한국학교수학회논문집 제 11 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 11, Number 3, 421-438, September 2008

구분구적법과 정적분의 개념 분석

신보미[1]

구분구적법에 대한 이해는 리만합의 극한으로 정의되는 정적분에 대한 이해의 기초가 된다. 그러나 선행연구는 구분구적법과 리만합의 극한으로서 정적분 개념에 대한 학생들의 이해에 여러 가지 한계가 있음을 지적하였다. 이 연구에서는 선행연구 분석을 통해 구분구적법의 개념 지도에 있어 크게 두 가지 어려움이 있음을 확인하였으며, 이를 개선하는데 기여할 만한 교수학적 시사점을 각각 기술하였다. 나아가 미국, 영국, 일본 교과서에 비추어 우리나라 교과서에서만 고유하게 다루어지는 정적분과 무한급수의 관계가 리만합의 극한이라는 정적분의 개념 지도에 있어 필수적인 내용 요소인지를 반성적으로 검토하였다.

주요용어 : 구분구적법, 정적분, 무한급수

Ⅰ. 서론

정적분은 극한을 통해 넓이를 구하는 과정이 발전하여 일반화된 개념이다(Varberg, Purcell, & Rigdon, 2003). 원의 넓이를 구하는데 극한을 도입한 아르키메데스의 방법을 현대화한 것이 구분구적법이며, 정적분은 구분구적법을 추상화한 리만합의 극한으로 정의된다(Larson, Hostetler, & Edwards, 2002). 즉, 정적분에 대한 이해는 구분구적법과 리만합의 극한에 대한 이해에 기반한다고 볼 수 있다[2]. 이러한 관점에서 현재 고등학교 수학 Ⅱ교과서에서는 정적분을 구분구적법을 통해 도입한다. 이후 정적분을 리만합의 극한[3]으로 정의한 다음 정적분과 원

1) 광주광역시교육정보원 (bomi0210@hanmail.net)
2) Bezuidenhout(2001)에 의하면 적분과 극한의 관계에 대한 이해는 미적분학의 아이디어를 학습하는데 주요한 토대가 된다.
3) 고등학교 수학 Ⅱ에서 다루는 정적분은 구간 $[a,\ b]$을 n등분한 소구간 $[x_{k-1},\ x_k]$의 양 끝점에 대한 함수값 $f(x_k)$에 의해 정의된다는 측면에서, 대학수학에서 정적분을 정의할 때 쓰이는 리만합의 극한과는 다소 차이가 있다. 그러나 주어진 함수가 연속함수인 경우에는 전자와 후자에 차이가 없으므로 이 논문에서는 학교 수학에서 다루는 정적분에 대한 다음 정의 중 우변의 식인 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$ 를 편의상

시함수의 관계에 대한 이해를 깊게 하기 위하여 '정적분과 무한급수'가 다루어진다. 이러한 전개 방식은 구분구적법에 대한 이해를 바탕으로 정적분을 다루고, 정적분과 원시함수의 관계를 통해 정적분 값을 쉽게 계산할 수 있음을 설명함으로써 미적분학의 기본정리가 지닌 가치를 간접적으로 살피고자 하는 교수학적 의도를 담고 있다.

그러나 선행 연구는 구분구적법의 개념과 리만합의 극한으로서 정적분의 개념에 대한 학생들의 이해에 여러 가지 한계가 있음을 지적하고 있다. Orton(1983)은 자신의 연구에 참여한 15세에서 22세 사이의 학생 대부분이 그래프 아래의 넓이가 수열의 극한값이 된다는 구분구적법의 아이디어를 충분히 이해하고 있지 못하였다고 설명하였다. Foley(1992)에 의하면 미적분학[4]을 수강한 대학생 대부분이 정적분과 넓이는 밀접한 관련이 있지만 정적분과 리만합의 극한은 개념적으로 거의 관계가 없다고 답하였다. 허학도(2006)의 연구에 참여한 대학생 40명 중 11명만이 정적분의 정의가 리만합의 극한이라고 하였다[5].

이 연구는 구분구적법과 정적분 개념에 대한 이해에 존재하는 위와 같은 어려움을 개선하는데 기여할 만한 교수학적 시사점을 찾는데 목적이 있다. 이를 위해 우선 정적분 개념 이해에 토대가 되는 구분구적법의 아이디어가 지닌 특징을 선행 연구와 국외 교과서 분석을 통해 기술한다. 또한 국외 교과서와 비교하여 우리나라 교육과정에서만 다루고 있는 정적분과 무한급수의 관계가 리만합의 극한으로서 정적분의 개념을 지도하는데 필수적인 내용 요소인지를 반성적으로 검토한다.

Ⅱ. 정적분과 구분구적법

학교 수학에서는 보통 정적분을 정의하기 앞서 구분구적법이 소개된다. 곡선 아래 영역의 넓이를 구할 때, 주어진 구간을 분할한 다음 분할 횟수에 분할된 직사각형들의 넓이의 합을 대응시키는 규칙으로 수열을 정의하여 그 수열의 극한값으로 넓이를 구하는 방법이 구분구적법이다. 이러한 관점에서 구분구적법에 의해 넓이를 구하는 맥락은 수열의 극한값을 구하는 과정과 같다고 볼 수 있다. 선행연구는 이러한 구분구적법의 지도와 관련된 어려움과 그 교수학적 이슈를 다음과 같이 지적하였다.

Cavalcante & Tocorov(2008)은 대학생조차도 구분구적법을 통해 구한 넓이가 수열의 극한값이라는 점을 충분히 이해하지 못한다고 설명하였다. Orton(1983)은 학생들이 구분구적법을 통해 구한 넓이가 수열의 극한값임을 알지 못하며 그 값이 구하고자 하는 넓이의 근사값인지 정확한 결과 값인지를 혼동한다고 하였다. Orton의 연구에 참여한 학생 110명 중 69명은 구분구적법에 의해서 구한 넓이는 정확한 값이 아니고 근사값이라고 설명하였다. 허학도(2006)에 의하면 대학생 40명중 16명만이 구분구적법을 통해 구한 넓이가 근사값이 아닌 정확한 결과 값임을 인식하

리만합의 극한이라고 부르기로 한다. : 함수 $f(x)$ 가 폐구간 $[a,\, b]$ 에서 연속일 때, a 에서 b 까지의 정적분은 $\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$ 이다(조태근 외, 2002, p. 133).

4) 일반 학과 성적이 우수한 공대생을 대상으로 한 강좌이다.

5) 서울특별시 소재 B대학교 과학교육계열 학생 40명을 대상을 지필검사를 실시한 결과이다.

였다.

Camacho, Depool, & Santos-Trigo(2004)는 구분구적법을 통해 넓이를 정확하게 계산하는 것 보다 구분구적법 개념에 대해 충실히 이해하는 것이 이후 정적분 학습에 보다 필수적이라고 지적하였다. Cavalcante & Tocorov(2008)는 구분구적법의 가장 주요한 아이디어는 곡선 아래 영역에 대한 상합(또는 하합)의 극한값이 구하고자 하는 넓이의 근사값이 아니라 정확한 결과 값임을 이해하는 것이라고 설명하였다. Akkoç, Yesildere, & Özmantar(2007)은 구분구적법을 지도하는 교수학적 맥락에서 다음 두 가지가 중요하게 다루어져 한다고 하였다. : 첫째, 극한을 통해 넓이를 정의하는 구분구적법의 타당성을 학생들이 인식하도록 한다. 둘째, 구분구적법을 통해 구한 결과가 넓이의 근사값이 아니고 정확한 결과 값 자체임을 알도록 한다.

이상에 따르면 학생들은 구분구적법에 의해서 구한 넓이가 수열의 극한값임을 충분히 이해하고 있지 못하며 그 값이 구하고자 하는 넓이의 정확한 결과 값임을 알지 못한다. 이하에서는 구분구적법을 통해 넓이를 수열의 극한값으로 정의하는 맥락의 타당성을 지도하는데 학교 수학에서 넓이를 다루는 관점의 변화가 존재함을 구체적으로 기술하는 것이 도움이 될 수 있음을 선행연구 및 국외 교과서 분석을 통해 살펴본다. 또한 이러한 분석을 토대로 구분구적법을 통해서 구한 넓이의 존재성과 함께 그 값이 근사값이 아닌 정확한 결과 값임을 지도하는데 상합과 하합이 유용하게 활용될 수 있음을 설명한다.

1. 구분구적법과 넓이를 다루는 관점의 변화[6)]

학교수학에서 넓이는 5-가 단계에서 본격적으로 도입되며, 도입 초기에는 $1cm^2$, $1m^2$ 인 단위 정사각형의 넓이에 대한 이해가 언급된다. 이 단계에서 넓이에 대한 정확한 정의가 내려지는 것은 아니지만 단위 정사각형이 설명되는 맥락에 비추어 볼 때 학교수학에서 다루는 넓이에 대한 초기 아이디어는 주어진 영역을 덮을 수 있는 단위 정사각형의 개수임을 유추할 수 있다.

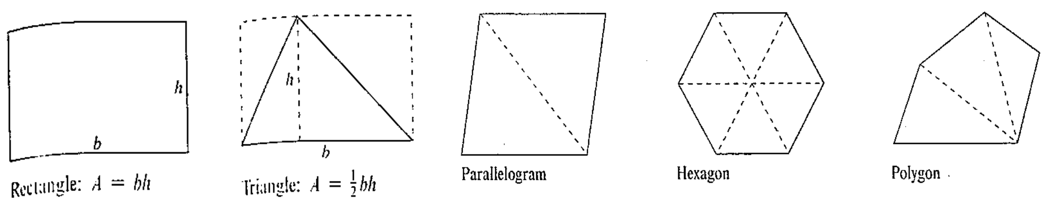
가장 단순한 상황에서, 주어진 도형의 넓이는 단위 정사각형이 덮을 수 있는(paving) 어떤 양을 1로 보았을 때 그 도형의 내부를 단위 정사각형으로 빈틈없이 덮어 몇 번 들어가는지 세는 것이다(Lewin, 2003: 271). 이 정의는 넓이에 대한 가장 초등적인 정의로서 덮는 양, 즉 통약가능한 양인 단위를 전제로 주어진 도형을 낱낱의 단위에 비추어 구체적으로 측정하려는 직관적인 사고를 배경으로 한다. 그러나 측정 활동의 산물로서의 이와 같은 넓이 개념은 일정한 법칙에 의해 다각형을 수에 대응시키는 대수적인 특성을 지닌 대상으로 확장될 필요가 있다(허학도, 2006).

5-가 단계에서 도입 초기에 '덮을 수 있는 단위 정사각형의 개수'로 다루어졌던 직사각형의 넓이는 자연수 범위에서 (가로)×(세로)로 새롭게 설명된 이후(교육인적자원부, 2003, p. 87), 활동 문제를 통해 분수를 포함한 수의 범위에서도 직사각형의 넓이를 (가로)×(세로)로 계산할 수

6) 우리나라 교육과정에서 넓이 개념은 명시적으로 정의되지 않는다(안선영·방정숙, 2006; 허학도, 2006). 이 연구에서는 허학도(2006, p. 41)가 '넓이에 대한 교과과정 내용'으로 기술한 단계별 요소에 비추어 각 내용 요소를 다루는 방식 등을 살펴봄으로써 넓이를 다루는 관점에 미묘한 변화가 있음을 확인할 수 있었다.

있음이 확인된다(교육인적자원부, 2003, p. 115). 넓이 개념의 이러한 확장에는 넓이와 관련된 '덮는다'는 아이디어에 기초하여, 덮는 단위 정사각형의 개수와 주어진 직사각형의 가로, 세로 사이의 관계를 통해 자연수 범위에서 (가로)×(세로)로 직사각형의 넓이를 설명한 맥락을 유리수 범위로도 자연스럽게 확장하려는 의도가 내재되어 있다.

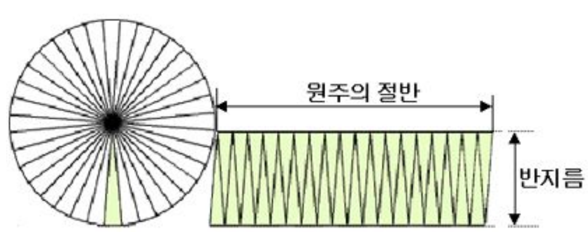
일반적으로 유클리드 기하학에서 직사각형의 넓이는 (가로)×(세로)로 정의된다(Larson et al., 2002, p. 255). 이 정의는 덮을 수 있는 단위 정사각형의 개수로 직사각형의 넓이를 구하는 과정에서 직사각형의 넓이를 단위 길이가 가로에 포함된 횟수와 세로에 포함된 횟수를 곱한 것으로 보는 초기 아이디어를 가로와 세로의 길이가 실수인 맥락까지 확장하여 일반화한 것으로 볼 수 있다(박선용・최지선・박교식, 2008).



[그림 Ⅱ-1] 다각형의 넓이(Larson et al., 2002, p. 255)

(가로)×(세로)로 정의된 직사각형의 넓이로부터 삼각형의 넓이를 구할 수 있으며 모든 다각형은 삼각형으로 분할할 수 있으므로 다각형의 넓이는 삼각형의 넓이를 구하는 것으로 환원된다. 즉, 다각형의 넓이는 기본도형인 삼각형 넓이의 정확한 합이 된다. 주어진 다각형을 기본도형인 삼각형으로 분할하여 '기본도형인 삼각형들의 넓이의 합'으로 원래 다각형의 넓이를 정의하는 방식은 이후 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 '분할된 직사각형의 넓이의 합'을 통해 정의하는 구분구적법 맥락의 주요한 실마리가 된다.

5-가 단계 이후 10-나 단계까지 학교수학에서 다루는 다각형의 넓이는 직사각형의 넓이를 (가로)×(세로)로 정의함으로써 얻어지는 삼각형의 넓이에 기초하여 구할 수 있다. 주어진 다각형을 삼각형으로 분할하여 넓이를 구하는 전략은 6-나 단계에서 원의 넓이를 구하는 과정으로도 확장된다.



[그림 Ⅱ-2] 원의 넓이 유도(1)

그러나 원의 넓이를 위와 같은 방법으로 구하는 전략은 이제까지 주어진 다각형을 삼각형이라는 기본도형으로 정확하게 분할하여 넓이를 구하던 맥락과 중요한 차이가 있다. 위 방법에는 분할을 무한히 진행함으로써 삼각형과 비슷한 형태의 기본도형이 생길 것이며, 이렇게 만들어진 기본도형들의 넓이의 합과 원의 넓이 사이에 유의미한 차이가 없다는 극한의 아이디어가 포함되어 있다. 원의 넓이를 위와 같은 전략으로 구하는 맥락은 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 분할된 직사각형들의 넓이를 합한 값에 대한 극한으로 정의하는 구분구적법의 아이디어와 다르지 않다.

이상의 논의에 따르면 수학 II에서 넓이가 구분구적법에 의해 '수열의 극한값'으로 정의되기 앞서 5-가 단계에서 넓이는 '덮을 수 있는 단위 정사각형의 개수'로 처음 도입된다. 이후 실수 범위에서 직사각형의 넓이가 암묵적으로 (가로)×(세로)로 정의됨으로 인해 다각형의 넓이는 '분할된 기본도형의 넓이의 합'[7]으로 다루어진다. 고등학교에서 넓이를 새롭게 정의하는 구분구적법의 아이디어를 학생들이 적절하게 이해하기 위해서는 전 단계에서의 이러한 두 가지 넓이 개념으로부터 적절한 관점의 전환이 필요하다.

첫 번째 '덮는다'는 의미의 넓이 개념에는 통약가능한 양으로서 고정된 단위를 활용하여 주어진 도형을 직접 재보는 구체적인 측정 활동이 전제되어 있다. 두 번째 '분할된 기본도형의 넓이의 합'이라는 넓이 개념은 주어진 도형이 항상 기본도형으로 정확히 분할될 수 있다는 전제를 배경으로 한다. 그러나 구분구적법의 아이디어는 고정된 단위를 찾으려는 노력, 도형을 기본도형으로 정확하게 분할하려는 노력을 버림으로써 성장할 수 있다. 구분구적법은 극한을 적용할 수 있는 근사적인 대상을 찾아 그 극한값을 구함으로써 원래 주어진 영역의 넓이를 정확하게 구할 수 있다는 점을 전제로 하기 때문이다.

주어진 곡선 영역의 넓이를 '덮을 수 있는 단위 정사각형의 개수'로만 인식하는 학생은 곡선 영역을 덮을 수 있는 단위 정사각형을 찾는 것이 불가능할 것이기 때문에 구분구적법에 의해 구한 넓이를 주어진 곡선 영역의 넓이에 대한 근사값으로 간주할 수 있다. 또한 어떤 영역의 넓이는 항상 정확하게 '분할된 기본도형들의 넓이의 합'에 의해서만 구할 수 있다고 생각하는 학생은 주어진 영역과 근사적으로 가까운 도형의 넓이를 생각하여 그 극한값을 고려하는 구분구적법의 아이디어를 이해하는데 어려움을 겪을 수도 있다.

2. 구분구적법과 상합, 하합

Cavalcante & Tocorov(2008)은 구분구적법에 의해 구한 넓이가 '수열의 극한값'이기 때문에 그 극한값의 존재 여부와 관련된 여분의 논의가 필요하다고 지적하였다. 허학도(2006)는 극한값의 존재 여부가 구분구적법 지도에 있어 주요 요소임에도 불구하고, 학교 수학에서는 그 증명이 어렵다는 이유로 "연속함수일 경우 이러한 극한값이 존재한다는 것이 잘 알려져 있다"(강행고 외, 2002, p. 137)는 설명이 그 존재성의 증명을 대치한다고 비판하였다.

Akkoç et al., (2007)은 학생들이 구분구적법을 통해 수열의 극한값으로서 구한 넓이의 존재

7) 이 논문에서 다각형의 넓이에 대하여 논할 때 사용되는 기본도형은 삼각형을 나타낸다.

성을 인식하고, 그 값이 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이에 대한 근사값이 아니라 정확한 결과값임을 알도록 하기 위해서는 영역의 넓이와 하합, 상합의 관계가 필수적으로 다루어져야 한다고 설명하였다. Toeplitz(2006, p. 100, p. 101)는 구분구적법에 의해 구한 넓이가 항상 수렴하겠는지가 주요한 문제라고 언급하면서 이를 다루는데 하합과 상합이 유용하게 쓰일 수 있다고 지적하였다.

미국 AP과정의 미적분 교재인 Larson et al. (2002, p. 257)에서 하합과 상합은 다음과 같이 정의된다.

> 연속함수 f 에 대하여 구간 $[a, b]$ 을 n 등분하였을 때, 그 i 번째 소구간에서 $f(x)$ 의 최소값과 최대값을 각각 $f(m_i)$, $f(M_i)$ 라고 할 때, 하합 $s(n)$ 과 상합 $S(n)$ 은
> $$s(n)=\sum_{i=1}^{n}f(m_i)\cdot\frac{b-a}{n},\ S(n)=\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\cdot\frac{b-a}{n}$$
> 이다.

이 교과서는 구분구적법을 통해 넓이를 정의하기 앞서 ‘상합과 하합’이라는 별도의 단원을 두어 실제 구하는 영역의 넓이가 상합과 하합 사이에 존재하는 값으로서 $s(n)<(\text{영역의 넓이})<S(n)$ 의 관계가 있음을 명시적으로 설명한다. 분할의 횟수에 따라 상합과 하합이 어떻게 변화하는지를 관찰하게 함으로써 분할의 횟수와 상합, 하합, 구하고자 하는 영역의 넓이 사이의 관계를 확인하도록 한다.

우리나라 수학 Ⅱ교과서에서는 구분구적법을 정의하는 맥락에서 상합과 하합 대신 ‘오른쪽 끝점’과 ‘왼쪽 끝점’이라는 용어가 사용된다.

> n등분한 각 구간의 오른쪽 끝점의 함수값을 높이로 하는 직사각형을 만들고 이 직사각형의 넓이의 합을 S_n 이라고 하자.⋯각 구간의 왼쪽 끝점의 함수값을 높이로 하는 직사각형의 넓이의 합을 s_n 라고 하면⋯(임재훈 외, 2002, p. 136).

우리 교육과정에서는 구분구적법을 정의할 때 연속함수를 대상으로 상합과 하합의 개념을 사용하는 대신 단조증가함수를 대상으로 ‘오른쪽 끝점’과 ‘왼쪽 끝점’이라는 용어를 사용하고 있다. 단조증가함수에 대하여 ‘오른쪽 끝점의 함수값을 높이로 하는 직사각형의 넓이의 합’과 ‘왼쪽 끝점의 함수값을 높이로 하는 직사각형의 넓이의 합’은 각각 Larson et al.이 정의한 상합과 하합에 해당한다. 이러한 맥락에서 우리 교육과정에서 다루어지는 오른쪽 끝점의 함수값을 높이로 하는 직사각형들의 넓이의 합인 S_n 과 왼쪽 끝점의 함수값을 높이로 하는 직사각형들의 넓이의 합인 s_n 은 본질적으로 주어진 영역의 넓이와 관련하여 상합, 하합이 갖는 특징인 $s_n<(\text{영역의 넓이})<S_n$ 을 그대로 보존한다. s_n, S_n, 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이 사이의 이러한 관계는 $\lim_{n\to\infty}s_n=S$, $\lim_{n\to\infty}S_n=S$ 으로부터 조임정리를 통해 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이가 S 임을 설명하는 주요 토대가 되므로 구분구적법의 아이디어를 학생들이 이해하게 하는

데 필수적인 요소라고 볼 수 있다. 그럼에도 불구하고 이 연구에서 검토한 11종의 수학 Ⅱ교과서[8] 중 4종의 교과서가 $s_n < (\text{영역의 넓이}) < S_n$ 의 관계를 다루고 있지 않았다. 구분구적법을 통해 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 정의할 때, $s_n < (\text{영역의 넓이}) < S_n$ 로부터 $\lim_{n \to \infty} s_n = S$, $\lim_{n \to \infty} S_n = S$ 이기 때문에 구하는 넓이는 S 가 됨을 충분히 설명할 필요가 있다.

3. 교수학적 시사점

1) 구분구적법을 통해 넓이를 수열의 극한값으로 정의하는 맥락의 타당성을 지도하기 위하여

연구자는 인문계 고등학교 자연계열 3학년 교실에서 넓이와 관련된 다음과 같은 수업 상황을 관찰한 경험이 있다. 이 대화에서 따르면 학생 B는 넓이를 수학적으로 보다 정교화된 구분구적법의 아이디어를 통해 이해하기보다는 덮는다는 의미에서 가장 직관적이고 초보적인 개념으로 인식하고 있음을 알 수 있다.

학생 A : 넓이가 뭘까?
학생 B : 어떤 영역을 덮을 수 있는 단위 정사각형의 개수.[9]

학교 수학의 어떤 시점에서 도입된 개념은 그 개념과 관련된 모든 맥락에 기반하여 완전히 일반적인 개념으로 제시되지 않으며, 불가피하게 또는 의도적으로 제한된 측면 속에서 다루어지는 경우가 있다. 개념과 관련된 이러한 제한은 학교 급이 올라가면서 점차 정교화, 일반화되어 보다 수학적인 성격을 띠게 된다(박교식, 1998). 학교 수학에서 다루는 넓이의 개념도 이러한 맥락 속에서 이해할 수 있다. 넓이의 개념은 구체적인 측정의 맥락을 전제로 ‘덮을 수 있는 단위 정사각형의 개수’에서 (가로)×(세로)인 직사각형의 넓이에 기초하여 ‘분할된 기본도형의 넓이의 합’으로 다루어지다가 구분구적법을 통해 곡선 아래 영역의 넓이가 ‘수열의 극한값’으로 정의된다. 그러나 앞서 살펴본 수업 사례에 따르면 넓이에 대한 학생들의 이해가 ‘덮을 수 있는 단위 정사각형의 개수’ 또는 ‘분할된 기본도형의 넓이의 합’에 멈춰 있을 가능성이 있으며, 곡선 아래 영역의 넓이를 구분구적법을 통해 수열의 극한값으로 새롭게 정의한 맥락을 충분히 인식하지 못하고 있을 수도 있다.

Tall(1991)은 개념을 효과적으로 다루는 인지 체계를 형성하기 위해서는 개인이 자신의 지식에 대해 반성하고 재구성해 볼 수 있도록 갈등 상황에 직면하게 해야 할 필요가 있다고 설명하였다. 임재훈・박교식(2004)은 접선 개념에 대한 보다 정교하고 수학적인 인지체계의 형성을 위

8) 11종의 내역은 다음과 같다.: 박규홍 외, 2002, pp. 139-140; 박두일 외, 2002, pp. 150-151; 우정호 외, 2002, pp. 133-134; 이강섭 외, 2002, pp. 127-128; 임석훈 외, 2002, pp. 137-138; 임재훈 외, 2002, pp. 212-213; 정광식 외, 2002, pp. 160-161; 조태근 외, 2002, pp. 130-131; 최봉대 외, 2002, pp. 134-136; 최상기 외, 2002, pp. 115-116; 최용준 외, 2002, pp. 134-135.

9) 수업을 진행한 교사에 따르면 학생 A와 학생 B는 수학 성적이 매우 우수한 학생들이다.

해 이전 학교 급에서 형성된 접선 개념으로는 적응이 어려운 문제 상황에 학생들을 노출시킴으로써 기존 지식 체계에 포함된 접선 개념을 반성, 수정, 개선하는 학습 경험을 가질 수 있도록 하는 교수 방안을 연구하였다.

위와 같은 측면에서 구분구적법에 의해 넓이를 수열의 극한값으로 새롭게 정의하는 맥락의 타당성을 이해하게 하는데 이전 학교 급에서 생각해 오던 넓이 개념으로는 적응이 불가능한 문제 상황을 고려하는 것이 도움이 될 수 있다. '덮는다'는 의미의 넓이 개념에 따르면 가로와 세로의 길이가 실수인 직사각형의 넓이는 구할 수가 없게 된다. 이러한 한계를 극복하려는 노력에서 직사각형의 넓이를 (가로)×(세로)로 정의하게 되었으며 이로부터 '분할된 기본도형의 넓이의 합'으로 다각형의 넓이를 정의하여, 각 변의 길이가 실수인 모든 다각형의 넓이를 구할 수 있게 되었다. 그러나 '분할된 기본 도형의 넓이의 합'이라는 관점에서는 원과 같이 곡선으로 둘러싸인 영역은 기본도형으로 정확히 분할할 수가 없기 때문에 그 넓이를 생각하는데 어려움이 있다. 이러한 어려움을 해결하기 위해 극한이 도입되었으며 이로부터 넓이를 구하는 새로운 방법으로서 구분구적법이 정의되었다. 이전 학교 급에서 다루어진 두 가지 넓이 개념을 반성적으로 검토해 보는 이러한 접근 방식을 통해 학생들은 구분구적법의 아이디어를 보다 충분히 이해할 수 있을 것으로 기대된다.

2) 구분구적법을 통해 구한 넓이의 존재성을 지도하기 위하여

선행연구에 의하면 상합과 하합의 극한이 같다는 사실은 구분구적법을 지도하는데 주요한 교수학적 요소가 되어야 한다. 특히 단조함수의 경우 구간을 분할하는 횟수를 늘려감에 따라 하합은 점점 커지고 상합은 점점 작아짐을 탐구할 수 있기 때문에 학생들이 구분구적법을 통해서 구한 극한값인 넓이의 존재성을 보다 쉽게 인식할 수 있다(Toeplitz, 2006, p. 100, p. 101). 또한 이러한 활동은 구하고자 하는 곡선 아래 영역의 넓이가 근사값이 아니라 정확한 결과 값임을 이해하도록 하는데도 도움이 된다. 미국 AP과정의 미적분 교재들(Larson et al., 2002; Stewart, 2001; Tomas, Finney, & Weir, 2000)은 구분구적법을 통해 넓이를 정의하기 앞서 '상합과 하합'이라는 별도의 단원을 두어 실제 구하는 영역의 넓이가 상합과 하합 사이에 존재하는 값임을 명시적으로 설명한다. 분할의 횟수가 늘어남에 따라 상합과 하합, 구하고자 하는 영역의 넓이가 어떻게 변화하는지를 확인하도록 한다.

이 연구에서 검토한 우리나라 수학 Ⅱ교과서 11종 중 7종이 단조증가함수를 대상으로 구간의 '오른쪽 끝점'과 '왼쪽 끝점'을 사용하여 구분구적법을 설명하고 있기는 하나 구간을 분할하는 횟수에 따라 그 값들의 대소 관계가 어떻게 변하는지를 명시적으로 살피고 있지는 못하다. 구분구적법을 통해서 구한 넓이의 존재성과 정확한 결과 값으로서의 특징을 지도하기 위해, 단조증가함수를 대상으로 구간의 분할 횟수를 차츰 늘려감으로써 '오른쪽 끝점에서의 함숫값을 높이로 하는 직사각형들의 넓이의 합'은 점점 감소하고, '왼쪽 끝점에서의 함숫값을 높이로 하는 직사각형들의 넓이의 합'은 점점 증가하는 것을 탐구한 다음 조임정리를 활용하여 구하고자 하는 영역의 넓이를 정의하는 방식을 고려해 볼 필요가 있다.

Ⅲ. 정적분과 무한급수

현재 교육과정에서 정적분 개념은 구분구적법을 통해 소개되며 무한급수를 통해 최종적으로 정돈된다. 곡선으로 둘러싸인 평면 영역의 넓이를 하합과 상합의 극한값으로 정의하는 방식인 구분구적법은 곡선의 길이, 평균값, 중심, 부피, 일의 양, 겉넓이 등을 구할 때도 주요한 수학적 도구로 활용된다. 이러한 수학적 도구의 특성을 연구하기 위해 리만은 구분구적법의 아이디어를 추상화하여 리만합의 극한으로 정적분을 정의하였다(Larson et al., 2002, p. 266). 리만합의 극한인 정적분은 학교수학에서 '극한 기호 $\lim$'와 '합의 기호 $\sum$'를 통해 다음과 같이 정의된다.

> 함수 $y=f(x)$ 가 폐구간 $[a,\ b]$ 에서 연속일 때, a 에서 b 까지의 정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$ 은
>
> $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$ 이다(조태근 외, 2002, p. 133).

Larson et al. (2002, p. 266; Orton, 1983, p. 9)이 정적분을 '합'의 '극한'이라고 설명한 바와 같이 수학 Ⅱ교과서 중에는 정적분이 합의 극한이라는 의미에서 무한급수의 다른 이름이라고 기술한 경우도 있다(박배훈 외, 2002, p. 155). 이 연구에서 검토한 수학 Ⅱ교과서 11종 모두 '정적분과 무한급수'의 관계를 다루고 있으며 정적분을 통해 무한급수의 합을 간단히 구할 수 있다고 설명하고 있다[10].

정적분의 정의가 무한급수의 합이므로 무한급수의 합은 정적분을 이용하여 구할 수 있다.

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x=\int_a^b f(x)dx \left(\text{단, } \Delta x=\frac{b-a}{n}\right)$$

이므로, 무한급수를 정적분으로 변형한 후 무한급수의 합을 구할 수 있다.

[그림 Ⅲ-1] 정적분과 무한급수(박배훈 외, 2002, p. 155)

반면 미국 AP과정의 교과서들(Larson et al., 2002; Stewart, 2001; Tomas, Finney, & Weir, 2000)이나 영국 SMP 교과서인 Methods(2003)에는 우리 교육과정의 '정적분과 무한급수'에 해

10) 현재 교육과정에서 정적분은 그 정의가 내려진 다음, 정적분과 원시함수의 관계가 미적분학의 기본정리에 기초하여 설명된다. 정적분과 원시함수의 관계를 통해 정적분을 쉽게 계산할 수 있음이 지도된 이후 정적분과 무한급수의 관계가 언급된다.

당하는 내용이 없으며 그와 관련된 문제를 다룬 예도 없다. 일본 교과서(藤田 尤 外, 1999; 赤石 勝彦 外, 2007) 역시 '정적분과 무한급수'의 관계를 설명하고 있지 않으며 다만 우리 교육과정의 '정적분과 무한급수'에서 다루는 문제와 비슷한 성격을 띠는 것이 있기는 하나 여기에는 '무한급수'라는 용어 대신 '극한값'이라는 용어가 사용된다.

例題1 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})$ を求めよ。

解 $\frac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})$

$=\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$

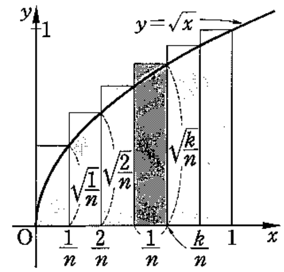
$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$

であるから, $f(x)=\sqrt{x}$ とおけば,

求める極限値は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots〔答〕$$



[그림 Ⅲ-2] 구분구적법과 극한값(藤田 尤 外, 1999, p. 144)

이상에 따르면 미국, 영국, 일본 교과서와 비교해 볼 때 '정적분과 무한급수'의 관계를 살피는 부분은 우리 교육과정에만 존재한다. 이 장에서는 정적분과 관련하여 우리나라 교육과정만의 고유 특징인 '정적분과 무한급수'의 관계가 리만'합의 극한'이라는 정적분의 개념 지도에 있어 필수적인지를 살펴본다.

1. 학교수학에서 무한급수

학문적 지식으로서 무한급수는 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 과 같은 형태의 상수급수(series of constants)와 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ 와 같은 형태의 함수급수(series of function)로 나뉜다(Varberg et al., 2003, p. 555). 상수급수는 항상 다음과 같은 두 가지 질문을 해결하려는 관점에서 다루어진다.

1) 이 급수는 수렴하는가?
2) 만약 수렴하면 그 합은 무엇인가?(Larson et al., 2002, p. 567; Varberg et al., 2003, p. 536)

어떤 급수가 수렴한다고 하더라도 질문 2)에 대한 구체적인 답을 구하는 것은 상당히 어려운 일이므로(Larson et al., 2002, p. 567), 상수급수에 대해서 대학수학에서 다루는 주요 내용은 질문 1)과 관련된다. 질문 1)에 답하는 과정에서 급수의 수렴, 발산에 대한 수학적 판정법이 연구된다.

함수급수와 관련하여 대학수학에서는 급수가 수렴하는 x 의 범위, 급수의 수렴 값으로서 함수 $S(x)$ 의 특징 등이 연구된다(Varberg et al., 2003, p. 556). 나아가 다양한 함수를 급수로 표현하여 함수와 급수 사이의 관계를 연구하는 과정은 함수급수 단원의 주요 내용 요소이다. 대학수학에서 급수는 현상을 다루는 방법인 함수를 새로운 방식으로 표현하는 수학적 도구로 활용된다. 급수를 통해 함수라는 대상을 보다 다양화할 수 있으며 독특한 특성을 지닌 새로운 함수의 예를 찾기도 한다.

이상에 따르면 대학수학에서 급수는 두 가지 측면에서 주로 연구된다. 주어진 급수의 합이 존재하는지 여부를 판단할 수 있는 수학적 판정법이 무엇인지를 연구하는 것이 그 한 가지이며, 주어진 함수를 급수로 표현했을 때 함수와 급수 사이에는 어떤 관계가 있는지를 살피는 것이 다른 한 가지이다. 학교 수학에서 급수는 대학수학에서 다루는 급수의 이러한 두 가지 측면 중 첫 번째와 관련된 논의가 주로 다루어진다. 주어진 급수의 합이 존재하는지 여부를 판단할 수 있는 방안과 관련된 가장 기초적인 논의가 진행되며 이를 위해 학교 수학에서 무한급수는 나름의 교수학적 의도와 배경 하에서 조직된다.

학교수학에서 무한급수는 무한수열 $\{a_n\}$ 의 각 항을 '무한히 합한다'는 것이 수학적으로 어떤 의미인지 다음과 같은 정의된다.

> 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ 는 부분합 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ 에 대하여 수열 $\{S_n\}$ 의 극한 $\lim_{n\to\infty} S_n$으로 정의된다. 즉, $\lim_{n\to\infty} S_n$이 수렴하면 무한급수의 합은 다음과 같이 구할 수 있다.
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$ (임재훈 외, 2002, p. 175).

어떤 값을 실제 무한히 더하는 것은 불가능하므로 위와 같이 수열의 극한값을 구하는 과정으로 무한급수를 정의하여 이를 수학적으로 다룰 수 있게 된 것은 의미있는 일이다. 이러한 측면에서 제 7차 교육과정에는 무한급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고 이를 판별하는 것을 무한급수 단원의 내용 목표로 명시하고 있다(교육인적자원부, 1997). 즉, 고등학교 수학 Ⅰ에서 무한급수가 '부분합의 극한'으로 정의됨을 아는 것은 주요한 학습 요소이다.

무한급수의 합이 부분합이라는 수열의 극한값으로 정의되었기 때문에, 그 합의 존재 여부는 수열의 극한의 수렴 여부에 따라 결정된다. 즉, 학교 수학에서 무한급수는 수열의 극한에 대한 심화된 연구로, 수열의 극한 개념에 대한 직접적인 응용이라고 볼 수 있다(박선화, 1998). 그러

나 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 합을 연구하기 위해 항상 정의에 기초하여 부분합 S_n 을 구한 다음 그 극한 $\lim_{n\to\infty} S_n$을 구해보는 것은 번거롭고 힘든 일이다. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 합을 S_n 의 극한 $\lim_{n\to\infty} S_n$이 아닌 a_n 의 극한 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 을 통해 판단하도록 하는 것은 이러한 관점에서 의미있는 일이다. 학교 수학에서는 무한급수의 정의를 다룬 다음 '무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이다'는 정리가 지도된다. 이 정리를 증명하는 과정에서 무한급수가 부분합의 극한이라는 정의가 유용하게 활용된다.

> 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 S 에 수렴한다고 하면 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ 이다. 또, $n \geqq 2$ 일 때,
> $a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$
> 이다(임재훈 외, 2002, p. 176).

'무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이다'는 정리가 성립하기 때문에 '$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ 이면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 발산'함을 설명할 수 있게 된다. 즉, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 발산 여부를 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 의 값으로 판정할 수 있게 된다. 이는 무한급수와 수열의 극한 사이의 관계를 맺어 주는 주요한 정리로 무한급수의 발산 여부를 판단하는 좋은 기준이 된다. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 합이 존재하는가의 여부는 그 정의에 비추어 부분합의 극한 $\lim_{n\to\infty} S_n$의 수렴 여부로 판단되기도 하지만 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 의 값에 의해 판정되기도 한다. 학교수학에서 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 를 다룸에 있어 $\lim_{n\to\infty} S_n$과의 관계뿐만 아니라 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 과의 관계 역시 주요한 내용 요소가 된다. 특히, 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 합이 존재하는가의 여부는 무한등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비 r 이 존재하는 범위에 비추어 판정된다. 학교수학에서 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 를 지도할 때, 무한수열 $\{a_n\}$ 과의 관계를 살피는 것은 필수적인 활동이라고 볼 수 있다.

이상의 논의에 따르면 학교수학에서 무한급수는 세 가지 관점에서 지도된다고 볼 수 있다.

첫째, 부분합의 극한이라는 무한급수의 정의는 주요한 내용 요소로 무한급수를 학습한 학생들이 필수적으로 알아야 하는 내용이다. 둘째, '$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 가 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이 된다'는 정리가 무한급수의 수렴여부를 판정할 때 주요한 도구가 됨을 학생들이 이해하도록 한다. 셋째, 일반적으로 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 를 다룰 때는 무한과 관련된 수열 $\{a_n\}$ 의 특징을 고려해 볼 수 있도록 한다.

2. 교수학적 시사점

무한수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 무한급수는 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$ 과 같이 정의된다. 이 정의는 연속함수 $f(x)$ 에 대하여 a 에서 b 까지 정적분 $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$ 의 정의와 그 형태상 매우 유사하다. 여기서 무한급수는 '부분합의 극한'이며, 정적분은 '리만합의 극한'이다. 부분합 $\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$ 역시 n 에 대한 식이며 리만합 $\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n} = T_n$ 역시 n 에 대한 식이므로 무한급수 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 와 정적분 $\lim_{n\to\infty} T_n$ 는 넓은 의미에서 모두 수열의 극한이다.

그러나 수열 $\{S_n\}$ 에 포함된 a_k 는 k 에 대한 식인데 반해 수열 $\{T_n\}$ 을 구성하는 $f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$ 은 k 와 n 에 대한 식이다. 때문에 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$ 에서 n 의 값이 커지면 더하는 항 a_k 의 수는 증가하지만 항의 값 a_k 는 n 에 따라 달라지지 않는다. 즉, $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$ 이고 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ 이기 때문에 $S_n - S_{n-1}$ 은 a_k 에서 k 대신 n 을 대입한 결과로 $S_n - S_{n-1} = a_n$ 과 같이 간단하게 나타낼 수 있게 된다. 이로부터 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$ 이 수렴하면 a_n 의 극한값이 0이 됨을 어렵지 않게 설명할 수 있다.

반면에 $\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$ 에서는 항의 값 $f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$ 이 n 의 값에 따라 달라진다. 따라서 $T_n - T_{n-1}$ 은 $f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$ 에 k 대신 n 을 대입한 결과로 간단히 쓸 수 없다. 즉, $f\left(a+\frac{b-a}{n}n\right)\frac{b-a}{n}$ 의 극한값을 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty} T_n$ 의 수렴 여부로 판단할 수는 없다.

$$T_{n-1}=f\left(a+\frac{(b-a)}{n-1}\right)\frac{b-a}{n-1}+f\left(a+\frac{2(b-a)}{n-1}\right)\frac{b-a}{n-1}+\cdots+f\left(a+\frac{(n-1)(b-a)}{n-1}\right)\frac{b-a}{n-1}$$

$$T_{n}=f\left(a+\frac{(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}+f\left(a+\frac{2(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}+\cdots+f\left(a+\frac{(n-1)(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}+f\left(a+\frac{n(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

이상의 논의는 무한급수 단원에서는 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$ 의 합이 존재하는가의 여부로 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 의 값을 구할 수 있지만 정적분 단원에서는 $\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$ 의 값이 존재하는가의 여부로 $f\left(a+\frac{b-a}{n}n\right)\frac{b-a}{n}$ 의 극한에 대해 설명할 수는 없다는 것을 의미한다. 즉, 무한급수 단원에서는 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 와 수열 $\{a_n\}$ 의 관계가 의미있게 관찰되는 반면 정적분 단원에서는 정적분 $\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$ 과 수열 $\left\{f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}\right\}$ 의 관계를 살피는 것이 주요 관심사는 아니다. 이는 무한급수 단원에서 설명하고자 하는 바와 정적분 단원에서 설명하고자 하는 바에 차이가 있음을 보여준다.

일반적으로 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$ 를 다룰 때는 무한과 관련하여 수열 $\{a_n\}$ 이 지닌 특징에 대해서 탐구하는 것이 보통이다. 그러나 현재 수학 Ⅱ의 '정적분과 무한급수'에서는 $\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$ 을 다룰 때 수열 $\left\{f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}\right\}$ 의 특징을 전혀 고려하지 않는다. 실제 수학 Ⅱ의 '정적분과 무한급수'는 특별한 형태의 수열의 극한값을 구하는데 정적분이 활용될 수 있음을 확인하는 것으로 내용이 구성되어 있다. 이 연구에서 검토한 11종의 교과서가 모두 '정적분과 무한급수'에서 이러한 내용을 다루고 있으며, 이를 위해 정적분 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$ 을 '무한급수'로 취급하고 있다. '정적분과 무한급수'의 관계를 살피는 부분에서 정적분 '$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$'이 무한급수인 것처럼 다루면서도 '$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$'과 '$f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$'의 관계, 특히 무한과 관련하여 식

$f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$ 이 지닌 특징에 대해서는 살펴보지 않는다. 대신 주어진 수열의 극한값을 손쉽게 구하기 위해 이를 정적분의 형태로 변형하는 내용이 다루어지고 있다.

곡선 아래 영역의 넓이를 일반화한 개념인 정적분은 분할의 횟수인 n의 값이 커짐에 따라, 분할된 직사각형 낱낱의 넓이인 $f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$ 의 값이 어떻게 변화하는가를 알아보기 보다는 분할된 직사각형들의 넓이의 합 $\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$ 이 어떻게 변화하는가를 알아보는데 보다 관심을 둔다고 볼 수 있다. 즉, 정적분은 분할된 직사각형들의 넓이의 합인 '수열 $T_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$ '의 '극한값'이 얼마인지를 중점적으로 다루는 과정이라고 볼 수 있다. 정적분이 '합의 극한'이기는 하지만 '무한급수'보다는 리만합이라는 어떤 '수열'의 '극한'으로 다루어지는 것이 타당한 이유가 여기에 있다. 수학내적으로 볼 때, 어떤 형태의 '무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$ '도 정적분으로 고쳐서 계산하지 않는다는 점에 비추어 보더라도 정적분을 무한급수와 관련지어 다루는 수학 Ⅱ의 접근 방식이 정적분을 지도하는데 필수적인 과정이라고 보기는 어려운 점이 있다.

Ⅳ. 결론

정적분 개념에 대한 이해는 구분구적법과 리만합의 극한에 대한 이해에 기반한다. 그러나 선행연구는 구분구적법과 리만합의 극한으로서 정적분 개념에 대한 학생들의 이해에 여러 가지 한계가 있음을 지적하였다. 이 연구에서는 선행연구 분석을 통해 구분구적법의 개념 지도에 있어 크게 두 가지 교수학적 어려움이 있음을 기술하였으며 이를 개선하는데 필요한 교수학적 시사점을 살펴보았다.

학생들은 구분구적법을 통해 넓이가 수열의 극한값으로 새롭게 정의되는 맥락의 타당성을 적절히 이해하지 못하는 경향이 있으며, 이러한 어려움을 극복하는데 학교수학에서 넓이를 다루는 관점이 변화된 맥락을 재음미해보는 활동이 유익할 수 있다. 또한 선행연구에 따르면 학생들은 구분구적법을 통해 구한 넓이가 항상 존재하는 값인지, 넓이로서 구한 값이 근사값인지 정확한 결과 값인지를 판단하지 못하는 모습을 보여주었다. 이를 위해 곡선 아래 영역의 넓이를 정의할 때, 주어진 구간을 분할하는 횟수에 따라 하합과 상합, 곡선 아래 영역의 넓이 사이의 대소 관계가 어떻게 변하는지를 살펴보도록 하는 탐구 활동을 진행해 볼 수 있다.

우리나라 교육과정에서 정적분 단원은 구분구적법, 정적분의 정의, 정적분과 원시함수의 관계, 정적분과 무한급수로 구성된다. 이러한 단원 구성에서 특히 '정적분과 무한급수'는 국외 교과서와 비교하여 우리나라 교과서에만 존재하는 내용이다. 실제로 수학 Ⅱ교과서의 '정적분과 무한급수' 부분에서는 정적분의 형태로 변형 가능한 특수한 유형의 수열의 극한을 정적분과 원

시함수의 관계를 통해 보다 쉽게 계산할 수 있음을 확인함으로써 미적분학의 기본정리가 지닌 가치를 간접적으로 설명하려는 방식으로 구성되어 있다. 이 연구에서는 이러한 교수학적 의도를 구현하기 위해 정적분이 무한급수와 같다거나 깊은 관계가 있는 것으로 다룰 필요까지는 없으며, 정적분이 수열의 극한임을 이해하도록 하는 것만으로도 위와 같은 지도 목적을 달성하는데 충분함을 국내외 교과서의 정적분 단원과 무한급수 단원에서 다루어지는 내용 요소에 비추어 기술하였다.

참고문헌

강행고 외 (2002). 고등학교 수학 Ⅱ. 서울 : 중앙교육진흥연구소.

교육인적자원부 (1997). 수학과 고등학교 교육과정. 서울 : 대한교과서주식회사.

교육인적자원부 (2003). 초등학교 수학 5-가. 서울 : 대한교과서주식회사.

박교식 (1998). 우리나라 초등학교 수학의 정체성에 관한 연구. 대한수학교육학회논문집, 8(1), 89-100.

박규홍 외 (2002). 고등학교 수학 Ⅱ. 서울 : 교학사.

박두일 외 (2002). 고등학교 수학 Ⅱ. 서울 : 교학사.

박배훈 외 (2002). 고등학교 수학Ⅱ. 서울 : 법문사.

박선용・최지선・박교식 (2008). 넓이 개념의 SMSG 교수-학습 방식에 대한 비판적 고찰. 학교수학, 10(1), 123-138.

박선화 (1998). 수학적 극한 개념의 이해에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

안선영・방정숙 (2006). 평면도형의 넓이에 대한 교사의 교수학적 내용 지식과 수업 실제 분석. 수학교육학연구, 16(1), 25-41.

우정호 외 (2002). 고등학교 수학 Ⅱ. 서울 : 대한교과서.

이강섭 외 (2002). 고등학교 수학 Ⅱ. 서울 : 지학사.

임석훈 외 (2002). 고등학교 수학 Ⅱ. 서울 : 천재교육.

임재훈 외 (2002). 고등학교 수학 Ⅰ. 서울 : 두산.

임재훈・박교식 (2004). 학교 수학에서 접선 개념 교수 방안 연구. 수학교육학연구, 14(2), 171-185.

정광식 외 (2002). 고등학교 수학 Ⅱ. 서울 : 동아서적.

조태근 외 (2002). 고등학교 수학 Ⅱ. 서울 : 금성출판사.

최봉대 외 (2002). 고등학교 수학 Ⅱ. 서울 : 중앙교육진흥연구소.

최상기 외 (2002). 고등학교 수학 Ⅱ. 서울 : 고려출판.

최용준 외 (2002). 고등학교 수학 Ⅱ. 서울 : 천재교육.

허학도 (2006). 직사각형 넓이 공식의 이해와 인식론적 장애. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

藤田 尤 外 (1999). 高等學校 數學 Ⅲ. 東京: 東京書籍.

赤石勝庠 外 (2007). 高等學校 數學 Ⅲ. 東京: 實敎出版.

Akkoç H., Yesildere, S., & Özmantar, F. (2007). Prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge of definite integral: the problem of limit process. Proceddings of the Roceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 27(3), 7-12. Great Britain; British Society for Research into Learning Mathematics.

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: some conceptions of first-year students. International Journal of Mathematics Educational in Science and Technology, 32, 487-500.

Camacho, M., Depool, R., & Santos-Trigo, M. (2004). Students' understanding of area and definite integral concepts within an enhanced computer learning environment. PME CONFERENCE, 28(1). Bergen, Norway; Bergen University College.

Cavalcante, R., & Todorov, D. T. (2008). A Lost Theorem: Definite Integrals in Asymptotic Setting. The American Mathematical Monthly, 2008, January, 1-13.

Foley, M. E. F. (1992). Assessment of higher-order thinking in mathematics: The definite Integral. PhD thesis, Texas A&M University.

Larson, R., Hostetler, P. R., & Edwards, H. B. (2002). Calculus of a Single Variable. NY: Houghton Mifflin Company.

Lewin, J. (2003). An Interactive Introduction to Mathematical Analysis. UK: Cambridge University Press.

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. Educational Studies in Mathematics, 14, 1-18.

SMP. (2003). Methods. UK: Cambridge University Press.

Stewart, J. (2001). Calculus. USA: Thomson.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Eds.), Advanced mathematical thinking (pp.3-21). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Thomas, B. G., Finney, L. R., & Weir, D. M. (2000). Calculus. USA: Addison Wesley.

Toeplitz, O. (2006). 미적분학. (우정호 외 역). 서울 : 경문사. (영어 원작은 1963년 출판).

Varberg, D., Purcell, J. E., & Rigdon, E. S. (2003). Calculus. NY: Prentice Hall.

An Analysis of the Concept on Mensuration by Parts and Definite Integral

Shin, BoMi[11)]

Abstract

Understanding the concept of definite integral is based on understanding the concept of mensuration by parts. However, several previous studies pointed out the difficulty on teaching the concept of mensuration by parts. The paper provides some didactic strategies which help teaching the concept of mensuration by part.

To teach the concept of definite integral, in the high school curriculum, the relation between definite integral and series is dealt with. However, the paper suggests that importing the concept of series is not indispensable to teach the concept of definite integral. It is proper that definite integral is taught as limit of particular sequence not series.

Key Words : Mensuration by parts, Definite integral, Infinite series

11) Gwangju Educational Research Information Service (bomi0210@hanmail.net)