정대기시간에 대한 분석을 위해 다음 식 (3)를 만족하는 특정형태의 (max,+)-선형 시스템을 가정하였다.

$$D_m^i = \begin{cases} \eta_m^i & for\ m = 0, \cdots, \xi_i - 1 \\ \eta_{\xi_i}^i + (m - \xi_i)a_i & for\ m \geq \xi_i \end{cases} \quad (3)$$

상수 서비스시간을 갖는 모든 대기행렬 망이 식 (3)의 형태를 만족하지는 못하지만, 잘 알려진 확률적 시스템의 대부분은 이러한 가정을 만족한다. 식 (3)에서 $\eta_m^i (m = 0,1,\cdots,\xi_i)$는 상수, $0 \leq \eta_0^i \leq \eta_1^i \leq \cdots \leq \eta_{\xi_i}^i$이고, a_i는 실수이고, ξ_i는 비음인 정수이다. 또한 여기서 η_m^i, a_i와 ξ_i는 망의 관심 노드($i = 1,2,\cdots,\alpha$)에 따라 결정되는 값들이다.

Ayhan 등 (2001, 2002)는 이러한 특정형태의 (max,+)-선형 시스템에서 시스템 안정대기시간에 대한 고차평균, 라플라스변환(Laplace transform), 꼬리확률과 같은 시스템 특성치에 대한 간결한 표현식(closed-form expression)을 도출하였다. 또한 최근에 Seo (2005)는 2-노드 유한버퍼 일렬대기행렬 망(처음 노드는 무한)에서의 임의행렬 D_n^i에 대한 간결한 표현식을 도출하였다.

다음 절에서는 본 연구의 결과인 M/D/1/K 대기행렬에서의 차단확률을 구하는 새로운 방법을 제안을 소개하고자 한다.

3. M/D/1/K 모형과 차단확률

유한 버퍼 단일 노드 대기행렬에서는 도착하는 고객이 버퍼의 유한성으로 인해 시스템으로의 진입이 차단되어 서비스를 받지 못하고 시스템을 떠나게 된다. 이러한 버퍼의 유한성으로 인한 차단현상이 고객의 도착과정을 왜곡하여 수학적으로 분석가능하지 않은 모형으로 변하게 한다. 즉, 포아송 도착과정이 갖는 마코비안(Markovian) 시스템에서도 차단현상으로 인해 마코비안 성질을 잃어버리게 된다.

차단현상을 정확하고 쉽게 구할 수 있다면 유한 버퍼 대기행렬 망에 대한 분석이 용이할 것이다. 하지만, 아직은 단일 노드 대기행렬을 제외한 다노드 대기행렬 망에서의 차단현상을 정확하게 표현할 수 있는 일반적인 분석방법은 연구되어있지 않다. 단일 노드 대기행렬에서는 무한버퍼를 모형에서의 안정상태확률을 구한 후 유한 버퍼 모형의 안정상태확률과의 비례적 관계를 이용하여 회귀적 방법으로 차단확률을 구한다[1,8]. 이러한 방법은 일반적으로 복잡하고 어렵다. 무엇보다 기존의 분석방법은 다노드 대기행렬 망의 차단확률을 구하는 방법으로 확장될 수 없는 단점을 가지고 있다. 따라서 본 연구에서는 유한 버퍼

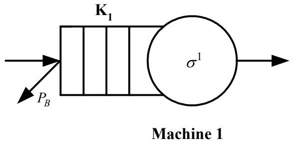

그림 1. 단일 노드 대기행렬($K=3$)

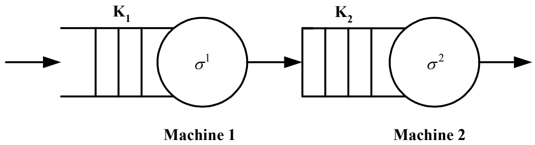

그림 2. 2-노드 일렬대기행렬 망($K=3$)

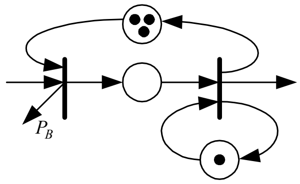

그림 3. 단일 노드 대기행렬($K=3$)

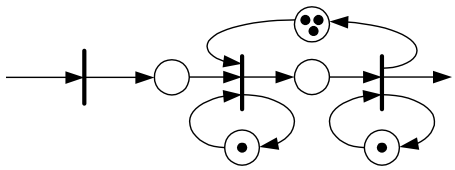

그림 4. 2-노드 일렬대기행렬 망($K=3$)

단일 노드 대기행렬을 대상으로 하여 다음과 같은 분석방법을 제안하고자 한다. 제안된 분석방법은 노드의 수와 무관하게 차단확률을 정확하게 계산할 수 있을 것으로 생각된다.

다음 그림 1은 M/G/1/K 모형에 대한 예제로 도착하는 고객이 시스템 안에 서비스 중인 고객을 포함하여 K명이상의 고객을 보는 경우에 시스템에 진입하지 못하고 시스템을 떠나는 모형에 대한 그림이다. 그림 2는 그림 1모형을 본 연구에서 제안한 방식에 따라 2개의 노드로 구성된 일렬대기행렬 망으로 도식화 한 것이다.

그림 3과 그림 4는 그림 1과 2에 대한 모형을 이벤트 그래프를 이용하여 표현한 것이다. 이벤트 그래프에서는 그림 3의 차단확률 P_B과 같은 선택적 경로를 허용하지 않지만, 여기서는 개념을 설명하기위해 추가한 것이다. 이와 같이 이벤트 그래프로 표현된 도식으로부터 (max,+)-대수를 이용하여 대기시간에 대한 표현식을 도출할 수 있다. 앞 절에서 소개한 임의행렬 D_n^i과 이를 이용한 꼬리

확률에 대한 표현식이 그 예가 될 수 있다[3,7].

일반적으로 M/G/1/K 대기행렬의 차단확률 P_B은 다음의 차단공식(blocking formula)로부터 구할 수 있다[8].

$$P_B = \frac{(1-\rho)E_K}{1-\rho E_K} \quad \text{where} \quad E_K = \sum_{j=K}^{\infty} \pi_j^{\infty} \tag{4}$$

여기서 차단확률 P_B는 도착고객이 시스템에 진입하지 못하고 시스템을 떠나는 확률이고, π_j^{∞}는 무한 버퍼를 갖는 M/G/1 대기행렬에서 시스템에 j명이 있을 임의시점 확률이다. 무한 버퍼를 갖는 M/G/1 모형에서 이탈시점의 확률은 Burke의 정리에 의해 도착시점 확률과 같고, 또한 PASTA에 의해 임의시점 확률과 같게 된다. 따라서 E_K는 시스템 내에 K명이상 있을 임의시점 확률이 된다. 그러나 M/M/1 대기행렬과 M/G/1 대기행렬 같이 마코비안 성질이 보장되는 경우 외에는 앞서 정의된 E_K값을 결정하는 것은 매우 어렵다. 그림 2를 보면 확률 E_K는 처음 노드의 서비스 시간이 0이고 두 번째 노드가 K개의 유한 버퍼를 갖는 경우에 처음 노드에서의 대기시간이 0보다 큰 경우와 동일한 사건의 확률로 해석될 수 있다. 그러므로 다음과 같이 E_K값을 계산하는 방법을 제안하고자 한다.

Lemma: 처음 노드는 무한 버퍼를 갖고 두 번째 노드는 K개의 유한 버퍼를 갖는 2-노드 유한 버퍼 일렬대기행렬 망에서, 처음 노드의 서비스 시간이 0이면 시스템에 도착하는 고객이 시스템 내에 K명이상이 있는 것을 보는 사건은 처음 노드에서의 안정대기시간이 0보다 클 사건과 동치이다. 즉, 다음의 등식이 성립한다.

$$E_K = \sum_{j=K}^{\infty} \pi_j^{\infty} = P(W^1 > 0) \qquad \blacksquare$$

위의 사실을 이용하여 본 연구에서는 상수 서비스시간을 갖는 단일 노드 유한 버퍼 대기행렬 모형인 M/D/1/K 대기행렬의 차단확률을 구하기 위해 다음의 방법을 제안하고자 한다. 제안된 방법은 일반적인 경우에도 응용가능할 것이지만 아직은 상수 서비스시간의 경우 외에는 임의행렬 D_n^i에 대한 간결한 표현식이 유도되어 있지 않아 응용이 제한적이다.

Proposition: 평균 λ인 포아송 도착과정을 따르는 유한 버퍼 단일 노드 대기행렬의 상수 서비스시간을 σ로, 유한 버퍼의 크기를 K라고 두자. 이때 시스템의 제공로드는 $\rho = \lambda\sigma$이다. 이 단일 노드 대기행렬의 앞에 서비스 시간이 0이고 버퍼의 크기가 무한인 가상노드(dummy node)를 추가하여 2-노드 일렬대기행렬 망으로 확장한다. 여기서 두 번째 노드의 서비스 시간과 버퍼의 크기를 단일 노드 대기행렬과 같게 둔다. 즉, $\sigma^1 = 0$, $\sigma^2 = \sigma$와 $K_1 = \infty$, $K_2 = K$이다. 또한, 제공로드는 1이 아님을 가정한다.

이렇게 확장된 2-노드 일렬대기행렬 망에서의 임의행렬 D_n^i에 대한 표현식(Seo 2005)과 안정 상태 대기시간의 꼬리확률에 대한 결과(Ayhan 등 2002)로부터 꼬리확률 $P(W^1 > 0)$을 구하고, 이를 Lemma에 따라 차단공식(식 (4))에 대입하면 다음과 같다.

$$P_B = \frac{(1-\rho)E_K}{1-\rho E_K}$$

$$\text{where} \quad E_K = \sum_{j=K}^{\infty} \pi_j^{\infty} = P(W^1 > 0). \qquad \blacksquare$$

단, 유한버퍼 대기행렬에서는 제공로드의 크기에 제한이 없지만, 여기서는 제공로드가 1인 경우에 꼬리확률이 정의되지 않기 때문에 제공로드가 1미만과 1초과인 경우로 제한하였다.

더 나아가 유도된 차단확률을 이용하여 시스템의 실행로드 $\acute{\rho} = \rho(1-P_B)$을 구하고, 이 실행로드를 무한 버퍼 대기행렬 망의 실행로드로 간주한다. 그러면 기존 연구의 결과(Ayhan 등 2001)에 따라 시스템의 각 노드에서 안정대기시간의 고차평균과 같은 시스템 운영 특성치를 구할 수 있을 것이다.

다음 절에서 제안된 방법의 정확성을 검증하기 위해 예제를 살펴보자.

4. 예 제

앞서 언급한 것과 같이, 포아송 도착과정의 모수를 λ로 M/D/1/K 대기행렬의 유한 버퍼의 크기를 K로, 상수 서비스 시간을 σ로 두자. 예제에서 λ는 1.0 또는 3.0으로 두었으며, 제공로드는 $\rho = \lambda\sigma$, 실행로드는 $\acute{\rho} = \rho(1-P_B)$가 된다. 다양한 크기의 버퍼에 대해서 Case 1 (표 1과 표 2)에서는 제공로드가 1미만인 경우를, Case 2에서는 제공로드가 1미만 또는 1초과인 경우를 고려하였으며, 제공로드가 1인 경우는 차단공식이 정의되지 않기 때문에 제외하였다. 단, 제공로드가 1보다 큰 경우에 제안된 방법으로 구한 $P(W^1 > 0)$는 1보다 큰 값을 가지게 되는데, 이 경우에 $P(W^1 > 0)$ 값에 대한 해석은 추후에 더 연구되어야 할 것이다.

i) case 1: when $\lambda = 1.0$, $\rho = \lambda\sigma < 1$,

표 1. 유한 버퍼와 제공로드에 따른 차단확률

K / σ	$K=1$		$K=2$		$K=3$	
	Exact Solution	Proposed Method	Exact Solution	Proposed Method	Exact Solution	Proposed Method
$\sigma=0.1$	0.0909091	0.0909091	0.00481413	0.00481413	0.000182614	0.000182614
$\sigma=0.3$	0.230769	0.230769	0.0392174	0.0392174	0.00560446	0.00560446
$\sigma=0.5$	0.333333	0.333333	0.0962745	0.0962745	0.0272422	0.0272422
$\sigma=0.7$	0.411765	0.411765	0.164289	0.164289	0.0723476	0.0723476
$\sigma=0.9$	0.473684	0.473684	0.234637	0.234637	0.138442	0.138442

표 2. 유한 버퍼와 제공로드에 따른 차단확률

K / σ	$K=5$		$K=7$		$K=10$	
	Exact Solution	Proposed Method	Exact Solution	Proposed Method	Exact Solution	Proposed Method
$\sigma=0.1$	1.58543e-007	1.58543e-007	1.13796e-010	1.13796e-010	1.55431e-015*	2.498e-015*
$\sigma=0.3$	9.32441e-005	9.32441e-005	1.49765e-006	1.49765e-006	3.05862e-009	3.05862e-009
$\sigma=0.5$	0.00217596	0.00217596	0.000175905	0.000175905	4.05716e-006	4.05716e-006
$\sigma=0.7$	0.0167069	0.0167069	0.00420517	0.00420517	0.000549591	0.000549591
$\sigma=0.9$	0.0643619	0.0643619	0.0355461	0.0355461	0.0166317	0.0166317

* 유효자리수(significant digits)를 벗어나는 매우 작은 값으로 정확한 값을 구하지 못함.

ii) Case 2: when $\lambda = 3.0$, $\rho = \lambda\sigma < 1$ or $\rho = \lambda\sigma > 1$

표 3. 유한 버퍼와 제공로드에 따른 차단확률

K / σ	$K=1$		$K=2$		$K=3$	
	Exact Solution	Proposed Method	Exact Solution	Proposed Method	Exact Solution	Proposed Method
$\sigma=0.1$	0.230769	0.230769	0.0392174	0.0392174	0.00560446	0.00560446
$\sigma=0.3$	0.473684	0.473684	0.234637	0.234637	0.138442	0.138442
$\sigma=0.5$	0.6	0.6	0.419661	0.419661	0.365012	0.365012
$\sigma=0.7$	0.677419	0.677419	0.550047	0.550047	0.528343	0.528343
$\sigma=0.9$	0.72973	0.72973	0.638625	0.638625	0.630385	0.630385

표 4. 유한 버퍼와 제공로드에 따른 차단확률

K / σ	$K=5$		$K=7$		$K=10$	
	Exact Solution	Proposed Method	Exact Solution	Proposed Method	Exact Solution	Proposed Method
$\sigma=0.1$	9.32441e-005	9.32441e-005	1.49765e-006	1.49765e-006	3.05862e-009	3.05862e-009
$\sigma=0.3$	0.0643619	0.0643619	0.0355461	0.0355461	0.0166317	0.0166317
$\sigma=0.5$	0.338449	0.338449	0.334213	0.334213	0.333397	0.333397
$\sigma=0.7$	0.523952	0.523952	0.523814	0.523814	0.52381	0.52381
$\sigma=0.9$	0.629635	0.629635	0.62963	0.62963	0.62963	0.62963

앞선 계산결과에서 알 수 있듯이, 제공로드가 1보다 작은 경우와 1보다 큰 경우(표에서 어둡게 처리된 부분) 모두에 대해서 정확한 차단확률을 구할 수 있다.

시스템 안정대기시간의 고차평균은 제안된 방법으로 차단확률 P_B와 실행로드 $\acute{\rho}=\rho(1-P_B)$을 구하면 기존 연구결과를 응용하여 구할 수 있을 것이다.

5. 결론 및 추후연구

기존연구에서 유한 버퍼 단일 노드 대기행렬인 M/D/1/K에서 차단확률에 대한 연구결과를 찾는 것은 어렵지 않지만, 이러한 차단확률을 얻기 위한 분석방법은 어렵고 복잡하다. 더욱이 다수의 노드로 구성된 보다 일반적인 대기행렬 망에는 응용될 수 없다는 단점을 가지고 있다. 본 연구에서는 이러한 단점을 극복하기 위한 한 방법으로 차단확률을 구하는 새로운 방법을 제시하였다. 다시 말하면, 본 연구에서 제시한 (max,+)-대수를 이용한 분석방법은 기존 연구와 같이 차단확률에 대한 간결한 표현식을 이끌어내지는 못하지만 수리적으로 동일한 결과를 얻을 수 있을 뿐만 아니라 기존 연구결과에 비해 응용이 용이하여 고차평균과 같은 시스템 운영 특성치의 분석에 사용될 수 있다.

동일한 분석방법이 다수의 노드로 구성된 일렬대기행렬 망은 물론 조립형 대기행렬 망에서의 차단확률을 구하는 데도 이용될 수 있을 것으로 믿는다. 또한, 실행로드가 1보다 큰 경우의 꼬리확률 값에 대한 의미 있는 해석이 필요하며, 규모가 큰 대기행렬 망에 대한 분석을 위해서는 꼬리확률 및 고차평균의 계산을 위한 보다 개선된 계산 알고리즘이 개발이 병행되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

1. 이호우 (2006), 대기행렬이론: 확률과정론적 분석, (주)시그마프레스, 3판.
2. Ayhan, H. and D-W. Seo (2001), "Laplace Transform and Moments of Waiting Times in Poisson Driven (Max,+)-Linear Systems" *QUESTA*, Vol. 37, No. 4, pp. 405-438.
3. Ayhan, H. and D-W. Seo (2002), "Tail Probability of Transient and Stationary Waiting Times in (Max,+)-Linear Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47, No. 1, pp. 151-157.
4. Baccelli, F., G. Cohen, G. J. Olsder, and J-P. Quadrat (1992), *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems*, John Wiley and Sons.
5. Baccelli, F., S. Hasenfuss, and V. Schmidt (1998), "Expansions for Steady State Characteristics in (Max,+) Linear Systems", *Stochastic Models*, Vol. 14, pp. 1-24.
6. Baccelli, F. and V. Schmidt (1996), "Taylor Series Expansions for Poisson Driven (Max,+) Linear Systems", *Annals of Applied Probability*, Vol. 6, No. 1, pp. 138-185.
7. Seo, D.-W. (2005), "Application of (Max,+)-algebra to the Waiting Times in Deterministic 2-node Tandem Queues with Blocking", *J. KORMS Society*, Vol. 30, No. 1, pp. 149-159.
8. Takagi H. (1993), *Queueing Analysis: Vol. II: Finite Systems*, North-Holland, Amsterdam.

서 동 원 (dwseo@khu.ac.kr)

1991 성균관대학교 산업공학과 학사
1996 성균관대학교 대학원 산업공학과 석사
2002 Georgia Institute of Technology, 산업공학 박사
2003～현재 경희대학교 국제경영대학 국제경영학부 조교수

관심분야 : 확률과정론, Series Expansion, (Max,+)-algebra, 시뮬레이션