online©ML Comm
Sleep Medicine and Psychophysiology
수면 · 정신생리 15(1): 5-11, 2008

□종 설□

컴퓨터를 이용한 수면 뇌파 분석 : 스펙트럼, 비경향 변동, 동기화 분석 예시

Linear/Non-Linear Tools and Their Applications to Sleep EEG : Spectral, Detrended Fluctuation, and Synchrony Analyses

김 종 원

Jong Won Kim

■ **ABSTRACT**

Sleep is an essential process maintaining the life cycle of the human. In parallel with physiological, cognitive, subjective, and behavioral changes that take place during the sleep, there are remarkable changes in the electroencephalogram (EEG) that reflect the underlying electro-physiological activity of the brain. However, analyzing EEG and relating the results to clinical observations is often very hard due to the complexity and a huge data amount. In this article, I introduce several linear and non-linear tools, developed to analyze a huge time series data in many scientific researches, and apply them to EEG to characterize various sleep states. In particular, the spectral analysis, detrended fluctuation analysis (DFA), and synchrony analysis are administered to EEG recorded during nocturnal polysomnography (NPSG) processes and daytime multiple sleep latency tests (MSLT). I report that 1) sleep stages could be differentiated by the spectral analysis and the DFA ; 2) the gradual transition from Wake to Sleep during the sleep onset could be illustrated by the spectral analysis and the DFA ; 3) electrophysiological properties of narcolepsy could be characterized by the DFA ; 4) hypnic jerks (sleep starts) could be quantified by the synchrony analysis. **Sleep Medicine and Psychophysiology 2008 ; 15(1) : 5-11**

Key words: Electroencephalogram · Power spectrum · Detrended fluctuation analysis · Synchrony · Narcolepsy.

서 론

수면은 생명 유지에 필수적인 현상이며, 신경계를 비롯한 여러가지 신체 기관들에서 생리 변화가 활발하게 일어나는 과정이다. 수면 중 생리 변화 가운데 뇌 활동은, 야간 수면다원검사(nocturnal polysomnography, NPSG)나 주간 입면시간반복검사(multple sleep latency tests, MSLT) 등을 통해서, 뇌전도 시계열(혹은 뇌파, electroencephalogram, EEG)로 기록된다. 뇌파는 뇌의 전기적 생리 활동을 정량화한 수치로(1), 일반적으로 두피에 전극을 부착하여 측정한다. 이 방법은 인체에 손상을 주지 않으면서 비침습적(non-invasive)으로 비교적 쉽게 측정할 수 있고, 짧은 시간 동안 변화하는 뇌 활동을 세밀하게 분석할 수 있는 시간 분해능(time resolution)이 크고, 측정 비용이 저렴한 장점이 있다(2). 하지만, 비침습적 방식의 특성 상, 뇌 내부에서 발생한 전기적 활동을 직접 측정하는 것이 아니라, 두피로 전파된 변화를 측정하는 간접 측정 방식이라는 점과 아울러 특정된 한 부위의 변화 뿐만 아니라, 다른 부위에서 발생한 활동에 의한 간섭 영향까지 함께 측정된다는 단점들도 존재한다. 이러한 단점들을 보완하기 위해서 magnetoencephalography(MEG)(3), functional magnetic resonance image(fMRI)(4)와 같은 새로운 기술들이 개발되고 있지만, 상대적으로 고가라는 점과 측정이 용이하지 않은 단점으로 인하여, 아직까지는 EEG가 뇌 활동을 측정하는 보다 일반적인 방법으로 선호되고 있다.

뇌파의 특징을 판별하여 수면 단계 판독에 이용하거나(5), 뇌 활동의 임상적 변화와 연관시키는 시도는 기존의 여러 연구에서 찾아볼 수 있다(2). 하지만, 뇌파의 복잡성과 방대

시드니 대학교 물리학과 및 웨스트미드 병원 뇌동력학 연구소
School of Physics, The University of Sydney, Sydney, New South Wales 2006, Australia Brain Dynamics Center, Westmead Hospital and Western Clinical School of the University of Sydney, Westmead, New South Wales 2145, Australia
Corresponding author: Jong Won Kim, School of Physics, The University of Sydney, New South Wales 2006, Australia
Tel: +61-2-9351-5896, Fax: +61-2-9351-7726
E-mail: jwkim@physics.usyd.edu.au

한 자료 용량(예를 들어, 하룻밤 수면 뇌파의 경우 기록되는 양은 대략 10억 개의 숫자임)으로 인하여, 뇌파를 해석하려는 시도는 현재까지도 아직 초보적인 수준에 머무르고 있는 실정이며, 많은 경우, 뇌파는 임상 진단을 위한 보조 자료 중 하나로서만 이용되고 있을 뿐이다. 수면 뇌파의 경우, 뇌파 자체를 구체적으로 분석하기보다는, 근전도, 안전도와 더불어, 수면 단계 판독에 이용되고 있다. 이것은 방대한 양의 수면 뇌파를 기록하고 정리하는 데 걸리는 시간과 노력을 고려해 볼 때, 비효율적이다. 뿐만 아니라, 뇌 활동이 생체 리듬에 끼치는 영향력을 고찰해 볼 때, 뇌파 분석을 통해 직접적으로 수면 생리 등 뇌 활동 상태를 측정하는 것이 필요하다. 그러나 앞서 언급했듯이, 뇌파의 복잡성과 방대한 자료 용량 때문에 의학계에서 뇌파 자체를 직접 분석 연구하는 데에는 어려움이 예상된다. 하지만, 잠시 눈을 돌려 타 학문 영역을 살펴 보면, 컴퓨터 등 첨단 과학 기술 및 수학 등 기초 과학의 비약적인 발전으로 이러한 방대한 양의 자료를 분석할 수 있는 방법론은 이미 많이 개발되어있다. 본 논문에서는 타 학문 영역에서 개발된 다양한 방법론을 소개한 후, 그것들을 실제 뇌파에 적용하고 나아가 수면장애 진단에 이용할 수 있는 가능성에 대해 논의하려 한다.

본 론

이 장에서는 먼저, 일반적으로 널리 사용되는 시계열(time series) 분석 방법론을 간략하게 설명한 후, 그것들을 NPSG나 MSLT를 통해 기록된 뇌파에 적용한 예를 소개한다. 그리고, 그 결과를 토대로 수면장애 진단에 응용한 사례를 소개하려 한다.

1. 뇌파 시계열 분석 방법

시계열을 분석하는 선형 및 비선형 방법론으로는 여러가지가 있지만, 그 중 일반적으로 많이 사용되는 스펙트럼 분석(spectral analysis)(6), 탈경향 변동 분석(detrended fluctuation analysis, DFA)(6,7), 동기화 분석(synchronization likelihood, synchrony analysis)(6,8)에 대해서 개념 위주로 설명을 하고자 한다. 이 방법들에 대해, 수식을 포함한, 보다 자세한 설명은 논문 뒤에 첨부된 부록을 참조하기 바란다.

1) 스펙트럼 분석

시계열을 주파수 영역에서 분해하여, 각 주파수에 해당되는 주기적 패턴의 밀도를 정량적으로 찾을 때 사용하는 선형 분석 방법이다. 편의상, 델타파는 0.5~3 Hz, 세타파는 3~8 Hz, 알파파는 8~12 Hz, 그리고 베타파는 12~40 Hz 주파수 구간으로 구분하였다.

2) 탈경향 변동 분석

시간에 따른 시계열 변동의 크기를, 외부 요인 등에 의해 야기된 경향성을 제거한 후 측정하여 스케일링 지수 등을 찾는 비선형 분석 방법이다.

3) 동기화 분석

시계열이 두 개 이상의 채널에서 동시에 측정되었을 때, 그 시계열들 사이의 관련성을 0에서 1 사이의 숫자로 정량화하는 비선형 분석 방법이다. 여기서 0은 두시계열 사이의 상관관계가 없음을 의미하고, 1은 두 시계열이 동일하거나 혹은 한 시계열을 적절한 변환을 통해 다른 시계열로 환원시킬 수 있음을 의미한다.

2. 수면 단계 분석 예

수면 뇌파의 경우, 깊은 수면 상태로 접어 들면서 외부 자극에 대한 반응 시간이 느려지며 델타파를 비롯한 저주파수 파의 밀도가 높아진다고 알려져 있다(9). 이러한 수면에 따른 뇌파의 밀도 변화는 각 수면 단계별 파워 스펙트럼을 비교해 보면 명확히 알 수 있다. 그림 1은 기면병 환자 1명의 야간 수면 중 C3/A2에서 측정된 뇌파의 각 수면 단계별 평균 스펙트럼을 보여준다. 이러한 평균 스펙트럼을 구하기 위해서 뇌파를 30초 구간으로 자른 뒤, 그 구간들을 Rechtschaffen과 Kales(5)의 기준에 맞추어 수면 단계 분류를 하고, 각 구간에서 파워 스펙트럼을 구해, 같은 수면 단계별로 평균을 구하였다. 그림에서 볼 수 있듯이, 렘수면, 1단계수면 및 각성 상태에서는 고주파수 스펙트럼 밀도가 완만하게 감소하지만, 깊은 수면 단계로 갈수록 고주파수의 스펙트럼 밀도가 급격하게 감소함을 알 수 있다(그림에서 1~10 Hz 주파수 구간에 그려진 직선을 참조). 아울러, 2단계 수면 이후에는 고주파수 영역에서 작은 산(peak)이 있는데, 이것은 수면 상태에서 발생하는 수면 스핀들(12~14 Hz)에 의한 것으로 볼 수 있다.

그림 2는 각 수면 단계의 특징을 잘 보여주는 한 구간씩만을 뽑아 탈경향 변동 분석을 예시한 결과이다. 여기서 축적 지수는 0.1~1초 구간에서의 직선 기울기로 구해지며, 그 값의 각 수면 단계별 통계 분석 결과는 김종원 등(10)에서 찾을 수 있다. 수면 단계별 축적 지수를 비교해 보면, 축적 지수가 깊은 수면으로 진행할수록 더 커지는 것을 볼 수 있다. 이것은 얕은 단계의 수면에서는 뇌파가 상관관계

가 적은 램덤 노이즈(random noise)와 유사한 특징을 보이며, 깊은 수면 단계로 진행할수록 상관관계가 큰 브라우니언 노이즈(Brownian noise) 등과 유사한 특징을 보임을 의미한다(6,10). 참고로, 랜덤 노이즈의 축적 지수는 0.5이며 브라우니언 노이즈의 축적 지수는 1.5이다. 또한, 이것은 그림 1에서 스펙트럼 밀도의 기울기가 깊은 수면 상태에서 더 커지는 것과 연관시킬 수 있는데, 이러한 관계는 스케일링 법칙을 가지는 시계열의 일반적인 특징이다(7). 이는 곧, 스펙트럼 분석과 탈경향 분석은 방법론이 상이함에도 불구하고 유사한 결과를 보여줄 수 있음을 의미한다. 하지만, 그림 1과 2의 비교에서 알 수 있듯이, 그 결과를 정량화 하기 위해서는 각 그래프의 기울기를 구해야 하는데, 탈경향 분석이 더 용이하게 그 값을 계산할 수 있다.

3. 입면(Sleep onset) 분석 예

입면은 각성과 수면의 생리적 특성이 점진적으로 변화하는 과정으로, 뇌파의 일반적인 특성은 다음과 같다. 각성파에 해당되는 알파파 밀도가 잠이 들면서 그 활성도가 떨어지고, 저주파수 파의 활성도는 상대적으로 올라간다(11). 이 결과는 그림 3(A)에 잘 정리되어 있는데, 입면 전후로 델타파는 0.26에서 0.45로, 세타파는 0.22에서 0.33으로 증가하며, 알파파는 0.39에서 0.09로, 베타파는 0.19에서

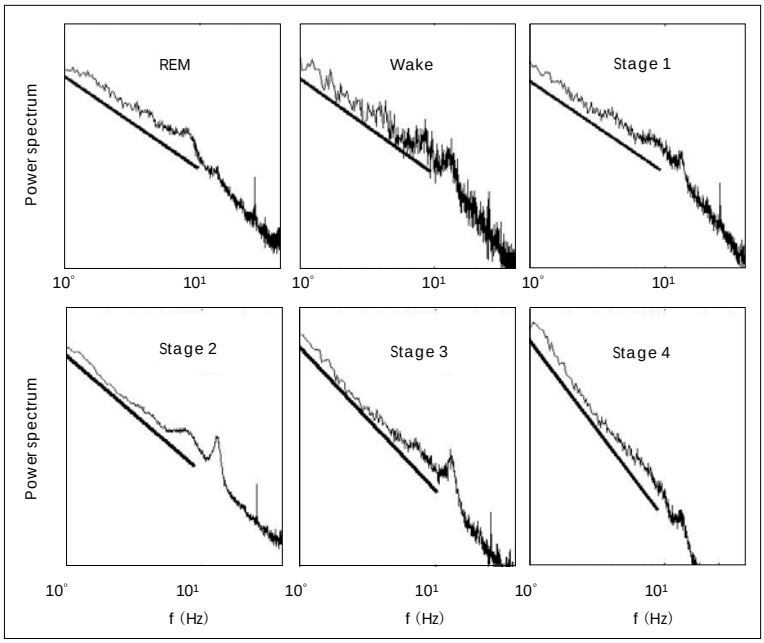

Fig. 1. Power spectra at each sleep stage. Solid lines denote slopes of the power spectra in the frequency range of 1–10 Hz. The slopes increase (become more negative) as a subject falls into deeper sleep stages.

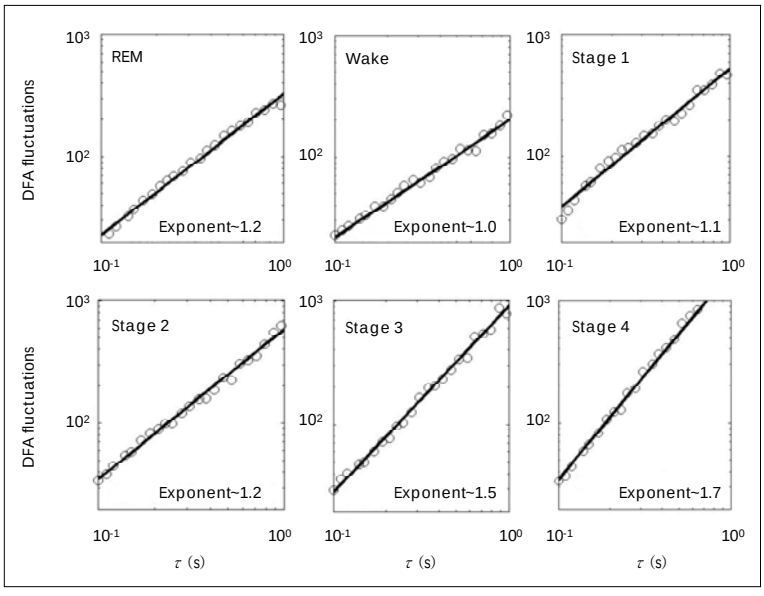

Fig. 2. Detrended fluctuations vs. time at each sleep stage. Solid lines denote the DFA scaling exponents (slopes of the fluctuations). The slopes increase as a subject falls into deeper sleep stages.

0.10으로 감소함을 알 수 있다.

동일 뇌파에 탈경향 분석을 적용한 결과는 그림 3(B)에 있는데, 입면 전후로 축적 지수가 0.73에서 1.12로 증가 한다. 입면 후의 평균 축적 지수는 야간 수면 뇌파에 대한 탈경향 변동 분석을 통해 얻어진 얕은 단계 수면의 축적 지수와 일치함을 알 수 있는데, 이것은 입면 후 곧바로 깊은 수면에 이르지는 못한다는 것을 의미한다. 그리고, 입면 전 축적 지수가 상대적으로 낮은 것은, 각성 상태에서는 뇌 활동이 많은 외부 자극에 반응함으로서 뇌파가 랜덤 노이즈와 유사한 성질을 가짐을 의미한다. 축적 지수나 스펙트럼 밀도 모두 입면 주기에서 점진적인 변화를 보여준다는 것은 일치하나, 그림 3에서 알 수 있듯이, 입면 전후 차이를 축적 지수가 보다 크고 명확하게 보여준다는 점에서 탈경향 변동 분석의 장점을 찾을 수 있다. 그림 3은 정상인 10명의 MSLT 뇌파를 분석한 결과이다. 각 개인별 입면시간 검사는 5회씩 하였으므로 총 50개의 뇌파가 분석에 사용되었다.

4. 기면병(Narcolepsy) 진단 예

기면병 진단은 NPSG와 MSLT를 통해 피검사자의 수면 양과 질을 종합적으로 분석하여 이루어진다. 이 때 가장 핵심적인 요건은 피검사자가 MSLT 시, 얼마나 빨리 입면에 접어드는가 등 행동 특징(behavioral aspects)이다(12). 뇌파도 NPSG와 MSLT 과정에서 모두 측정되긴 하지만, 뇌파의 특성이 구체적으로 분석되어 진단에 이용되기 보다는, 단순히 수면 단계 판독에만 사용되고 있다. 이 소단락에서 제시하는 예는 앞에서 설명한 탈경향 변동 분석을 이용하여 기면병 환자군의 뇌파와 정상인 대조군의 뇌파가 어떻게 다른 특성을 지니고 있는 지를 보여준다.

그림 4는 NPSG에서 측정된 뇌파에 탈경향 변동 분석을 적용한 결과이다. 앞에서 설명했듯이, 축적 지수는 그래프의 기울기로 구할 수 있는데 여기서는 그 기울기가 특성 시간 스케일(characteristic time scale)을 전후로 바뀌는 것을 알 수 있다. 그림에서 굵은 곡선으로 표시된 것은 각 그룹별 평균된 변동 값인데, 그 곡선이 꺾이는 시간이 그 특

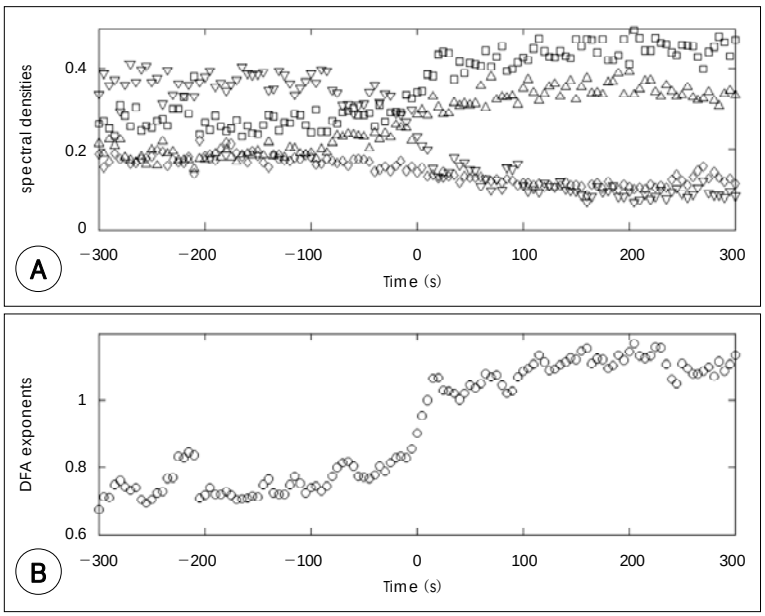

Fig. 3. Transitions of (A) spectral densities and (B) DFA scaling exponents over the sleep onset period. The symbols in the upper panel (□, △, ▽, ◇) denote spectral densities of delta-, theta-, alpha-, and beta-waves, while the symbol (○) denotes the DFA scaling exponent.

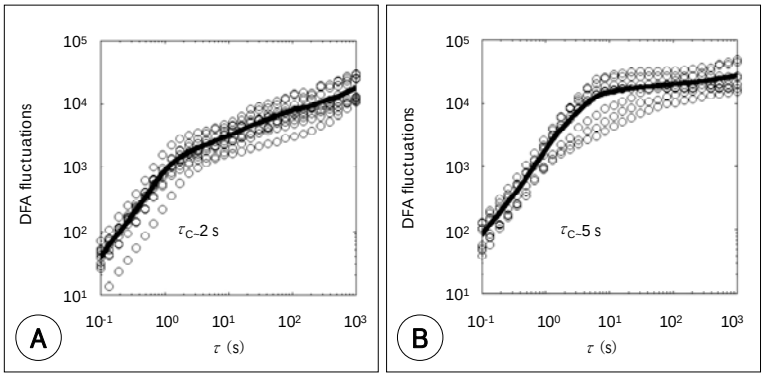

Fig. 4. Transition of EEG fluctuations over the characteristic time τ_c : (A) narcolepsy patients and (B) normal controls. Open circles denote the detrended fluctuations vs. time for each individual, while solid curves denote the mean detrended fluctuations of each group. The cross-over time of two slopes of each curves define the characteristic time.

성 시간 스케일이다. 이 값이 기면병 환자군의 경우에는 약 2초인데 비하여, 대조군은 약 5초로 두 배 정도의 차이가 있었다(10).

다음으로는, MSLT 뇌파를 탈경향 분석하여 축적 지수의 시간 변동을 기면병 환자군과 대조군으로 나누어 살펴보았다. 그림 5에서 알 수 있듯이, 환자군과 대조군 모두 입면 전후로 축적 지수가 점진적으로 증가함을 보였는데, 그 변화가 일어나는 평균 시간을 측정한 결과, 환자군은 약 300초, 정상 대조군은 200초임을 보였다(보다 자세한 통계 분석은 김종원 등(13)에서 찾을 수 있다). 이러한 두 결과는 뇌파 분석 자체만으로도 충분히 기면병 진단에 도움을 줄 수 있다는 가능성을 시사한다.

5. 동기화 분석 예

일반적으로 주간 MSLT에서는 다중 채널에서 뇌파가 측정된다. 본 연구에서는 C3/A2, F4/A1, O1/A2, P4/A1 이렇게 네 군데 채널에서 입면 전후로 측정된 뇌파를 분석하여 그들 사이의 동기화 지수를 구하였다. 그림 6(A)은 입면 시 특이한 뇌파가 측정된 hypnic jerks 혹은 sleep starts(14) 예이다. 입면 시점은 K-복합파가 발생한 50초 부근이며, hypnic jerks는 150초 이후에 발생하였다. 그리고 그림 6(B)에서는 채널 평균된 동기화 지수가 표시되었는데, 그 값이 hypnic jerks 발생 이전에는 0.12, 즉 각 채널의 뇌파가 상호 연관성이 전혀 없었지만, hypnic jerks 발생 이후에는 상관관계가 0.48로 크게 증가함을 보였다. 이러한 동기화 지수의 증가는 hypnic jerks 뿐만 아니라, 간질 뇌파가 발생하는 경우에는 빈번히 발견되며(8), 수면 뇌파의 경우에는 수면 방추파 발생한 경우에도 증가함이 보고된 바 있다(15). Hypnic jerks가 발생하지 않은 경우에 대하여, 입면 전후로 동기화 지수의 변화를 고찰하는 것도 흥미로운 연구주제이지만, 네 채널로 계산한 결과에서는 그 변화가 거의 없었다. 하지만, 뇌파 측정을 보다 많은 채널에서 한 후 동기화 지수를 계산한다면, 보다 유의미한 차이를 볼 수 있을 것이라 예상한다.

결 론

첨단 과학 기술의 발전과 더불어 이를 응용한 최신 의료

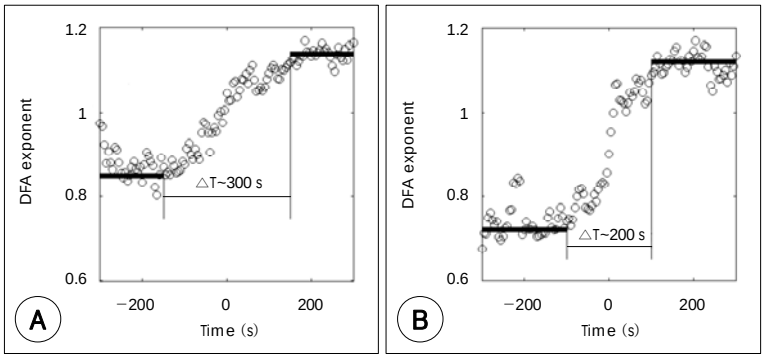

Fig. 5. Transition of the DFA scaling exponents over the sleep onset period : (A) narcolepsy and (B) normal controls. △T quantifies the sleep onset period.

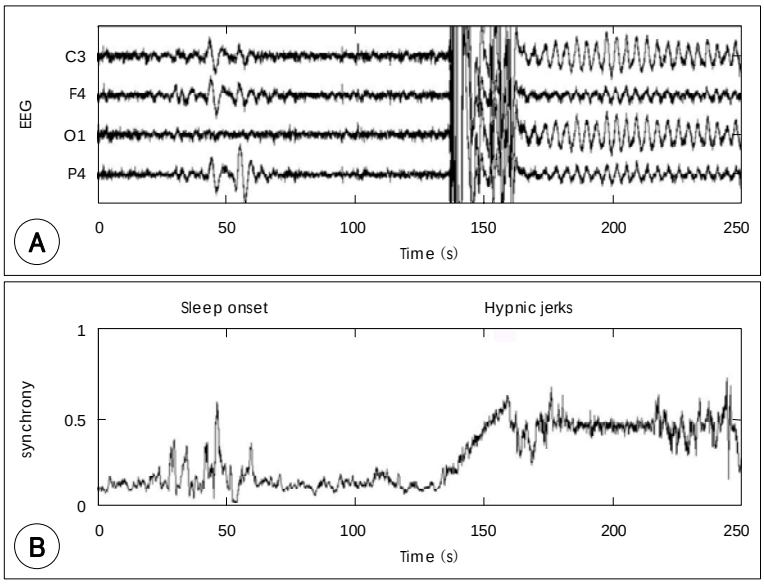

Fig. 6. Synchronized activity of the brain before and after hypnic jerks : (A) multi-channel EEG and (B) synchrony.

기기들의 등장으로 수면 중 인체의 생리 현상을 정량적으로 측정할 수 있게 되었지만, 정작 이 자료들을 자세히 분석하고, 이를 진단에 응용하는 연구의 진척은 그다지 활발하지 않은 실정이다. 가령 수면 뇌파를 예로 들어보면, 하룻밤 수면 동안, 약 10억개의 자료가 모아지나, 그 자료가 실제 임상에 주로 이용되는 것은 수면 단계 분류를 위한 기준을 제공하는 것만이 주된 사용처였다. 이에 본 논문에서는, 수학 등 기초 과학 분야에서 오랫동안 개발되어 왔던 시계열 자료 분석 도구들을 NPSG나 MSLT를 통해 기록된 뇌파에 적용하여, 뇌파 분석을 통해 수면단계 분석과 수면장애 또는 수면 관련 현상들을 직접적으로 분석하는 방법론에 대해 기술하였다. 이러한 결과는 의학의 발전이 타학문 분야와의 활발한 교류를 통해, 그 분야의 성과를 의학 혹은 의공학 분야에 접목함으로써 한층 더 진일보할 수 있음을 시사한다. 아울러, 본 논문에서 간략하게 제시되었던 방법론들과 예시들은 보다 많은 임상 실험과 분석을 통해 재검증되고, 또 이를 통해, 활발한 후속 논의가 진행될 수 있기를 기대한다.

중심 단어 : 뇌파 · 파워 스펙트럼 · 탈경향 변동 분석 동기화 · 기면병.

■ 감사문

본 논문에 사용된 수면 뇌파는 신홍범 교수님 외 을지의대 수면 연구실 관계자 분들의 조력으로 구할 수 있었으며, 뇌파 분석 결과 해석에 도움을 주신 정도언 교수님을 비롯한 서울대학교병원 수면의학센터 연구실 관계자 분들에게 감사드린다.

REFERENCES

1. Berger H. Uber das Elektrenkephalogramm des Menschen, Mitteilung. Arch. Psychiatr. Nervenkr 1929;87:527-570
2. Niedermeyer E, Lopes da Silva FH. Electroencephalography: basic principles, clinical applications, and related fileds. 4th ed, Williams and Wilkins, Baltimore;1999.
3. Cohen D. Magnetoencephalography: evidence of magnetic field produced by alpha rhythm currents. Science 1968;161:784-786
4. Frackowiak RSJ, Ashburner J, Kriston K, Penny W. Human brain function. 2nd ed, Elsevier Science (USA);2004.
5. Rechtschaffen A, Kales A. Manual of standard terminology, technique, and scoring system for sleep stages of human subjects. Brain Information Service/Brain Research Institute, UCLA, Los Angeles;1968.
6. Kantz H, Schreiber T. Nonlinear time series analysis. 2nd ed, Cambridge Press;2004.
7. Peng CK, Buldyrev SV, Goldberger AL, Havlin S, Simons M, Stanley HE. Finite-size effects on long-range correlations: Implications for analyzing DNA sequences. Phys Rev E 1993;47:3730-3733
8. Stam CJ, van Dijk BW. Synchronization likelihood: an unbiased measure of generalized synchronization in multivariate data sets. Physica D 2002;163:236-251
9. Steriade M, Dossi RC, Nunez A. Network modulation of a slow intrinsic oscillation of cat thalamocortical neurons implicated in sleep delta wave: cortically induced synchronization and brainstem cholinergic suppression. J Neurosci 1991;11:3200-3217
10. Kim JW, Shin HB, Kim EJ, Koo YJ, Choi BH, Park KS, Jeong DU. Transition of EEG fluctuation during nocturnal sleep of narcolepsy and normal controls. In preprint;2007.
11. Merica H, Gaillard JM. The EEG of the sleep onset period in insomnia: a discriminant analysis. Physiol Behav 1992;52:199-204
12. American Academy of Sleep Medicione. ICSD-2-International classification of sleep disorders: diagnostic and coding manual. 2nd ed, American Academy of Sleep Medicine;2005
13. Kim JW, Shin HB, Robinson PA, Jeong DU. Quantitative study on the sleep onset period via detrended fluctuation analysis: an application to diagnosing narcolepsy. In preprint;2007
14. Mahowald MW, Schenck CH. Sleep disorders. In: Epilepsy: a comprehensive textbook, ed by Engel Jr. J and Pedley TA. Lippincott-Raven Publishers, Philadelphia;1997. p.2705-2715
15. Ferri R, Rundo F, Bruni O, Terzano MG, Stam CJ. Dynamics of the EEG slow-wave synchronization during sleep. Clin Neurophysiol 2005;116:2783-2795

□부　　록□

본론에서 제시한 뇌전도 분석 방법론은 아래 수식들을 통해 설명할 수 있다(보다 자세한 설명은 참고 문헌 6~8에서 찾을 수 있다).

1. 스펙트럼 분석

시계열 $\chi(t)$는 다양한 주파수의 주기적 운동으로 분해될 수 있다.

$\chi(t)=\int a(f)e^{-2\pi ift}\,df,$ (1)

여기서 $a(f)$는 특정 주파수 f에 해당되는 $x(t)$의 성분을 의미하며, 이것은 Fourier transform 방법에 의해 구할 수 있다. 따라서 파워 스펙트럼은 아래와 같이 주어진다.

$P(f)=\frac{1}{N}\int_0^{\infty}|a(f)|^2\,df$ (N은 normalization factor). (2)

2. 탈경향 변동 분석

먼저, 주어진 시계열 $\chi(t)$에 대해서 적분 시계열 $y(t)$를 구한다.

$y(t)=\int_0^t[x(t')-\bar{\chi}]\,dt'$ ($\bar{\chi}=T^{-1}\int_0^T x(t)dt$). (3)

$y(t)$의 시간에 따른 변동은, 숨겨진 경향을 제거한 후, 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\nu^{(\kappa)}(\tau;t)=\sqrt{\frac{1}{\tau_0}\int^{t+\tau}[y(t')-P^{(\kappa)}(t')]^2dt'}. \quad (4)$$

여기서, $\tau_0\cong\tau$는 적절한 normalization factor이며 $P^{(\kappa)}(t')$는 $t\le t'\le t+\tau$ 구간에서 least-squares fit을 만족하는 k차 방정식으로(일반적으로 2차 이상) 구할 수 있다.

마지막으로, τ시간 구간 크기에 해당되는 모든 $\nu^{(\kappa)}(\tau)$을 평균내면, 변동의 시간에 따른 스케일 변화를 알 수 있다. 즉,

$\langle\nu^{(\kappa)}(\tau)\rangle\sim\tau^{\alpha}$ (α는 축적지수를 나타낸다). (5)

4. 동기화 분석

동일한 시간에 측정된 두 개의 1차원 시계열 $\chi(t)$와 $y(t)$은, 적절한 차원 m과 지연 l시간 을 택하여,

$X(t)=[x(t),x(t+l),\cdots x(t+(m-1)l)]$

$Y(t)=[Y(t),Y(t+l),\cdots Y(t+(m-1)l)]'$ (6)

재구성할 수 있다.

이 때, 주어진 점 $x(t)$에 인접한 점들을 찾을 확률이 기준 확률 P_{ref} ($<<1$)보다 적을 수 있게 하는 거리 $\varepsilon_Y(t)$를 구하고, 유사한 방식으로 $\varepsilon_Y(t)$도 구한다. 그 후, 주어진 시간 t에서두 시계열 $x(t)$와 $y(t)$의 동기화 지수는 아래의 수식으로 구할 수 있다.

$$S(t)=\frac{N_{t''}}{N_{t'}}. \quad (7)$$

여기서, N_t는 $|x(t)-x(t')|\le\varepsilon_\chi(t)$을 만족하는 t'의 갯수이며, $N_{t''}$는 이러한 t'중 $|Y(t)-Y(t')|\le\varepsilon_\chi(t)$을 만족하는 t'의 갯수이다. 끝으로, 두 개 이상 다수 개의 시계열이 있는 경우에는, 그 중 두 개씩 쌍을 지어 동기화 지수를 측정하고, 그것들을 평균을 구하면 된다.