한국학교수학회논문집 제 11 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 11, Number 3, 399-420, September 2008

대수적 방법을 이용한 방접원에 관련된 삼각형 작도문제의 해결 연구

공선혜[1] · 한인기[2]

작도문제는 도형의 다양한 개념들, 성질들에 대한 이해를 증진시키며, 기하학적 탐구능력을 기르는 도구로 활용될 수 있다. 본 연구에서는 작도문제를 해결하는 대수적 방법의 본질, 의의에 대해 고찰하고, 대수적 방법을 활용하여 방접원의 반지름(들)이 조건의 일부로 주어진 삼각형 작도문제를 해결하고, 바탕문제를 중심으로 해결된 작도문제를 체계화시켰다. 본 연구의 결과는 수학 심화학급이나 과학영재교육원의 창의적 수학 탐구의 자료로 활용될 수 있을 것이며, 삼각형 작도문제의 체계적이고 포괄적인 후속연구를 위한 기초자료가 될 수 있을 것으로 기대된다.

주요용어 : 작도문제, 삼각형의 방접원, 대수적 방법, 삼각형, 수학 영재교육

I. 서론

수학과 교육과정 해설(교육부, 1999, p. 72)에서는 ‘도형의 학습에서 작도 능력을 신장시키는 것은 중요하다. 이는 도형의 개념이나 성질에 관한 이해를 더 명확하게 할 뿐만 아니라, 그림을 그리는 조작적 활동에 의해 도형에 대한 흥미와 관심을 가지게 하는 데에도 의미가 있다’고 기술하면서, 작도문제의 교육적 의미를 강조하였다.

Aleksandrov(2004, p. 8)는 ‘작도문제의 해결은 그림을 독해하는 능력, 보조선을 작도하는 능력, 방법들을 활용하는 능력으로 구성된다’고 주장하면서, 작도문제가 기하학 탐구의 중요한 능력들과 관련된다는 것을 보였다. 즉 작도문제는 도형의 다양한 개념들, 성질들에 대한 이해를 증진시키며, 기하학적 탐구능력을 기르는 주요한 도구가 될 수 있다. 그러므로 다양한 요소들을 포함하는 작도문제의 해결을 연구하고 이들의 해결 방법을 체계적으로 고찰하는 것은 학교수학의 내용과 수준을 확장시킬 뿐만 아니라, 기하학적 탐구능력을 계발하고 육성하는 수학교육학 연구의 중요한 기초자료가 될 수 있을 것이다.

작도문제에 관련된 국내의 연구들을 분류하면, 첫째 작도문제의 해결 단계에 대한 연구로 정창현(1992), 한인기(1999)가 있으며, 둘째 교육과정 및 교과서에서의 작도문제에 대한 연구로 장혜원(1997), 박명희, 신경희(2006), 조완영, 정보나(2002)가 있으며, 셋째 다양한 작도문제의 탐구에 관련된 연구로 김주봉(1999), 한인기, 강인주(2000), 한인기, 김문섭(2007) 등이

1) 창원여자고등학교 (seanhye@hanmail.net)
2) 경상대학교 (inkiski@gsnu.ac.kr)

있다. 이들 연구를 통해, 학교수학에서 작도문제의 취급에 관련된 다양한 논의가 이루어졌다는 것은 주목할 만하다. 그러나 이들 연구에서는 삼각형의 변들, 각들, 정다각형, 정다면체의 절단면 등에 관련된 제한된 범위의 작도문제를 다루었으므로, 좀 더 다양한 작도문제에 대한 활발한 논의가 필요하다. 예를 들어 삼각형의 높이, 중선, 각의 이등분선, 내접원, 외접원, 방접원 등은 삼각형의 성질을 구성하는 중요한 요소들임에도 불구하고, 이들에 관련된 작도문제는 체계적으로 연구되지 않았다. 그리고 작도문제 해결의 방법에 대해서도 국내 연구에서는 거의 다루어지지 않았다. 그러므로 이 연구에서는 방접원의 반지름(들)이 조건의 일부로 주어진 삼각형 작도문제를 탐구할 것이다.

본 연구에서는 작도문제를 해결하는 대수적 방법의 본질, 의의에 대해 고찰하고, 대수적 방법을 활용하여 방접원의 반지름(들)이 조건의 일부로 주어진 삼각형 작도문제를 해결하며, 바탕문제를 중심으로 해결된 작도문제를 체계화시킬 것이다. 이를 통해, 삼각형 작도문제의 체계적이고 포괄적인 후속연구와 삼각형 작도문제의 교육적 활용을 위한 기초자료를 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

II. 대수적 방법에 의한 작도문제의 해결

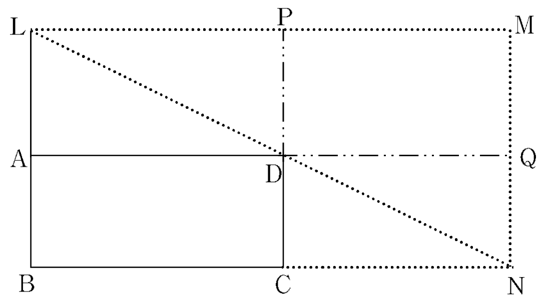
작도문제의 해결에 관련된 연구들 중에 문제해결의 방법들을 분류하여 체계적으로 정리하려는 시도가 있었다. Adler(1940)는 작도문제의 다양한 해결 방법을 대수적 방법, 기하학적 자취 방법, 닮은 도형 방법, 보조도형 방법, 도형의 변환 방법, 불변량 방법으로 분류하였으며, Perepelkin(1947)은 기하학적 자취 방법, 닮음 방법, 대수적 방법을 활용한 작도문제의 해결에 대해 체계적으로 연구하였다.

한편 Argunov & Balk(1957)는 기하학적 자취 방법, 이동 방법, 닮음 방법, 불변량 방법, 대수적 방법을, Aleksandrov(2004)는 기하학적 자취 방법, 닮음 방법, 도형의 변환 방법, 거꾸로 방법, 불변량 방법, 대수적 방법을 중심으로, 다양한 작도문제의 해결 방법을 연구하였다. 기술한 연구들을 통해, 대수적 방법은 작도문제 해결의 주요한 방법들 중의 하나라는 것을 알 수 있으며, 대수적 방법을 활용한 작도문제의 해결에 대한 체계적인 연구는 교육적으로 의미로울 것이다.

Perepelkin(1947, p. 80)은 대수적 방법의 본질을 '우선 구하는 것이 어떤 선분이 되도록 문제를 진술한다. 그런 다음 계량적인 관계들에 대한 정리를 이용하여 구하는 선분을 주어진 선분들로 대수적으로 표현한다. 만약 구하는 선분을 주어진 선분들의 식으로 표현하는데 성공하였으며 이 식을 자와 컴퍼스로 작도할 수 있으면, 작도를 수행하여 구하는 선분을 작도한다'고 기술하였다. 즉 대수적 방법에 의한 작도문제 해결에서는 첫째, 구하는 것이 어떤 선분이 되도록 문제를 진술하며, 둘째 구하는 선분을 주어진 선분들의 대수적 관계식으로 표현하며, 셋째 얻어진 관계식에 해당하는 선분을 자와 컴퍼스를 이용하여 작도한다. 특히 도형의 요소들 사이의 다양한 관계식들이 폭넓게 연구되어 있으므로, 대수적 방법에 의한 작도문제 해결은 학생들의 수학적 탐구의 폭과 수준을 크게 넓힐 수 있을 것으로 기대된다.

자와 컴퍼스를 이용한 대수식의 작도에 관련하여 Adler(1940, p. 14)는 '주어진 선분들로부터 유한번의 유리적인 조작들(더하기, 빼기, 곱하기, 나누기)과 제곱근의 열기를 이용하여 얻어지는 식들은 작도가 가능하다'고 하였다. 즉 a, b, c가 주어진 선분이면, $a+b$, $a-b$, ab, $\frac{ab}{c}$, $\sqrt{ab}$, $\sqrt{a^2+b^2}$ 등과 같은 선분을 자와 컴퍼스를 이용하여 작도할 수 있다.

예를 들어 $\dfrac{ab}{c}$의 작도 방법을 살펴보자. $x=\dfrac{ab}{c}$인 x를 작도해야 한다. 이때 c를 이항하면 $cx=ab$를 만족시키는 x를 작도해야 한다. 이를 위해 변의 길이가 a, b인 직사각형 ABCD를 작도하고, 변 AB의 연장선에 길이가 c인 선분 AL을 작도하자(그림 1). 이제 직선 LD와 BC의 교점을 N이라 하고, 직사각형 LBNM을 작도하자. 그러면 삼각형 LAD와 LPD, DCN과 DQN은 넓이가 같으므로, 직사각형 ABCD와 PDQM의 넓이는 같게 된다. 직사각형 ABCD의 넓이가 ab이고, PD의 길이가 c이므로, 선분 DQ의 길이는 $cx=ab$를 만족시키는 x이며, 결국 DQ의 길이는 $\dfrac{ab}{c}$가 된다.



<그림 1>

한편 $x=ab$인 선분 x는 $\dfrac{ab}{c}$에서 c가 1인 경우이므로, 자와 컴퍼스를 이용하여 작도할 수 있다. 그리고 $x=\sqrt{ab}$는 항등식 $ab=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$, 피타고라스 정리를 이용하여 작도할 수 있다(상세한 작도방법은 한인기(2005, pp. 50-51)에 제시되어 있음).

$x=\sqrt{a^2+b^2}$인 선분 x는 $u=a^2$, $v=b^2$을 작도한 다음($cx=ab$인 x의 작도에서 $c=1$, $a=b$인 경우를 생각하면 $u=a^2$, $v=b^2$을 작도할 수 있음), $u+v$를 작도하고, $\sqrt{u+v}$를 작도하면 된다.

살펴본 작도들을 활용하면, $\sqrt{a^2-b^2+cd}$, $\dfrac{cd+\sqrt{d^2e^3+\sqrt{af}}}{b^2+c^2-\sqrt{a+\dfrac{ef}{b}}}$와 같이 복잡한 식들로 표현되는 선분도 자와 컴퍼스를 이용하여 작도할 수 있다(단, a, b, c, d, e, f는 주어진 선분들). 예를 들어 $\dfrac{cd+\sqrt{d^2e^3+\sqrt{af}}}{b^2+c^2-\sqrt{a+\dfrac{ef}{b}}}$인 선분을 작도하려면, $\sqrt{af}$; d^2; e^3; d^2e^3; $\sqrt{d^2e^3+\sqrt{af}}$; cd; $cd+\sqrt{d^2e^3+\sqrt{af}}$; b^2; c^2; b^2+c^2; $\dfrac{ef}{b}$; $a+\dfrac{ef}{b}$; $\sqrt{a+\dfrac{ef}{b}}$; $b^2+c^2-\sqrt{a+\dfrac{ef}{b}}$를 순차적으로 작도한다. 그러면 선분 $cd+\sqrt{d^2e^3+\sqrt{af}}$,

$b^2+c^2-\sqrt{a+\dfrac{ef}{b}}$ 로부터 $\dfrac{cd+\sqrt{d^2e^3+\sqrt{af}}}{b^2+c^2-\sqrt{a+\dfrac{ef}{b}}}$ 을 작도할 수 있다. 이때 제곱근호 안과 분자, 분모는 항상 양의 값이어야 선분을 작도할 수 있다.

Perepelkin(1947, pp. 80-81)은 이러한 대수적 방법의 의의로, '대수식의 형태 자체가 작도를 위한 길을 암시한다. 대수적 방법은 어떤 문제의 가해성에 대한 확인뿐만 아니라, 그 문제의 해결 방법도 암시한다'고 주장하였다. 즉 대수적 방법은 주어진 문제가 자와 컴퍼스로 작도가 가능한 문제인지 확인하는 도구가 되며, 작도가 가능한 경우에 구체적인 문제해결을 위한 암시를 제공해 준다. 예를 들어 3대 작도불능 문제를 대수적 방법으로 해결가능성에 대한 결론을 내린 것은 대수적 방법의 수학적 가치를 보여주는 좋은 예라고 할 수 있다.

III. 방접원에 관련된 삼각형 작도를 위한 바탕문제

삼각형의 작도에 관련된 문제들을 살펴보면, 삼각형의 변, 각, 중선, 각의 이등분선, 높이가 조건으로 주어지는 경우가 많다. 그리고 중등학교 수학교과서에서도 삼각형의 변, 각에 관련된 삼각형의 작도문제만 다루기 때문에, 내접원의 반지름 또는 외접원의 반지름 또는 방접원의 반지름이 조건으로 주어지는 삼각형의 작도문제에 대해서는 수학교육학 연구에서 폭넓게 다루어지지 못하였다.

김경선 · 한인기(2007a, 2007b)는 삼각형의 변, 넓이, 높이, 내접원의 반지름, 외접원의 반지름, 방접원의 반지름에 관련된 다양한 대수식들을 연구하였다. 본 연구에서는 이들 대수식을 이용하여 삼각형의 작도문제를 대수적으로 해결할 것이다.

이 대수식들 중에서 본 연구의 문제해결에서 활용될 대수식들을 살펴보자. 삼각형 ABC의 꼭지점 A, B, C에서 그은 높이를 h_a, h_b, h_c, 각의 이등분선을 s_a, s_b, s_c, 내접원의 반지름을 r, 외접원의 반지름을 R, 넓이를 S, 둘레의 절반을 p, 변 BC, AC, AB에 각각 접하는 방접원의 반지름을 r_a, r_b, r_c라 하자. 그러면 $r_a=\dfrac{S}{p-a}$(성질 #1), $r=\dfrac{S}{p}$(성질 #2), $h_a=\dfrac{2r_br_c}{r_b+r_c}$(성질 #3), $r_a=\dfrac{r_ch_b}{2r_c-h_b}$(성질 #4), $\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_a}=\dfrac{2}{h_a}$(성질 #5), $h_a=\dfrac{2rr_a}{r_a-r}$(성질 #6), $r=\dfrac{r_ah_a}{h_a+2r_a}$(성질 #7), $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{r_a}+\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}$(성질 #8), $r=\dfrac{r_ar_br_c}{r_ar_b+r_br_c+r_cr_a}$(성질 #9), $r_a+r_b+r_c=4R+r$(성질 #10), $a^2=(r_a-r)(r_b+r_c)$(성질 #11), $a^2+r^2=4R(r_a-r)$(성질 #12) 등이 성립한다. 성질 옆에 괄호에 적힌 수는 성질의 번호이며, 문제해결 과정에서 이들 성질의 인용을 위한 것이다.

한인기 · 김문섭(2007)은 정사면체와 정육면체에 관련된 절단면들의 작도문제를 체계적으로 해결하고 기술하기 위해, 바탕문제의 개념을 이용하였다. 바탕문제는 다른 작도문제들의 해결에 있어 도구적인 역할을 하는 문제이다. 그렇지만 바탕문제가 가장 단순한 방법으로 해결되는 문제를 의미하는 것은 아니다. 만약 관련된 다른 문제들의 해결이 어떤 문제의 해결로 귀착된다면, 그러한 문제를 바탕문제라고 할 수 있다.

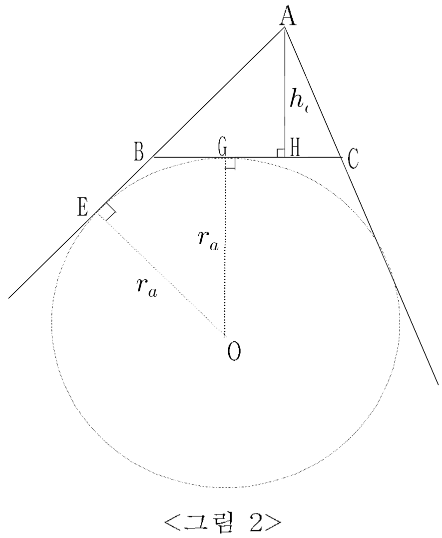
본 연구에서는 방접원의 반지름에 관련된 삼각형 작도문제들을 체계적으로 해결하고 기술하기 위해, 세 개의 바탕문제를 추출하였다.

바탕문제 1. $\angle A$, h_a, r_a가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석. $\angle A$, h_a, r_a가 주어지고, 이를 이용하여 삼각형 ABC를 작도하였다고 가정하자(그림 2). 이제 삼각형 ABC의 작도를 위한 분석을 수행하자.

먼저, '<그림 2>에 작도가 가능한 도형은 무엇인가'라는 물음을 생각하자. 각 A를 작도할 수는 있지만, 문제해결을 위해 그다지 도움이 되지는 못한다. 이제 보조선 AO를 생각하자. O가 방접원의 중심이므로, 선분 AO은 각 A의 이등분선에 속한다. 즉 $\angle EAO=\frac{1}{2}\angle A$이므로, $\angle EAO$를 작도할 수 있다. 삼각형 AEO에서 한 변과 두 각이 주어진 것이 되므로, 이 삼각형을 작도할 수 있다. 즉 선분 OE가 주어졌고, 선분 OE의 한 끝각은 90°이며 다른 끝각은 $90^\circ-\angle EAO=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$이므로, 삼각형 AEO가 작도된다.

삼각형 AEO를 작도하면, 선분 AO를 얻을 수 있다. 선분 AO와 변 BC의 교점을 D라 하면, 삼각형 ADH와 ODG는 닮음이며, $AD=\frac{h_a\cdot AO}{h_a+r_a}$이다. 이때 선분 AD는 선분 $h_a\cdot AO$를 h_a+r_a로 나눈 것이므로, 작도가 가능하다. 그러면 직각삼각형 ADH의 빗변과 한 변이 주어진 것이 되므로, 이 삼각형을 작도할 수 있다. 이제 직선 DH와 각 A의 변들의 교점을 B, C라 하면, 삼각형 ABC가 작도된다. □



<그림 2>

작도순서. 분석으로부터 다음 작도순서를 얻을 수 있다.

(1) 한 변이 r_a이고 양 끝각이 90°, $90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$인 삼각형 AEO를 작도한다.

(2) 선분 AO에 $AD=\frac{h_a\cdot AO}{h_a+r_a}$인 선분 AD를 작도한다.

(3) 빗변이 AD이며, 다른 변이 h_a인 직각삼각형 ADH를 작도한다.
(4) 각의 한 변이 AE인 각 A를 작도한다.
(5) 각 A와 직선 DH의 교점을 각각 B, C라 하면, 삼각형 ABC가 작도된다. □

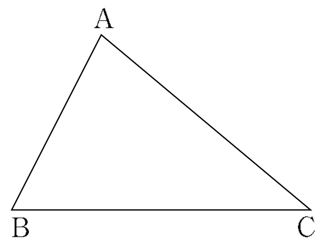
문제해결 과정에서 한 변과 양 끝각이 주어진 삼각형의 작도, 빗변과 한 변이 주어진 직각삼각형의 작도, $AD = \frac{h_a \cdot AO}{h_a + r_a}$의 작도를 이용했다. $AD = \frac{h_a \cdot AO}{h_a + r_a}$의 작도는 이미 설명하였으며, 한 변과 양 끝각이 주어진 삼각형의 작도는 수학교과서에서 다루므로 생략한다.

선분 AO에 빗변이 AD, 한 변이 AH인 직각삼각형을 작도하는 방법을 살펴보자. 우선 임의의 직선에 선분 AH를 긋자. 이제 선분 AH의 한 끝점 H로부터 AH에 수선을 긋고, 점 A로부터 반지름이 AD인 원을 그어 AH의 수선과의 교점을 구하면 된다. 이제 얻어진 삼각형과 합동인 삼각형을 선분 AO에 작도하면, 삼각형 ADH를 작도할 수 있다.

바탕문제 2. r_a, r_b, r_c가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석. r_a, r_b, r_c가 주어지고, 이를 이용하여 삼각형 ABC를 작도하였다고 가정하자(그림 3). 그러면 변 AB, AC, BC의 길이 c, b, a를 알 수 있으며, 역으로 이들을 안다면 삼각형 ABC를 작도할 수 있다.

이제 r_a, r_b, r_c로부터 a, b, c를 구할 수 있는지 조사하자. 성질 #11에 의해 $a^2 = (r_a - r)(r_b + r_c)$이므로, r_a, r_b, r_c, r을 안다면, a^2을 작도할 수 있다. 그런데 성질 #9에 의해 $r = \frac{r_a r_b r_c}{r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a}$이므로, r을 작도할 수 있다. 결국 a^2, a를 작도할 수 있다. 유사한 방법으로, b, c는 $b = \sqrt{(r_b - r)(r_a + r_c)}$, $c = \sqrt{(r_c - r)(r_a + r_b)}$임을 알 수 있으며, 이들을 작도할 수 있다. □



<그림 3>

작도방법.

(1) $r = \frac{r_a r_b r_c}{r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a}$를 작도한다.
(2) $a = \sqrt{(r_a - r)(r_b + r_c)}$를 작도한다.
(3) $b = \sqrt{(r_b - r)(r_a + r_c)}$를 작도한다.

(4) $c=\sqrt{(r_c-r)(r_a+r_b)}$를 작도한다.
(5) $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$인 삼각형 ABC를 작도한다. □

문제해결 과정에서 $r=\dfrac{r_ar_br_c}{r_ar_b+r_br_c+r_cr_a}$, $a=\sqrt{(r_a-r)(r_b+r_c)}$의 작도를 이용했다. $\dfrac{r_ar_br_c}{r_ar_b+r_br_c+r_cr_a}$의 작도는 r_ar_b; $r_ar_br_c$; r_br_c; r_cr_a; $r_ar_b+r_br_c+r_ar_c$; $\dfrac{r_ar_br_c}{r_ar_b+r_br_c+r_cr_a}$의 순서로 작도하면 된다. 한편 선분 $\sqrt{(r_a-r)(r_b+r_c)}$의 작도는 r; r_a-r; r_b+r_c; $(r_a-r)(r_b+r_c)$, $\sqrt{(r_a-r)(r_b+r_c)}$의 순서로 이루어진다.

바탕문제 3. $\angle A$, a, r_b가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석. $\angle A$, a, r_b가 주어지고, 이를 이용하여 삼각형 ABC를 작도하였다고 가정하자(그림 4). 삼각형 ABC에서 변 BC와 각 A가 주어졌으므로, $\angle B$ 또는 $\angle C$를 알면 삼각형 ABC를 작도할 수 있다.

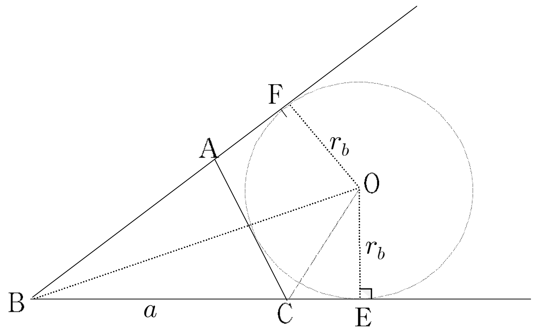
<그림 4>에서 $\angle ACE=180^\circ-\angle C$이므로, 각 ACE를 작도하면, 즉 각 OCE를 작도하면, 각 C를 작도할 수 있다. $\angle OCE=\alpha$라 하고, α를 포함하는 등식을 만들자. 직각삼각형 OCE에서 $\tan\alpha=\dfrac{r_b}{CE}$, $r_a=CE\cdot\tan\alpha$이다. 한편 $\angle B=\angle ACE-\angle A=2\alpha-\angle A$이다.

직각삼각형을 만들기 위해, 선분 BO를 작도하자. 그러면 선분 BO는 각 B의 이등분선에 속하며, $\angle OBE=\alpha-\dfrac{1}{2}\angle A$가 된다. 직각삼각형 OBE에서 $\tan\left(\alpha-\dfrac{A}{2}\right)=\dfrac{r_b}{BE}=\dfrac{r_b}{a+CE}$, $r_b=(a+CE)\tan\left(\alpha-\dfrac{A}{2}\right)$이다.

이제 $r_a=CE\cdot\tan\alpha$에서 $CE=\dfrac{r_a}{\tan\alpha}$이므로, $r_b=\left(a+\dfrac{r_a}{\tan\alpha}\right)\cdot\tan\left(\alpha-\dfrac{A}{2}\right)$이다. 이때 각 A가 주어졌으므로, $\tan\dfrac{A}{2}$를 작도할 수 있다. 즉 상수 k에 대해 $\tan\dfrac{A}{2}=k$라 놓고, $\tan\alpha=x$라 두자. $\tan\left(\alpha-\dfrac{A}{2}\right)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\dfrac{A}{2}}{1+\tan\alpha\cdot\tan\dfrac{A}{2}}$이므로, $r_b=\left(a+\dfrac{r_a}{x}\right)\left(\dfrac{x-k}{1+xk}\right)$가 된다.

이제 x에 대해 정리하면, $(a-r_bk)x^2-akx-r_bk=0$이 된다. 근의 공식을 이용하면, $x=\dfrac{ak\pm\sqrt{a^2k^2+4r_bk(a-r_bk)}}{2(a-r_bk)}$를 얻을 수 있다. 이때 $a-r_bk>0$이면, 제곱근호 안이 ak보다 크므로, $x=\dfrac{ak+\sqrt{a^2k^2+4r_bk(a-r_bk)}}{2(a-r_bk)}$만 구하는 근이 된다. 한편 $a-r_bk<0$이면, 제곱근호 안이 ak보다 작아지므로, $ak\pm\sqrt{a^2k^2+4r_bk(a-r_bk)}$ 모두 양의 값을 가지며, 결국 x값은 음이 된다. 그런데 $x=\tan\alpha$이며 α는 예각이므로, x는 음의 값을 가질 수 없다. 그러므

로 구하는 x값은 $\dfrac{ak+\sqrt{a^2k^2+4r_bk(a-r_bk)}}{2(a-r_bk)}$이며, 이것은 작도가 가능하다.



<그림 4>

작도순서.

(1) $\frac{1}{2}\angle A$를 작도하여 $\tan\frac{A}{2}=k$인 선분 k를 작도한다.

(2) $\dfrac{ak+\sqrt{a^2k^2+4r_bk(a-r_bk)}}{2(a-r_bk)}$인 선분 x를 작도한다.

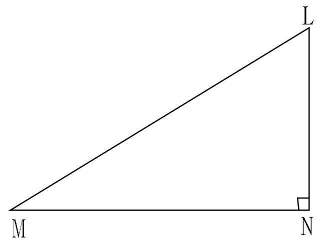
(3) $\tan\alpha=\tan OCE=x$가 되도록 각 OCE를 작도한다.

(4) $\angle B=\angle ACE-\angle A=2\angle OCE-\angle A$가 되도록 각 B를 작도한다.

(4) $\angle A$, $\angle B$, $BC=a$인 삼각형 ABC를 작도한다. □

문제해결 과정에서 $\tan\frac{A}{2}=k$인 선분 k의 작도, $\dfrac{ak+\sqrt{a^2k^2+4r_bk(a-r_bk)}}{2(a-r_bk)}$인 선분 x의 작도, $\tan OCE=x$인 각 OCE의 작도를 이용하였다. 우선 $\tan\frac{A}{2}=k$인 선분 k를 작도하는 방법을 살펴보자. $\frac{1}{2}\angle A$를 포함하는 임의의 직각삼각형 LMN을 작도하자(그림 5). $\angle LMN=\frac{1}{2}\angle A$, $MN=l$, $LN=m$이라 하자. 그러면 $\tan\frac{A}{2}=k=\frac{m}{l}$이다. 즉 $k=\frac{m}{l}$인 선분 k를 작도해야 한다. 이것은 <그림 1>에서 $AB=m$, $BC=1$, $AL=l$이라 놓으면, $DQ=k$가 얻어진다.

한편 $\dfrac{ak+\sqrt{a^2k^2+4r_bk(a-r_bk)}}{2(a-r_bk)}$인 선분 x는 선분들 ak, a^2k^2; r_bk; $a-r_bk$; $4r_bk(a-r_bk)$; $\sqrt{a^2k^2+4r_bk(a-r_bk)}$; $2(a-r_bk)$를 차례로 작도하면 얻을 수 있다. 이제 $\tan OCE=x$인 각 OCE를 작도하자. <그림 5>에서 $MN=1$, $LN=x$인 직각삼각형 LMN을 작도하여 <그림 1>을 이용하면, 각 OCE를 얻을 수 있다.



<그림 5>

본 연구에서는 이들 바탕문제를 활용하여, 방접원의 반지름에 관련된 삼각형의 다양한 작도문제들을 해결하고, 이들 작도문제를 해결방법을 중심으로 그 관련성을 사슬의 형태로 제시할 것이다.

IV. 바탕문제를 활용한 삼각형 작도문제의 해결

1. 바탕문제 1을 이용한 삼각형 작도문제의 해결

바탕문제 1은 $\angle A$, h_a, r_a가 주어진 삼각형 ABC를 작도하는 문제이다. 이 문제를 바탕으로 해결할 수 있는 방접원과 관련된 삼각형의 작도문제를 살펴보자.

문제 1.1. $\angle A$, r, r_a가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.
분석. $\angle A$, r, r_a를 이용하여 h_a를 작도할 수 있다면, 바탕문제 1을 이용하여 문제를 해결할 수 있다. 성질 #5에 의해 $\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}=\frac{2}{h_a}$가 성립하므로, $h_a=\frac{2rr_a}{r_a-r}$이다. 즉 r, r_a가 주어지면, h_a를 작도할 수 있으므로, 주어진 문제를 바탕문제 1로 귀착시켜 해결할 수 있다.

작도순서.
(1) $h_a=\frac{2rr_a}{r_a-r}$를 작도한다.
(2) 바탕문제 1을 이용하여, $\angle A$, h_a, r_a가 주어진 삼각형 ABC를 작도한다. □

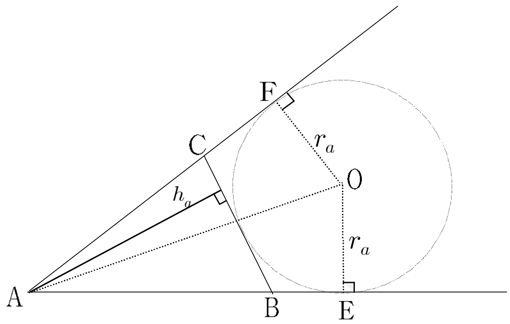
문제 해결과정에서 $\frac{2rr_a}{r_a-r}$인 선분 h_a의 작도를 이용하였다. h_a를 작도하려면, rr_a; $2rr_a$; r_a-r; $\frac{2rr_a}{r_a-r}$의 순서로 작도하면 된다.

삼각형의 작도순서는 분석과정으로부터 곧바로 얻어질 수 있으므로, 이제부터는 문제해결을 기술할 때에 작도순서는 생략하기로 하자.

문제 1.2. h_a, r_a, $2p$가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석. h_a, r_a, $2p$를 이용하여 $\angle A$를 작도할 수 있다면, 바탕문제 1을 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다. 우선 h_a, r_a, $2p$가 주어진 삼각형 ABC가 작도되었다고 가정하고, 문제해결을 위한 분석을 수행하자(그림 6).

원 밖의 점으로부터 접점까지의 거리는 같으므로, AE+AF=$2p$이며, AE=AF=p이다. 직각삼각형 OAE에서 AE, OE가 주어졌으므로, 직각삼각형 OAE를 작도할 수 있다. 그리고 $2\angle OAE = \angle A$이므로, 각 A가 작도된다. □



<그림 6>

문제 1.1의 해결과정에서는 대수식 $\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} = \frac{2}{h_a}$을 이용하여 h_a의 작도가능성에 대해 조사했지만, 문제 1.2의 해결과정에서는 도형의 성질을 이용하여 작도가능한 삼각형을 찾아 각 A를 작도하였다. 살펴본 것과 같이, 본 연구에서 삼각형의 작도문제 해결은 대수식을 이용한 작도가능성 조사, 주어진 조건들로 작도가능한 도형 찾기로 나누어 생각할 수 있다.

문제 1.3. a, h_a, r_a가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석. a, h_a, r_a를 이용하여 각 A를 작도할 수 있다면, 바탕문제 1을 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다. <그림 6>에서 AE=p를 구하면, 삼각형 OAE가 작도되며, 이로부터 각 A를 구할 수 있다.

삼각형의 넓이 S와 방접원의 반지름 r_a 사이에 $r_a = \frac{S}{p-a}$(성질 #1)가 성립하므로, $p = a + \frac{S}{r_a}$이다. 그리고 $S = \frac{1}{2}ah_a$이므로, $p = \frac{2ar_a + ah_a}{2r_a}$이다. 그런데 a, h_a, r_a가 주어졌으므로, p를 작도할 수 있으며, 이로부터 각 A가 작도된다. □

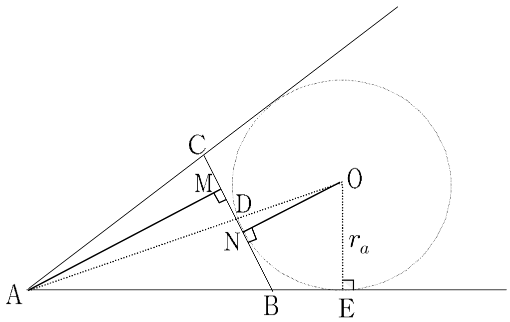
문제 1.4. h_a, s_a, r_a가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석. h_a, s_a, r_a를 이용하여 각 A를 작도할 수 있다면, 바탕문제 1을 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다.

<그림 7>에서 각 A를 작도하려면, 삼각형 AOE를 작도해야 한다. 직각삼각형 AOE에서

$\angle OEA=90^{\circ}$, $OE=r_a$, AO=AD+DO이다. 그런데 AD는 s_a이므로, AO=s_a+DO이다. 즉 DO를 작도하면, 삼각형 AOE를 작도할 수 있다.

이제 닮음인 삼각형 AMD와 OND를 생각하자. $\dfrac{AM}{AN}=\dfrac{ON}{OD}$이므로, $OD=\dfrac{s_a \cdot r_a}{h_a}$이며, 이것은 작도가 가능하다. 이로부터 $AO=s_a+\dfrac{s_a \cdot r_a}{h_a}$가 작도된다. □



<그림 7>

문제 1.5. $\angle A$, s_a, r_a가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석. $\angle A$, s_a, r_a를 이용하여 h_a를 작도할 수 있다면, 바탕문제 1을 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다.

<그림 7>에서 삼각형 OAE를 생각하자. 각 A가 주어졌으므로 $\angle AOE=90^{\circ}-\dfrac{1}{2}\angle A$를 작도할 수 있고, $OE=r_a$, $\angle OEA=90^{\circ}$이므로, 삼각형 OAE를 작도할 수 있다. 즉 선분 AO가 작도되므로, $OD=OA-AD=OA-s_a$도 작도된다.

이제 닮음인 삼각형 AMD와 OND를 생각하자. $\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{ON}{OD}$이므로, $AM=h_a=\dfrac{r_a \cdot s_a}{OD}$이다. 그런데 r_a, s_a, OD가 작도되었으므로, h_a를 작도할 수 있다. □

해결과정을 바탕문제 1로 귀착시킬 수 있는 문제 1.1-1.5를 살펴보았다. 바탕문제와 이들 문제의 관계를 도식으로 나타내면 <그림 8>과 같다. 이러한 문제해결 과정의 관련성 형성은 문제들 사이의 연결성을 밝히며, 문제해결의 탐색수행에서 방향성을 제시하는 중요한 암시가 될 수 있다.

문제 1.1	**문제 1.2**	**문제 1.3**	**문제 1.4**	**문제 1.5**
$\angle A,\ r,\ r_a$	$h_a,\ r_a,\ 2p$	$a,\ h_a,\ r_a$	$h_a,\ s_a,\ r_a$	$\angle A,\ s_a,\ r_a$

바탕문제 1

$\angle A,\ h_a,\ r_a$

<그림 8>

이제 문제 1.1을 바탕으로 해결할 수 있는 작도문제들의 사슬을 구성하기 위해, 해결 과정이 문제 1.1로 귀착될 수 있는 문제들을 살펴보자.

문제 1.1.1. $\angle A$, r_a, a가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석. $\angle A$, r_a가 주어졌으므로, r을 $\angle A$, r_a, a를 이용하여 작도할 수 있다면, 문제 1.1을 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다.

등식 $r_a = \dfrac{S}{p-a}$(성질 #1), $r = \dfrac{S}{p}$(성질 #2)로부터 $r = \dfrac{(p-a)r_a}{p}$이 성립하므로, 우선 p를 작도하자. <그림 7>에서 $\angle A$, r_a가 주어졌으므로, 직각삼각형 OAE를 작도할 수 있다. 이로부터 $AE = p$를 얻게 되며, $r = \dfrac{(p-a)r_a}{p}$을 작도할 수 있다. □

문제 1.1.2. r, r_a, $2p$가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석. r, r_a, $2p$를 이용하여 $\angle A$를 작도할 수 있다면, 문제 1.1을 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다. 문제 1.2의 풀이에서 r_a, $2p$가 주어진 경우에 직각삼각형 OAE를 작도하여(그림 6), 각 A를 구할 수 있다. □

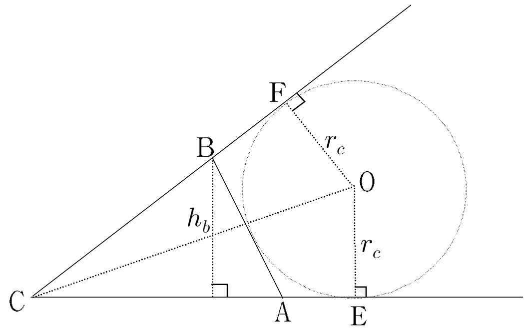
문제 1.1.3. r_a, a, $2p$가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석. r_a, a, $2p$를 이용하여 $\angle A$를 작도할 수 있다면, 문제 1.1.1을 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다. r_a, $2p$가 주어진 경우에 직각삼각형 OAE를 작도하여(그림 6), 각 A를 구할 수 있다. □

문제 1.1.4. r_a, a, h_b가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석. r_a, a, h_b를 이용하여 $2p$를 작도할 수 있다면, 문제 1.1.3을 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다. 우선, 그러한 삼각형 ABC가 작도되었다고 가정하자(그림 9).

직각삼각형 OCE를 작도하면, $CE = p$를 얻을 수 있다. 삼각형 OCE를 작도하기 위해, $\angle OCE = \dfrac{1}{2}\angle C$를 작도하면 된다. B에서 내린 수선의 발을 H라 하면, 직각삼각형 HBC에서 빗변 BC는 a이고, $BH = h_b$이므로, 이 삼각형은 작도할 수 있다. 이로부터 각 C가 작도되며, 직각삼각형 OCE를 작도할 수 있다. □



<그림 9>

문제 1.1.5. a, h_b, r_c가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석. a, h_b, r_c를 이용하여 r_a를 작도할 수 있다면, 문제 1.1.4을 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다. 성질 #4에 의해, $r_a = \dfrac{r_c h_b}{2r_c - h_b}$가 성립한다. 그러므로 h_b, r_c를 이용하여, r_c를 작도할 수 있다. □

이제 문제 1.1.1을 이용하여 해결할 수 있는 삼각형 작도문제를 살펴보자.

문제 1.1.6. $\angle A$, r_a, R이 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

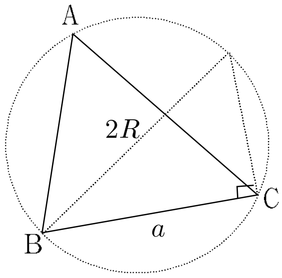
분석. $\angle A$, r_a, R을 이용하여 a를 작도할 수 있다면, 문제 1.1.1을 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다. 사인공식에 의해 $a = 2R \cdot \sin A$이므로, a를 작도할 수 있다. □

문제의 해결과정에서 각 A가 주어진 경우, $\sin A$의 작도 방법을 이용하였다. 이를 위해, 각 A의 한 변에 선분 AD를 작도하자. 이제 D로부터 각 A의 다른 변에 수선 DF를 작도하면, 직각삼각형 FAD를 얻게 된다. 그러면 $\sin A = \dfrac{DF}{AD}$인데, AD, DF가 주어졌으므로, $\sin A$와 같은 선분을 작도할 수 있다.

문제 1.1.7. r_a, R, a가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석. r_a, R, a를 이용하여 $\angle A$를 작도할 수 있다면, 문제 1.1.6을 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다. 우선, 그러한 삼각형 ABC가 작도되었다고 가정하자(그림 10).

$2R$은 외접원의 지름이며, 지름에 대한 원주각은 90°이다. 즉 선분 BC의 끝점 C에서 BC에 직교하도록 선분을 작도하고, 점 B에서 반지름이 $2R$인 원을 작도하자. 그러면 각 A를 얻을 수 있다. □



<그림 10>

문제 1.1.8. r_a, R, r이 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

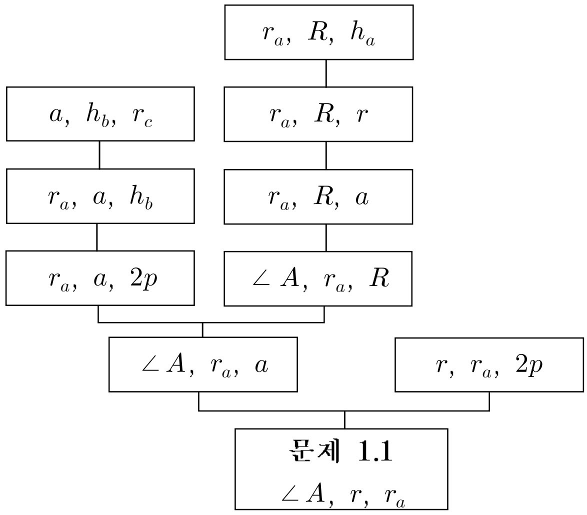
분석. r_a, R, r을 이용하여 a를 작도할 수 있다면, 문제 1.1.7을 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다. 성질 #12에 의해, $a^2+(r_a-r)^2=4R(r_a-r)$이 성립한다. 이로부터 $a^2=4R(r_a-r)-(r_a-r)^2=(r_a-r)(4R-r_a+r)$이므로, a가 작도된다. □

문제해결 과정에서 $a^2=(r_a-r)(4R-r_a+r)$의 작도 방법을 이용하였다. 등식을 만족시키는 a의 작도는 변이 r_a-r, $4R-r_a+r$인 직사각형과 넓이가 같은 정사각형을 작도하는 문제로, 이미 앞에서 작도 방법을 살펴보았다.

문제 1.1.9. r_a, R, h_a가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석. r_a, R, h_a를 이용하여, r을 작도할 수 있다면, 문제 1.1.8을 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다. 성질 #7에 의해, $r=\dfrac{r_a h_a}{h_a+2r_a}$가 성립한다. 결국 r을 작도할 수 있다. □

이제 해결과정이 문제 1.1로 귀착되는 작도문제들의 사슬을 <그림 11>과 같이 구성할 수 있다. 살펴본 삼각형 작도문제 이외에 다른 작도문제들도 <그림 11>의 사슬에 추가시킬 수도 있으며, 이를 통해 문제들의 관련성이 확장될 수 있다.



<그림 11>

한편, 문제 1.3, 즉 a, h_a, r_a가 주어진 삼각형의 작도문제를 이용하여, 문제 1.3.1을 해결할 수 있다.

문제 1.3.1. a, r_a, r이 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.
분석. a, r_a, r을 이용하여, h_a를 작도할 수 있다면, 문제 1.3을 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다. 성질 #6에 의해, $h_a = \dfrac{2rr_a}{r_a - r}$이 성립한다. 결국 h_a를 작도할 수 있다. □

이제 문제 1.4, 즉 h_a, s_a, r_a가 주어진 삼각형의 작도문제를 이용한 문제해결을 살펴보자.

문제 1.4.1. s_a, r_a, r이 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.
분석. s_a, r_a, r을 이용하여, h_a를 작도할 수 있다면, 문제 1.4를 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다. 성질 #6에 의해, $h_a = \dfrac{2rr_a}{r_a - r}$이 성립한다. 결국 h_a를 작도할 수 있다. □

2. 바탕문제 2를 이용한 삼각형 작도문제의 해결

바탕문제 2는 r_a, r_b, r_c가 주어진 삼각형 ABC를 작도하는 문제이다. 이 문제를 이용하여 해결할 수 있는 방접원과 관련된 삼각형의 작도문제를 살펴보자.

문제 2.1. r_a, h_a, h_b가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.
분석. r_a, h_a, h_b를 이용하여, r_b, r_c를 작도할 수 있다면, 바탕문제 2를 이용하여 삼각형

ABC를 작도할 수 있다. 성질 #4에 의해, $r_c = \dfrac{h_b r_a}{2r_a - h_b}$, $r_b = \dfrac{h_a r_c}{2r_c - h_a}$이 성립한다. 이로부터 r_b, r_c를 작도할 수 있다. □

문제 2.1.1. h_a, h_b, r_c가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석. h_a, h_b, r_c를 이용하여, r_a를 작도할 수 있다면, 문제 2.1을 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다. 성질 #4에 의해, $r_a = \dfrac{h_b r_c}{2r_c - h_b}$이 성립한다. 결국 r_a를 작도할 수 있다. □

문제 2.2. r_a, r_b, r이 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석. r_a, r_b, r을 이용하여, r_c를 작도할 수 있다면, 바탕문제 2를 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다. 성질 #8에 의해, $\dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_a} - \dfrac{1}{r_b}$, 즉 $\dfrac{1}{r_c} = \dfrac{r_a r_b - r r_b - r r_a}{r r_a r_b}$이 성립한다. 이로부터 r_c를 작도할 수 있다. □

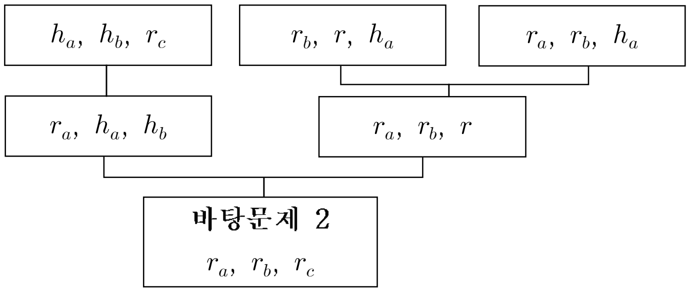
문제 2.2.1. r_b, r, h_a가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석. r_b, r, h_a를 이용하여, r_a를 작도할 수 있다면, 문제 2.2를 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다. 성질 #5에 의해, $\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_a} = \dfrac{2}{h_a}$, 즉 $r_a = \dfrac{r h_a}{h_a - 2r}$가 성립한다. 이로부터 r_a를 작도할 수 있다. □

문제 2.2.2. r_a, r_b, h_a가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석. r_a, r_b, h_a를 이용하여, r을 작도할 수 있다면, 문제 2.2를 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다. 성질 #5에 의해, $\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_a} = \dfrac{2}{h_a}$, 즉 $r = \dfrac{r_a h_a}{h_a + 2r_a}$가 성립한다. 이로부터 r을 작도할 수 있다. □

이제 해결과정이 바탕문제 2로 귀착되는 작도문제들의 사슬을 <그림 12>와 같이 구성할 수 있다.



<그림 12>

3. 바탕문제 3을 이용한 삼각형 작도문제의 해결

바탕문제 3은 $\angle A$, a, r_b가 주어진 삼각형 ABC를 작도하는 문제이다. 이 문제를 이용하여 해결할 수 있는 방접원과 관련된 삼각형의 작도문제를 살펴보자.

문제 3.1. a, r_b, h_a가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석. a, r_b, h_a를 이용하여, $\angle A$를 작도할 수 있다면, 바탕문제 3을 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다. 외접원의 반지름 R을 구하면, 문제 1.1.7의 풀이와 같은 방법으로, $\angle A$를 작도할 수 있다.

성질 #10에 의해, $4R=r_a+r_b+r_c-r$이므로, r_a, r_c를 먼저 구해야 한다. 성질 #4에 의해 $r_c=\dfrac{h_a r_b}{2r_b-h_a}$가 성립하므로, h_a, r_b를 이용하여 r_c를 작도할 수 있다. 한편, 성질 #11에 의해 $a^2=(r_a-r)(r_b+r_c)$, 즉 $r_a-r=\dfrac{a^2}{r_b+r_c}$가 성립한다. 이것을 $4R=r_a+r_b+r_c-r$에 대입하며, $4R=r_a+r_b+r_c-r=\dfrac{a^2}{r_b+r_c}+r_b+r_c$이다. 결국 r_b, r_c를 이용하면, R을 작도할 수 있다. □

문제 3.1.1. a, r_b, r_c가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석. a, r_b, r_c를 이용하여, h_a를 작도할 수 있다면, 문제 3.1을 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다. 성질 #3에 의해, $h_a=\dfrac{2r_b r_c}{r_b+r_c}$가 성립한다. 결국 h_a를 작도할 수 있다. □

문제 3.1.2. r_b, r_c, R이 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석. r_b, r_c, R을 이용하여, a를 작도할 수 있다면, 문제 3.1.1을 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다. 성질 #11에 의해 $a^2=(r_a-r)(r_b+r_c)$이고, 성질 #10에 의해 $r_a-r=4R-r_b-r_c$이 성립한다. 이로부터 $a^2=(4R-r_b-r_c)(r_b+r_c)$이 성립하며, a를 작도할 수 있다. □

문제 3.1.3. r_b, R, h_a가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석. r_b, R, h_a을 이용하여, r_c를 작도할 수 있다면, 문제 3.1.2를 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다. 성질 #4에 의해, $r_c=\dfrac{h_a r_b}{2r_b-h_a}$가 성립한다. 이로부터 r_c를 작도할 수 있다. □

문제 3.2. $\angle A$, r_b, R이 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

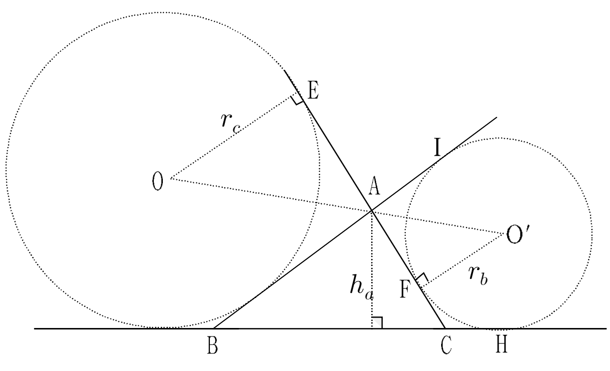
분석. $\angle A$, r_b, R을 이용하여, a를 작도할 수 있다면, 바탕문제 3을 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다. 사인 정리에 의해, $a=2R\cdot\sin A$가 성립한다. 이로부터 a를 작도할 수 있다. □

문제 3.2.1. $\angle A$, r_b, h_a가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석. $\angle A$, r_b, h_a를 이용하여, R을 작도할 수 있다면, 문제 3.2를 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다. 사인 정리에 의해, $2R=\dfrac{a}{\sin A}$이 성립하므로, a를 구하면 R을 작도할 수 있다. 한편 성질 #4에 의해 $r_c=\dfrac{r_b h_a}{2r_b-h_a}$가 성립하므로, r_c를 작도할 수 있다.

이제 삼각형 ABC가 작도되었다고 가정하고, r_b, r_c, h_a를 표시하여 분석을 수행하자(그림 13). 각 BAE는 $180^\circ-\angle A$이므로, $\angle OAE=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle A$가 되며, $\angle EOA=90^\circ-\left(90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle A\right)=\dfrac{1}{2}\angle A$가 된다. 즉 각 OAE, EOA를 작도할 수 있다. 이로부터 직각삼각형 OAE가 작도된다. 같은 방법으로 직각삼각형 O′AF도 작도된다는 것을 알 수 있다.

이제 선분 EF를 생각하자. BI=BH이고 AI=AF, CF=CH이므로, BI=BH$=p$이다. 이로부터 AF$=p-c$이다. 유사한 방법으로, $AE=p-b$가 됨을 알 수 있다. 결국 EF=EA+AF $=2p-(b+c)=a$가 된다. 즉 삼각형 OEA, O′AF를 작도하면, a를 얻게 된다. □

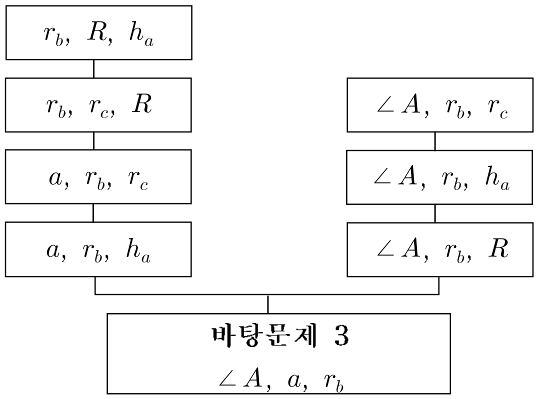


<그림 13>

문제 3.2.2. $\angle A$, r_b, r_c가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석. $\angle A$, r_b, r_c를 이용하여, h_a를 작도할 수 있다면, 문제 3.2.1을 이용하여 삼각형 ABC를 작도할 수 있다. 성질 #3에 의해, $h_a = \dfrac{2r_b r_c}{r_b + r_c}$가 성립한다. 이로부터 h_a를 작도할 수 있다. □

이제 해결과정이 바탕문제 3으로 귀착되는 작도문제들의 사슬을 <그림 14>와 같이 구성할 수 있다.



<그림 14>

V. 결론

본 연구에서는 작도문제를 해결하는 대수적 방법의 본질, 의의에 대해 고찰하고, 대수적 방법을 활용하여 방접원의 반지름(들)이 조건의 일부로 주어진 삼각형 작도문제를 해결하며, 바탕문제를 중심으로 해결된 작도문제를 체계화시켰다.

대수적 방법을 이용한 작도문제 해결에서는 구하는 것이 어떤 선분이 되도록 문제를 진술하며, 구하는 선분을 주어진 선분들의 대수적 관계식으로 표현하며, 얻어진 관계식에 해당하는 선분을 자와 컴퍼스를 이용하여 작도한다. 특히 대수적 방법은 주어진 문제가 자와 컴퍼스로 작도가 가능한지 확인하는 도구가 될 수 있으며, 작도가 가능한 경우에 구체적인 문제해결을 위한 암시를 제공하므로, 작도문제 해결의 중요한 도구가 될 수 있다.

본 연구에서는 방접원의 반지름을 중심으로 높이, 각의 이등분선, 내접원의 반지름, 외접원의 반지름, 넓이, 둘레의 절반이 조건으로 제시된 삼각형의 작도문제들을 해결하였다. 이 작도문제들을 체계적으로 정리하고 작도문제들의 관련성을 밝히기 위해, 바탕문제의 개념을 이용했다. 바탕문제는 다른 작도문제들의 해결에 있어 도구적인 역할을 하는 문제이지만, 그렇다고 가장 단순한 방법으로 해결되는 문제를 의미하는 것은 아니다.

본 연구에서는 바탕문제 1로 $\angle A$, h_a, r_a가 주어진 삼각형의 작도문제, 바탕문제 2로 r_a, r_b, r_c가 주어진 삼각형의 작도문제, 바탕문제 3으로 $\angle A$, a, r_b가 주어진 삼각형의 작도문제를 추출하고, 이들 문제의 해결과정을 상세히 제시하였다.

바탕문제 1로 귀착되는 삼각형 작도문제는 $(\angle A,\ r,\ r_a)$, $(h_a,\ r_a,\ 2p)$, $(a,\ h_a,\ r_a)$, $(h_a,\ s_a,\ r_a)$, $(\angle A,\ s_a,\ r_a)$, $(\angle A,\ r_a,\ a)$, $(r,\ r_a,\ 2p)$, $(r_a,\ a,\ 2p)$, $(r_a,\ a,\ h_b)$, $(a,\ h_b,\ r_c)$, $(\angle A,\ r_a,\ R)$, $(r_a,\ R,\ a)$, $(r_a,\ R,\ r)$, $(r_a,\ R,\ h_a)$, $(a,\ r_a,\ r)$, $(s_a,\ r_a,\ r)$이 주어진 경우에 삼각형을 작도하는 문제이다. 본 연구에서는 이 문제들을 대수적 방법으로 해결하는 구체적인 방법, 문제해결에 사용된 방접원의 성질을 자세히 기술하였다.

바탕문제 2로 귀착되는 삼각형 작도문제는 $(r_a,\ h_a,\ h_b)$, $(h_a,\ h_b,\ r_c)$, $(r_a,\ r_b,\ r)$, $(r_b,\ r,\ h_a)$, $(r_a,\ r_b,\ h_a)$이 주어진 경우에 삼각형을 작도하는 문제이다. 한편 바탕문제 3으로 귀착되는 삼각형 작도문제는 $(a,\ r_b,\ h_a)$, $(a,\ r_b,\ r_c)$, $(r_b,\ r_c,\ R)$, $(r_b,\ R,\ h_a)$, $(\angle A,\ r_b,\ R)$, $(\angle A,\ r_b,\ h_a)$, $(\angle A,\ r_b,\ r_c)$가 주어진 경우에 삼각형을 작도하는 문제이다. 본 연구에서는 이 문제들과 바탕문제 사이의 관련성 뿐만 아니라, 이들 문제의 해결과정 사이의 관련성도 규명하여 이를 체계화하여 도식으로 나타냈다.

본 연구의 결과는 수학 심화학급이나 과학영재교육원의 창의적 수학 탐구의 자료로 활용될 수 있을 것이며, 삼각형 작도문제의 체계적이고 포괄적인 후속연구를 위한 기초자료가 될 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

교육부 (1999). 중학교 교육과정 해설(III), 서울: 대한교과서주식회사.

김경선, 한인기 (2007a). 삼각형의 방접원 및 사면체의 방접구에 관련된 다양한 성질 탐구, 수학교육논문집 제 21권 3호, 385-406.

김경선, 한인기 (2007b). 삼각형의 넓이 $S=\sqrt{rr_ar_br_c}$에 관련된 방접원의 다양한 성질 탐구, 경상대학교 중등교육연구 제 19집, 133-142.

김주봉 (1999). 정다각형의 작도법에 관한 고찰, 청주교육대학교 과학교육연구소 논문집 제 20권, 73-88.

박명희, 신경희 (2006). Clairaut의 <기하학 원론>에 근거한 7-나 단계 작도단원의 자료개발과 적용에 관한 연구, 한국수학사학회지 제 19권 4호, 117-132.

장혜원 (1997). 중학교 기하 영역 중 작도 단원에 관한 고찰, 대한수학교육학회논문집 제 7권 2호, 327-336.

정창현 (1992). 평면 도형의 작도에 관한 고찰, 수학교육 제 31권 4호, 83-92.

조완영, 정보나 (2002). 7차 수학과 교육과정 작도 영역의 교과서와 수업사례 분석, 학교수학 제 4권 4호, 601-615.

한인기 (1999). 작도 문제 해결 방법, 수학교육 논문집 제 9권, 153-164.

한인기 (2005). 교사를 위한 수학사, 서울: 교우사.

한인기, 강인주 (2000). 모어-마스케로니의 정리에 대한 고찰, 한국수학사학회지 13권 2호, 133-144.

한인기, 김문섭 (2007). 바탕문제를 활용한 정사면체와 정육면체의 절단면 작도에 대한 연구, 수학교육 제 46권 3호, 303-314.

Adler A. (1940). Teoriya Geometricheskih Postroenii, Moskva: GUPI.

Aleksandrov I.I. (2004). Sbornik Geometricheskih Zadach na Postroenie, Moskva: URSS.

Grgunov B.I. & Balk M.B. (1957). Geometricheskie Postroeniya na Ploskosti, Moskva: GUPI.
Perepelkin D.I. (1947). Geometricheskie Postroeniya v Srednei Shkole, Moskva: IAPN.

A Study on Solving Triangle Construction Problems Related with Radius of Escribed Circle Using Algebraic Method

Gong, Seon-Hye[3) · Han, Inki[4)

Abstract

In this paper we solve various triangle construction problems related with radius of escribed circle using algebraic method. We describe essentials and meaning of algebraic method solving construction problems. And we search relation between triangle construction problems, draw out 3 base problems, and make hierarchy of solved triangle construction problems. These construction problems will be used for creative mathematical investigation in gifted education.

Key Words : Inscribed circle, Triangle, Construction problem, Algebraic method, mathematics gifted education.

3) Changwon Girls' High School (seanhye@hanmail.net)
4) Correspondent author, Dept. of Math. Edu., Science-Gifted Edu. Center, Gyeongsang National University (inkiski@gsnu.ac.kr)