한국학교수학회논문집 제 11 권, 제 2 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 11, Number 2, 249-283, June 2008

고등학생의 무한에 대한 개념정의와 개념이미지*

황우형1) · 지영조2)

본 연구의 목적은 고등학생들이 가지고 있는 극한에 대한 개념 정의와 개념 이미지를 조사해보고 어떤 부적절한 개념 이미지를 가지고 있는지 알아보는데 있다. 또한 관련 개념에 대한 문제를 해결하는 과정에서 어떤 오류를 범하는지도 알아보았다. 연구대상은 인문계 고등학교 이공계열 여학생 121명 이었으며 연구방법은 질문지 검사를 통하여 이루어졌다. 무한수열의 극한의 경우 11%, 무한급수의 경우에는 5%의 학생만이 교과서의 형식적 정의와 유사한 개념정의를 가지고 있었다. 학생들이 보여준 오류유형은 모두 6가지로 나타났으며 학생들은 문제를 푸는 과정에서 무한수열의 극한에 비하여 무한급수의 합에 대한 정의와 성질들을 이해하고 적용하는 것을 더 어려워했다.

주요용어 : 극한개념, 개념이미지, 수학적 오류

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

학생들이 어떤 수학적 개념을 이해하고 있다고 생각하더라도 그 개념의 다양한 측면 중 일부만을 이해하고 있거나 자기 나름대로 해석하여 이해하고 있는 경우가 있다. 또한 각자가 가지고 있는 개념에 관한 이미지는 학생마다 다를 수 있으며, 어떤 경우에는 부적절하여 문제 해결 시 오류를 유발할 수도 있다.

개념 이미지는 효과적인 개념 학습뿐만 아니라 일반적인 수학 학습을 위한 전제가 되므로, 이에 대해서 연구하는 것은 의미가 있다고 할 수 있다. 학생이 가지고 있는 개념 이미지와 교사가 가지고 있는 개념 이미지가 다를 경우 서로 원활한 의사소통이 어렵게 되므로 학생의 개념 이미지를 파악하고 이에 맞는 수업을 진행하는 것은 중요하다 할 수 있다. 또한 학생이 가지고 있는 정의나 개념에 관한 이미지가 수학의 정의나 개념과 다르다면 이는 갈등의 요인이 될 수 있으며, 이 갈등을 어떻게 극복하느냐의 여부가 학습의 발전을 결정하게 된다.

또한 학생들이 문제를 해결하면서 범하게 되는 오류를 파악하는 것 또한 중요하다. 오류

---

* 본 연구는 고려대학교 특별연구비에 의하여 수행되었음.
1) 고려대학교 (wwhang@korea.ac.kr)
2) 고려대학교 대학원 (evercg@hanmail.net)

의 원인을 발견하고 그것을 수정하는 것은 학생들에게 일종의 자극이 될 수 있고, 자신의 사고 과정을 반영해보는 기회를 제공하게 된다. Borasi(1986)도 오류의 긍정적인 역할에 대해 언급하였으며 오류가 사고와 탐구를 자극할 수 있고 결과적으로 학문에 대한 더 깊은 이해를 할 수 있다고 주장한바있다.

한편, Radatz(1979)의 연구 결과에 따르면, 수학을 배우는 과정에서 나타나는 학생들의 오류는 임의적이지 않고 지속적이며, 나름대로의 일정한 절차에 대한 결과이다. 따라서 이를 분석하는 것은 수학을 배우는 절차에 대한 또 다른 연구의 시작점을 제공할 수 있다. 이는 성공 여부 측정을 목표로 하는 시험의 양적인 측면을 통해서는 얻을 수 없는 교수법에 대한 피드백과 적절한 규준을 제공해줄 것이다. 오류의 진단적인 측면과 원인이 되는 측면을 고려하는 것은 수학 교사들이 교육 과정의 내용에 대한 지식을 학생들의 개인적인 차이에 대한 지식으로 통합하게 하는 것에 분명히 도움을 줄 것이다.

고등학교에서 극한에 대한 정의는 Cauchy의 ε-δ에 의한 정의가 아니라 극한에 도달하는 과정을 중요시하는 직관적인 정의를 사용하는데, 학생들이 이를 받아들이는 과정이나 이에 대한 문제 해결 과정에서 오류를 범하는 것을 종종 보게 된다. 그러나 극한의 개념은 해석학에서 근간을 이루는 중요한 개념으로, 고등수학을 배우는 과정에서 극한에 대한 정확한 이해는 필수적이다. 따라서 극한을 처음 접하는 학생들이 극한에 관한 개념을 어떻게 이해하고 있으며 잘못 알고 있는 개념은 무엇이고, 문제 풀이 과정에서의 오류 유형은 어떠한지 살펴보는 것은 의미가 있다.

본 연구의 목적은 고등학교 2학년 학생들이 극한 단원에서 갖는 개념 이미지와 문제 해결 과정에서 보이는 오류의 형태를 파악하여 부적절한 개념 이미지를 가지는 것과 오류를 범하는 것 사이의 관계를 조사하는데 있다. 이에 따른 연구문제는 다음과 같다.

2. 연구문제

1. 학생들은 어떤 개념 정의 및 개념 이미지를 가지고 있는가?
   a. 교과서에 제시된 형식적인 개념 정의와 학생 개인의 개념 정의는 어떻게 다른가?
   b. 학생들이 가지고 있는 개념 이미지 중 부적절한 개념 이미지는 무엇인가?
2. 학생들은 교과서 예제를 푸는 과정에서 어떤 유형의 오류를 범하는가?
3. 부적절한 개념 이미지를 가지고 있는 경우 수렴 · 발산 판단에 어떤 영향을 미치는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 개념 이미지와 개념 정의

개념 이미지(Concept Image)

모든 수학적 개념들은 형식적인 정의를 갖는다. 그런데 학생들은 주어진 수학적 문제가 그 개념에 적합한 예인지 아닌지를 결정함에 있어서 반드시 정의를 사용하지는 않는다. 많은 경우 학생들은 개념 이미지에 바탕을 두고 결정을 내리게 된다. Davis(1984)는 이를 개념 틀(Concept Frame)이라 불렀다.

Tall과 Vinner(1981)는 개념에 대한 각 개인의 생각과 그 개념의 형식적 정의, 즉 정신활

동으로서의 수학과 형식 체계로서의 수학을 구분하면서, '개념 이미지'를 다음과 같이 정의하였다. "개념 이미지란 마음속에서 그 개념의 이름, 모든 특징들과 더불어 연관되어 있는 모든 심상의 집합을 의미한다." 여기서 심상이란 그림, 기호 형태, 다이어그램, 그래프 등의 모든 종류의 표상을 의미한다. 개념 이미지란 우리 정신 속에서 개념의 이름과 관련된 비언어적인 존재이다. 이는 개념이 시각적인 표상을 가지는 경우에는 개념의 시각적 표상이라 할 수 있고, 개념에 대한 인상 혹은 경험의 집합체라고 할 수 있다. 이는 모든 정신적인 그림과 그와 관련된 성질이나 과정을 포함한다. 예를 들어 '탁자'라는 단어를 들으면 우리는 머리 속에 '탁자'에 대한 모양이나 재질, 탁자에 앉았던 경험이나 식사를 했던 기억들을 떠올린다. 또는 '함수'라는 단어를 들으면 $y=f(x)$와 같은 식을 떠올리거나 좌표평면에 그려진 함수의 그래프, 또는 $y=x$, $y=sinx$ 등과 같은 특정 함수의 예를 생각할 수도 있다.

개념 이미지는 개념과 관련된 전체적인 인지구조를 설명하기 위하여 필요한 용어로, 모든 종류의 경험을 통해 오랜 기간을 거쳐 형성되며, 개개인이 새로운 자극에 부딪히거나 성숙해 감에 따라 변화하게 된다. 예를 들어, 뺄셈의 개념은 통상 양수 전체를 포함한 과정으로 처음 접해진다. 이 단계에서 아이들은 뺄셈이 항상 답을 감소시킨다고 관찰할 수 있다. 그런 아이에게 이러한 관찰은 개념 이미지의 일부가 되며, 이는 나중에 음수의 뺄셈에서 문제를 야기할 수 있다. 이런 이유에서 모든 정신적 특성들은 개념과 관련이 있고, 스스로 인식하든 그렇지 않든 개념 이미지에 포함되어야 한다.

학생들의 이미지는 그 개념에 적절한 예와 부적절한 예를 접하면서 형성된 결과이다. 그러므로 학생들이 개념에 대한 예로 간주하는 수학적 대상의 집합이 정의에 의해 결정되는 수학적 대상들의 집합과 반드시 같지는 않다. 이런 경우, 학생들의 행동은 교사가 기대하는 것과 다르게 나타날 수 있다. 의사소통의 개선을 위해 왜 그런 실패가 발생되는지 이해할 필요가 있으며 그래서 학생들이 가지고 있는 다양한 수학적 개념들의 이미지를 조사하는 것은 중요하다. 인간의 두뇌는 언제나 순전히 논리적이지도 않고, 그렇다고 실수를 계속 야기하지도 않는다. 왜 이런 과정이 발생하게 되는지 이해하기 위해서 형식적으로 정의되는 수학적 개념과 그것을 받아들이는 인지 과정 사이의 차이를 밝히려는 노력은 중요하다고 할 수 있다.

학생들은 어떠한 개념을 배우기 전에, 이미 일상생활의 경험을 바탕으로 여러 가지 생각, 직관, 이미지, 지식을 가지고 있다. Cornu(1981, 1983)는 형식적인 수업을 받기 전에 형성된 이러한 개념을 자생적 개념(Spontaneus Concepts)이라 부른다. 자생적 아이디어가 새로 배운 지식과 섞여서 수정되고 조정되어서 학생들 나름대로의 개념을 형성하게 된다. 일반적으로 문제를 해결할 때 과학적 이론에만 의존하는 것이 아니고 자생적 개념을 바탕으로 하는 자연스러운 자생적 추론에 의존하기도 한다.

Ausubel(1978)도 학습에 가장 큰 영향을 미치는 요인은 학생이 학습 이전에 이미 가지고 있던 지식임을 지적하였다. 그는 이러한 지식을 선개념(Preconception)이라고 불렀으며, Piaget와 Vygotsky(1985)는 학생의 자발적 개념(Spontaneous Conception)이라 부르고 자발적 개념이 형성되는 과정을 분석하였다. 이밖에도 많은 연구자들이 이러한 개념이 학습과정에 중요한 영향을 미친다는 사실을 인식했다. 극한 개념의 경우, '~로 가까이 간다(tend to)'와 '극한'이라는 단어에 대하여 수업을 받지 않은 학생들도 나름대로의 의미를 갖고 있으며, 형식적 정의를 배운 후에도 학생들은 이러한 사전 의미에 계속 의존하는 경향이 있다.

자생적 개념이 다양하고 학생들이 형식성을 점차 의식해 간다는 측면에서 볼 때, 학생들

의 마음속에는 모순 된 아이디어들이 동시에 존재하며, 이것들은 Tall과 Vinner (1981)의 의미에서의 '개념 이미지'를 만들게 되고, 결국은 잠재적 갈등 요인이 된다. 극한을 처음 가르칠 때 극한 개념 자체보다는 극한값으로 접근하는 과정을 강조하는 경향이 있음이 분명하다. '가까워지지만 도달할 수 없는', '통과할 수 없는', '~으로 향하는' 등과 같은 개념 이미지는 형식적 정의와 갈등을 일으키는 여러 가지 요인을 내포하고 있다. 따라서 학생들은 '점점 가까워지는', '점점 커지는' 또는 '영원히 계속되는'과 관련된 극한과 무한에 대한 개념 이미지를 형성한다.

개념 이미지는 특정 개인과 관련된 것으로 사람들마다 다를 수 있으며, 더구나 한 사람이 상황에 따라 다른 개념 이미지를 떠올릴 수도 있다. Tall과 Vinner는 이렇게 주어진 상황에서 특정한 시기에 떠오른 일부의 기억에 대해 '환기된 개념 이미지(evoked concept image)'라는 용어를 사용한다. 때로는 서로 다른 시기에 모순되어 보이는 이미지가 환기될 수도 있다. 그러나 단지 모순되는 면이 동시에 환기될 때에만 실제로 갈등이나 혼란의 감정이 생긴다.

개념 정의(Concept Definition)

Tall과 Vinner (1981)는 '개념 정의'를 그 개념을 명확하게 하기 위해 사용된 말의 형태로 간주하였다. '개념 정의'란 순환의 오류를 범하지 않으면서 개념을 정확하게 설명하는 언어적 정의를 의미한다. 이는 개인의 기계적인 습득 또는 보다 의미 있는 학습을 통해 전체적인 개념에 더 큰 정도로 혹은 더 적은 정도로 관련될 수 있다. 또한 그것은 학생에 의한 정의의 개인적인 재구성이 될 수도 있다. 그러면 정의는 학생이 자신의 환기된 개념 이미지를 설명하기 위해 사용한 말의 형태가 된다. 개념 정의가 주어지거나 또는 스스로 구성되더라도 이를 변화시킬 수 있다. 이러한 방법으로 정의를 배운 학생에 의해서 개인적으로 재구성된 개인의 개념 정의인 사적인 개념 정의(Private Concept Definition)는 공식적 수학 이론의 일부로 개인에게 주어진 형식적인 개념 정의(Formal Concept Definition)와 구별될 수 있다.

각 개인들은 개념 정의로 자신의 개념 이미지를 일반화한다. 이를 '개념 정의 이미지(Concept Definition Image)'로 부르기도 한다. 물론 이것은 개념 이미지의 일부이다. 어떤 사람들은 이것을 갖지 않을 수도 있다. 한편 어떤 사람들에게는 이것이 개념 이미지의 다른 부분들과 긴밀하게 연관되어 있거나 또는 그렇지 않을 수도 있다. 예를 들어, 수학적인 함수의 개념 정의는 "집합 A의 각 원소들이 집합 B의 원소로 정확하게 하나씩 대응되는 두 집합 A, B 사이의 관계"로 주어지곤 한다. 그러나 함수를 공부한 학생들은 그 개념 정의를 기억할 수도 있고, 기억하지 못 할 수도 있으며, 개념 이미지가 많은 다른 면들(규칙이나 공식 또는 정의역 A의 다른 부분에 사용될 수 있는 많은 공식들로 주어진 함수 개념과 같은)을 포함 할 수도 있다.

사람들은 몇 가지 개념에 대해서 개념 정의와 개념 이미지를 모두 가지고 있다. 그러나 대부분의 많은 개념에 대해서는 그렇지 않다. 학습자는 개념을 다루기 위해서 개념 정의가 아니라 개념 이미지를 필요로 하며, 정의에 의해 소개된 개념 정의들은 비활성화 되거나 혹은 잊혀지게 된다. 그러나 사고과정에서 대부분의 개념 이미지는 활성화 된다.

일상생활 속에서 사용되는 대부분의 개념은 정의와 상관없이 획득된다. 그러나 '숲'을 '아주 많은 나무가 함께 있는 것'이라고 설명해 주는 것처럼, 가끔은 일상생활에서 사용하는 어떤 개념들도 정의에 의해 도입되기도 한다. 이와 같은 정의는 개념 이미지의 형성을 돕는다.

그런데 이미지가 형성되는 순간 정의는 별 도움이 되지 않는다. 정의는 사용되지 않거나 잊혀지기도 한다. 마치 건물이 완성되는 순간 제거되는 비계와 유사하다.

2. 오류

수학 교육에서 오류 분석의 역사는 오래되었는데, 1970년대부터는 산수계산의 오류에만 제한되지 않고 광범위한 분석이 증가하였고, 그에 대한 중요성과 잠재성이 인식되기 시작했다. 이러한 발달의 이유는 다음과 같다(Radatz, 1979).

1. 규준지향(norm-referenced)과 준거지향(criterion-referenced) 수학 성취 테스트에 대한 실망과 회의로 교수학적 진단에 대한 관심이 증가되었다.
2. 교육 과정을 재구성해도 어려움과 오류들이 줄지 않고 특정 오류들이 새롭게 야기되었다.
3. 수학 교육의 개별화와 다양성은 오류에 대한 기술적이고 뚜렷한 분석을 요구하게 되었으며, 교사들은 진단하는 교수 모델을 필요로 하기 시작했다.

Radatz(1979)는 수학 과제에 포함된 정보를 얻고 처리하고 파지하고 재생산할 때 이용된 메커니즘을 조사함으로써 다음과 같이 5가지 유형으로 오류의 원인을 분류하였다.

- 언어의 어려움으로 인한 오류 (Errors Due to Language Difficulties)
- 공간정보 획득의 어려움으로 인한 오류 (Errors Due to Difficulties in Obtaining Spatial Information)
- 사전지식의 숙달 부족으로 인한 오류 (Errors Due to Mastery of Prerequisite Skills, Facts, and Concepts)
- 부정확한 결합 혹은 사고의 경직성으로 인한 오류 (Errors Due to Incorrect Associations or Rigidity of Thinking)
- 관련 없는 법칙이나 전략의 적용으로 인한 오류 (Errors Due to the Application of Irrelevant or Strategies)

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구 대상 및 기간

본 연구의 대상은 서울시에 소재하고 있는 여자고등학교 2학년 이·공계열 학생들로 4개반 121명의 학생들에게 설문지 검사를 실시하였다. 검사 실시 전에 치른 전국연합학력평가의 결과를 기준으로 판단해보았을 때, 검사 대상 학생들의 평균적인 학력 수준은 전국 고등학교 2학년 학생들의 평균 수준과 비슷할 것으로 예상된다.

학생들은 9월 중순부터 약 2주에서 3주 동안 이 단원을 배운 후, 10월 초에 중간고사를 보았다. 그 후, 12월 중순의 기말고사 시험범위에 이 단원이 다시 한 번 포함되었으며 질문지 검사는 기말고사가 끝난 12월 말에 실시하였다.

2. 설문지 제작 및 검사

무한개념 관련 단원의 학습 목표를 중심으로 기초적이고 필수적인 내용들을 묻는 설문지 문항을 작성하였다.

학생들이 학습 목표에 도달했는지를 파악하고자 했으므로 설문지의 문항에서 응용력을 요구하는 난이도가 높은 문제들은 제외시켰다. 교과서의 소단원 구성처럼, '1. 무한수열의 극한', '2. 무한급수' 로 나누어서 설문지를 제작하였고, 참 · 거짓을 판단하는 문항을 제외한 모든 문항은 주관식이었다.

[표 1] 무한개념 관련 단원의 학습 목표

1. 무한수열의 극한	· 무한수열의 수렴 · 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. · 무한수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해한다. · 극한의 성질을 활용하여 극한값을 구할 수 있다. · 무한등비수열의 극한값을 구할 수 있다.
2. 무한급수	· 무한급수의 수렴 · 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. · 간단한 무한급수가 수렴하는 경우에 그 합을 구할 수 있다. · 무한등비급수의 합을 구할 수 있다. · 무한급수의 성질을 이용하여 여러 문제를 해결할 수 있다.

학생들이 어떤 개념을 가지고 있는지 파악하려는 [연구문제 1]에 대한 결과를 얻기 위해서 다양한 방법으로 극한의 개념에 대해서 물어보았다. 그리고 학생들이 문제를 풀면서 어떤 오류를 범하는지 파악하려는 [연구문제 2]에 대한 결과를 얻기 위해서 풀이 과정을 가능한 자세히 제시하도록 하였다. 그리고 이들 사이의 관계를 살피고자 단순한 수열에 대한 수렴 · 발산을 판단할 때 나타나는 오류와의 관계와 함께 문제들을 풀 때 나타나는 오류와의 관계도 파악하고자 했다.

[표 2] '1. 무한수열의 극한' 질문지 문항 구성 표

단원	1. 무한수열의 극한		
문항	질문 구성	측정 내용	구분
1-1)	무한수열의 극한 정의	극한의 정의를 어떻게 알고 있는가?	연구문제 1,3
1-2)	발산하는 수열	발산에 대한 개념을 알고 있는가? ① ∞ ② $-\infty$ ③ 진동 각 경우에 대한 예를 그래프로 표현하게 한다.	연구문제 1,3

1-3)	간단한 수열의 수렴·발산 판단	수열이 수렴하는지 판단할 수 있는가? ① 수렴하는 교대수열 ② 모든 항이 같은 수열 ③ 공비 $-1<r<1$ 인 무한등비수열 ④ 공비 $r>1$ 인 무한등비수열 ⑤ 홀수 항과 짝수 항의 수렴 값이 다른 수열	연구문제 3
1-4)	무한수열의 극한 관련 개념	각 개념들에 대해 참·거짓을 판별할 수 있는가? (선행연구를 참조하여 학생들이 가질 수 있는 여러 개념들을 제시한다.)	연구문제 1,3
1-5)	교과서 예제 수준의 극한값 계산	극한의 성질을 활용하여 극한값을 계산 할 수 있는가? ① $\frac{\infty}{\infty}$ 분수식의 형태 ② $\infty-\infty$ 무리식의 형태 ③ $\frac{\infty}{\infty}$ 지수식의 형태 ④ 진동하는 삼각함수를 포함한 식의 형태	연구문제 2,3

[표 3] '2. 무한급수' 질문지 문항 구성 표

단원	**2. 무한급수**		
문항	**질문 구성**	**측정 내용**	**구분**
2-1)	무한급수의 정의	무한급수의 정의를 어떻게 알고 있는가?	연구문제 1,3
2-2)	간단한 무한급수의 수렴·발산 판단	무한급수의 수렴·발산을 판단할 수 있는가? ① 첫 항부터 홀수 번째 항까지의 합과 짝수 번째 항까지의 합이 다른 경우 ② 공비 $r>1$ 인 무한등비급수 ③ 공비 $-1<r<1$ 인 무한등비급수 ④ 공비 $r<-1$ 인 무한등비급수 ⑤ 발산하는 무한급수	연구문제 3
2-3)	무한급수의 합과 관련한 개념	각 개념들에 대해 참·거짓을 판별할 수 있는가? (선행연구를 참조하여 학생들이 가질 수 있는 오개념들을 묻는다.)	연구문제 1,3

2-4)	교과서 예제 수준의 무한급수의 합 계산	무한급수의 성질을 활용하여 그 합을 계산할 수 있는가? ① 부분분수 및 부분합을 이용한 계산 ② 부분합을 이용한 계산 ③ 무한급수의 수렴조건을 이용한 계산 ④ 무한등비급수의 합을 이용한 계산	연구문제 2,3

단원 ‘2. 무한급수’에 대해서도 ‘1. 무한수열의 극한’ 에서와 마찬가지 형식으로 질문지를 구성하였다.

검사 실시 후, 빈도 분석을 실시하였다. 또한 SAS프로그램을 사용하여 단순카이제곱검정(Chisquare(χ^2)test)인 적합도 검정(goodness-of-fit-tes t)을 실시하였다. 적합도 검정은 관찰된 빈도가 우연한 것이 아니라 기대(이론적)빈도와 차이가 있어서, 그 차이가 유의미하다고 해석할 수 있는지 판단하는 데 그 목적이 있다. 한편, [연구문제 3]에 대해서는 상관분석을 실시하였다.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

1. [연구문제 1]에 대한 결과 및 분석 :

학생들은 어떤 개념 정의 및 개념 이미지를 가지고 있는가?

[연구문제 1-1)]에 대한 결과 및 분석 :
교과서에 제시된 형식적인 개념 정의와 개인의 개념 정의는 어떻게 다른가?

1) 무한수열의 극한

먼저, 문항 1-1) ‘무한수열의 극한’과 관련한 개념 정의부터 살펴보자.

‘무한수열 $\{a_n\}$이 α 에 수렴한다’는 것의 정의 또는 그 의미를 쓰시오.

교과서에서 제시된 ‘무한수열의 극한’의 정의는 다음과 같다.

일반적으로, 무한수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n이 어떤 일정한 실수값 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 하고, α를 이 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라고 한다.[3)]

극한의 정의를 직관적으로 학생들에게 이해시키도록 교육 과정이 편성되어있기 때문에 교과서에서는 위와 같이 정의를 내리고 있다. 본 연구에서는 위의 정의를 구성하고 있는 요소

3) 우정호 외, 수학 I (대한교과서(주), 2005), 181

를 ‘ n이 한없이 커질 때’, ‘일반항 a_n이’, ‘ α에 한없이 가까워진다’ 로 세분화하고, 이를 기준으로 학생들의 답변도 유형을 구분하였다.

학생들의 답변을 유형별로 크게 나눠보았더니 무응답 외에 6가지 유형이 나왔으며, 그 결과는 다음 표와 같다.

[표 4] 문항 1-1)에 대한 응답 유형 분류

1-1) 문항 응답 분석								
유형	무응답	I	R	A	B	C	D	합계
응답수	23	33	8	13	31	2	11	121
비율	19.0%	27.3	6.6	10.7%	25.6%	1.7%	9.1%	100%

I : 부적절한 개념 정의를 가지고 있는 경우로, 정의를 제시한 것에 명백하게 오류가 있는 답변들. 이에 관해서는 [연구문제 1-2)]에서 다루겠다.

R : 제시된 문항을 반복하여 정의한 경우로, ‘극한’, ‘수렴’ 등의 단어가 정의에 다시 포함된 경우와 단순히 기호로 바꿔 쓴 답변들.

A : 교과서의 형식적 정의와 거의 비슷하게 정의한 경우로, “ n이 한없이 커질 때 a_n이 α에 가까워진다”와 유사하게 정의한 답변들.

B : n이 한없이 커진다는 설명 없이 a_n이 α에 가까워진다고만 정의한 경우.

C : a_n에 대한 언급 없이 n이 커짐에 따라 α에 가까워진다고만 정의한 경우로, 무엇이 α에 커지는 것인지 그 주체가 불분명한 답변들.

D : n과 a_n에 관한 언급 없이 무조건 ‘α에 가까워진다’ 라고 매우 간단히 정의한 경우.

이상의 결과를 살펴보면 교과서의 형식적 정의와 비슷한 개념 정의를 가진 학생은 A유형의 학생들 약 10% 정도로 파악된다. 한편 B유형의 학생들 약 25%는 정확하게 표현하지는 않았으나 극한의 의미를 어느 정도 알고 있다고 판단되는 학생들이다. 이 유형의 학생들은 조금 더 깊이 생각해서 답을 한다거나 보조질문을 하면 교과서의 형식적 정의와 유사하게 답변할 것으로 기대된다.

그러나 C유형과 D유형을 합친 약 10% 학생들의 답변은 형식적 정의와 매우 큰 차이를 보이고 있다. 전혀 응답을 하지 못한 학생들이 전체의 약 19%이었고, 분명한 오류를 가진 부적절한 개념 정의를 내린 학생도 약 27% 정도 되었다.

2) 무한급수의 합

다음으로, 문항 2-1) ‘무한급수의 합’과 관련한 개념 정의를 살펴보자.

‘무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 가 S에 수렴한다.’는 것의 정의 또는 의미를 쓰시오.

교과서에 제시된 형식적 정의는 다음과 같다.

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합 S_n을 항으로 하는 수열이 일정한 값 S에 수렴하면, 즉

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S$ 이면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 S에 수렴한다고

한다.4)

무한수열의 극한을 직관적으로 정의했던 것과 달리 무한급수의 합에 대해서는 부분합을 도입하여 부분합으로 구성된 수열이 수렴하는 것으로 정의하고 있다.

다음은 학생들의 답변한 정의를 유형별로 분류한 표이다.

[표 5] 문항 2-1)에 대한 응답 유형 분류

2-1) 문항 응답 분석									
유형	무응답	I	R	A	B	C	D	E	합계
응답수	29	26	14	6	15	20	5	6	121
비율	24.0%	21.5%	11.6%	5.0%	12.4%	16.4%	4.1%	5.0%	100%

문항 2-1)에서 $\chi^2 = 39.99$, $p = .0001 < 0.05$ 인 결과를 얻었으며, 따라서 통계적으로 응답자 수의 차이가 유의미하다고 말할 수 있다.

무응답자를 제외한 나머지 학생들의 답변 유형은 다음과 같다.

I : 부적절한 개념 정의를 가지고 있는 경우로, 정의를 제시한 것에 분명하게 오류가 있는 답변들. 이에 관해서는 [연구문제 1-2)]에서 다루겠다.

R : 제시된 문항을 반복하여 정의한 경우로, 단순히 기호로 표현 방식을 바꾸었거나, ‘무한급수’ 또는 ‘수렴한다’ 등과 같은 부분을 정의에 그대로 사용한 답변들.

A : 부분합을 이용하여 정의한 경우.

B : ‘무한급수의 합’에 대한 직관적인 정의로, n이 한없이 커질 때 a_n들을 계속 더해나가면 일정한 값 S에 가까워진다는 의미로 n과 a_n 그리고 S에 관해서 모두 언급하고 있는 답변들.

C : n이 무한히 커진다는 사실을 언급하지 않고, “수열 a_n의 합이 한없이 S에 가까워진다”와 유사하게 정의한 경우.

D : n이 무한히 커진다는 사실을 언급하지 않았을 뿐만 아니라 a_n도 한없이 더해나간다는 의미를 포함하지 않고 정의한 경우.

E: 어떤 자세한 설명 없이 무조건 “ S에 가까워진다”로만 간단히 쓴 경우.

4) 우정호 외, 수학 I (대한교과서(주), 2005), 194

이상의 결과를 살펴보면 교과서의 형식적 정의와 비슷한 개념 정의를 가진 학생은 전체의 약 5%에 해당하는 A유형의 학생들뿐으로, 매우 드물었다. 한편, '무한 수열'의 정의에서처럼 직관적인 방법으로 '무한급수의 합'을 정의한 B유형의 학생들은 약 12%를 차지했고, B유형보다 조금 미흡한 C유형의 학생들은 약 16% 정도 되었다.

그러나 약 4%인 D유형과 약 5%인 E유형의 학생들은 '무한급수의 합'에 대한 의미를 정확하게 알고 있다고 보기 힘들며, 따라서 이 유형의 답변들은 '무한급수의 합'에 대한 정의로 받아들이기에 무리가 따른다. 그리고 약 24%의 학생들이 전혀 응답을 하지 못했고 약 21%의 학생들은 오류가 포함된 부적절한 개념 정의를 드러냈다. 이 두 유형에 대한 비율의 합은 문항 1-1)에서의 결과와 비슷하다.

[연구문제 1-2)]에 대한 결과 및 분석 :
학생들이 가지고 있는 개념 이미지 중 부적절한 개념 이미지는 무엇인가?

1) 무한수열의 극한

[연구문제 1-1)]에서 살펴보았던 것처럼, 학생들의 개념 정의를 묻는 질문지의 문항 1-1)에서 전체 응답자의 약 27%가 부적절한 개념 이미지를 나타내었다. 그 내용은 다음과 같다.

첫째: '수렴'의 의미를 잘못 알고 있는 경우.

"수열이 한없이 증가하거나 또는 감소하여 그 값이 α에 가까워져 가는 것"이라고 판단한 경우이다. 수열이 무한히 증가하거나 감소한다면 이는 발산하는 경우이지, 하나의 상수 α에 가까워져 갈 수 없다. 이렇게 답변한 학생들은 부적절한 개념 이미지를 갖고 있는 학생 가운데 약 40%를 차지했다.

둘째: 수열의 각 항들은 수렴값과 같아질 수 없다고 생각하는 경우.

즉, α에 수렴한다는 것은 α에 계속해서 가깝게 다가가는 것이지 α가 될 수는 없다고 생각하는 경우이다. 교과서에서 수렴을 정의할 때 '한없이 가까워진다'라고 정의하는데, 이 표현을 잘못 해석해서 나타나는 오류로 생각된다. 부적절한 개념 이미지를 갖고 있는 학생 가운데 약 15%가 이와 같이 답하였다.

셋째: 수열의 각 항을 무한히 나열하면 값이 α가 된다고 생각하는 경우.

도달할 수 없다고 여기는 위의 둘째 경우와 반대로, n이 무한대로 가면 a_n이 α가 된다고 여기는 학생들도 약 15% 가량 되었다.

넷째: 수열이 수렴하지 않으면 모두 무한대로 간다고 생각하는 경우.

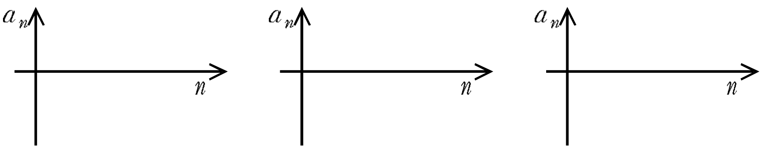
"수열이 무한대로 커지는 것이 아니라 어떤 하나의 값으로 가까워져 간다"고 수렴을 정의한 경우이다. 이는 수렴하는 경우의 반대는 무한대로 증가하는 수열이라고 생각하고 있음을 드러낸다. 음의 무한대로 발산하거나 진동하는 수열을 고려하고 있지 않다.

그 밖의 경우: n이 무한히 커질 때의 a_n의 변화가 아니라 유한한 n번째 항에서 α와 가까워진다고 답하거나, α대신 특정 값으로 대체하는 등의 기타 답변들이 있었다.

문항 1-2)에서는 무한 수열의 발산에 대해 질문하였는데, 발산하는 수열의 예를 그래프에 직접 표시하도록 하였다. 이를 통해 학생들은 어떤 대표적인 예를 제시하는지 살펴보고자 하였다.

1-2) 다음의 각 경우에 맞는 수열의 예를 찾아보고, 그 수열을 그래프에 점을 찍어 나타내 봅시다.

① 양의 무한대로 발산 ② 음의 무한대로 발산 ③ 진동



그래프에 수열을 나타낼 때 점으로 표시한 경우, 선으로 표시한 경우, 화살표로 표시한 경우 등이 있었다. 물론 수열의 정의가 'n이 자연수 일 때 나타나는 a_n의 값들'이기 때문에 정확하게는 점으로 찍어서 표현해야하지만, 여기서는 표현 방식을 가지고 부적절한 예로 분류하지는 않았다. 교과서나 수업시간에 이해를 돕기 위해서 점을 찍은 후 그 점의 이동 경로를 화살표로 표시한 것이 영향을 미친 듯 하다. 학생들이 발산의 개념을 아는가 하는 점을 중요하게 여겼기 때문에 n이 커짐에 따라 a_n이 어떻게 변화하는지에 대해서만 주목했다.

전체적인 응답유형을 살펴보면 다음과 같다.

[표 6] 문항 1-2) ①, ②에 대한 응답 유형 분류

	유형	무응답	I	A	합계
1-2) ①	응답자수	8	32	81	121
	비율	6.6%	26.4%	67%	100%
1-2) ②	응답자수	8	37	76	121
	비율	6.6%	30.6%	62.8%	100%

I : 부적절한 예를 제시한 경우.
양의 무한대와 음의 무한대로 발산하는 수열에 대해 잘못된 개념이미지를 가지고 있는 경우이다.

A : 단조 증가 또는 단조 감소하는 수열을 점을 찍거나 선으로 연결하여 또는 화살표로 표시하여 나타낸 경우.

학생들의 답변을 살펴본 결과 흥미롭게도, 부적절한 예를 제시한 경우를 제외하고는 모든 학생들이 문항 1-2) ①과 ②에 대한 예로서 단조수열을 표시하였다. 모든 응답이 단조수열로 나타났다는 것은 교과서와 수업시간을 통해서 접한 예가 단조수열이 대부분이었음을 반

증하는 것으로 해석할 수 있다. 실제 교과서에서도 그래프를 통해 제시한 예들은 모두 단조 수열의 형태이다.

문항 1-2) ③ 발산하는 수열의 예를 드는 것에서는 부적절한 답변을 제외하고 크게 3가지의 형태로 분류할 수 있었다.

[표 7] 문항 1-2) ③에 대한 응답 유형 분류

	유형	무응답	I	A	B	C	합계
1-2) ③	응답자수	7	6	8	56	44	121
	비율	5.8%	5.0%	6.7%	56.3%	36.4%	100%

I : 부적절한 예를 제시한 경우.
발산에 관해 잘못된 개념이미지를 가지고 있는 경우이다.

A : a_n의 홀수 항과 짝수 항의 값들이 양의 무한대와 음의 무한대를 번갈아 향하는 경우.

B : a_n의 홀수 항과 짝수 항의 값들이 각각 일정한 값을 유지하는 경우.

C : a_n의 값들이 $\sin$ 또는 $\cos$ 함수와 같은 주기함수의 형태를 띠는 경우.

잘못된 예를 제시한 학생 중, 가장 많은 오류를 번한 것은 그래프를 그릴 때 $n \leq 0$ 인 부분도 그린 경우이다. 부적절한 개념 이미지를 보인 학생 가운데 약 55%를 차지했다. 그러나 이는 발산에 대한 개념이 부적절하다고 보는 것보다 수열의 정의 또는 그래프 작성에 관한 오류의 영향으로 보는 것이 적절하겠다. 이 경우를 제외하면 발산에 관해서 부적절한 개념이미지를 가진 학생은 ①, ②번 문항에서 전체 학생의 약 13% 정도, ③번 문항에서는 전체 학생의 약 2%로 줄어든다. 다음은 나머지 부적절한 개념이미지들의 예이다.

첫째, 수렴하는 수열을 발산에 대한 개념으로 알고 있는 경우.

문항 1-2) ① 양의 무한대로 발산하는 수열을 찾는 문항에서는 7명의 학생이, ② 음의 무한대로 발산하는 수열을 찾는 문항에서는 10명의 학생이, ③ 진동하는 수열을 찾는 문항에서는 1명의 학생이 수렴하는 수열을 제시하였다. 특히 진동하는 수열에 대해 부적절한 개념이미지를 가진 한 학생이 그 예를 "0, 0, 0, 0, ⋯ "으로 표현한 점이 눈길을 끌었다. 학생들에게 수렴 발산 여부를 묻는 다른 문항에서 수열 "1, 1, 1, 1, ⋯ "을 제시했었는데 그 학생은 이런 수열을 진동 즉, 발산한다고 답했다.

둘째, 진동의 개념이 정확하지 않은 경우.

4명의 학생은 양의 무한대와 음의 무한대로 발산하는 문항 1-2) ①, ② 에 진동하는 수열을 예로 제시하였다.

기타유형으로 다음과 같은 소수 답변들이 있었다.

- 양의 상관관계를 갖는 상관도처럼 그래프를 그린 경우.
- 음의 무한대로 발산하는 수열을 찾는 문항 1-2) ②에서 $a_n < 0$ 이면서 증가하는 수열을 제시한 경우.

문항 1-4)는 '무한수열의 극한'과 관련한 여러 개념 이미지들을 제시한 후, 참 · 거짓을 판별하는 문항이다. 이 문항을 통해, 앞에서 드러나지 않은 개념 이미지들을 더 자세히 조사하고자 하였다.

수렴에 대한 바른 개념 이미지를 제시한 문항 1-4) ①, ②에 대해서는 모두 80%가 넘는 학생들이 참이라고 답하였다. 그러나 부적절한 개념 이미지로 제시한 나머지 문항들에 대해서는 문항별로 차이가 많이 났다.

특히 ③ " α는 수열 $\{a_n\}$의 각 항들이 같아질 수는 없지만 가장 가까이 접근하는 값이다."에 대해서 거짓이라고 바르게 답한 학생이 약 13% 밖에 되지 않는 점이 주목할 만 하다. 이는 문항 1-1)에서도 부적절한 개념 정의의 한 유형으로 나왔던 답변이었다. 개념 정의를 직접 쓰도록 요구했던 문항 1-1)에서는 전체응답자의 약 3.5% 정도만이 이런 오류를 드러내었다. 그러나 이번 문항에서 이 개념이 옳은지 틀린지 직접 물어보자 약 87%의 학생들이 오류를 나타낸 것이다. 앞에서도 언급한 것처럼, '한없이 가까이 간다'는 우리말의 표현에서 형성된 부적절한 개념 이미지로 판단된다.

1-4) 수열 $\{a_n\}$의 극한값이 α 일 때, 다음 내용의 참 · 거짓을 판별하시오.
① α는 n이 커짐에 따라 $\{a_n\}$의 각 항들이 한없이 가까워지는 값이다.
② n이 무한히 커지면, $\{a_n\}$의 각 항들과 α의 차이가 거의 없어진다.
③ α는 수열 $\{a_n\}$의 각 항들이 같아질 수는 없지만 가장 가까이 접근하는 값이다.
④ 수열 $\{a_n\}$의 각 항들은 α보다 클 수 없다.
⑤ 수열 $\{a_n\}$은 α 이외의 극한값을 또 가질 수 있다. 즉 2개 이상의 극한값이 존재할 수 있다.
⑥ α는 수열 $\{a_n\}$에서 마지막 항의 값이다.
⑦ ∞는 자연수에서 가장 큰 수이다.

이에 대해 학생들이 답한 결과는 [표 8]과 같다. 그 다음으로 많은 학생들이 오류를 나타낸 것은 ⑦" ∞는 자연수에서 가장 큰 수이다."이었다. 약 37%의 학생들이 틀리게 답했다. ∞의 개념이 바르지 못하다면 무한에 대한 개념이 바르지 못할 수 있기 때문에, 극한에 대한 바른 개념이 정립되기 어려울 것이다. n이 ∞로 갈 때, 즉 n이 한없이 커질 때 수열 $\{a_n\}$의 항들이 무한히 나타나게 되고 그 때 어떤 일정한 값 α를 향해 가는 것인데, 만약 n이 가장 큰 수라고 생각한다면 자연수가 유한하여 $\{a_n\}$도 유한한 끝항이 있는 수열로 판단할 위험이 있기 때문이다. 그러나 α가 끝항인지 묻는 ⑥에 대해서 전체의 약 15% 학생만이 오류를 나타내어 이와 대조된다.

그 외에 ⑤'두 개 이상의 극한값이 존재할 수 있는가'를 물었던 것에 대해 약 22%의 학생

들이 부적절하게 답하였는데, “좌극한과 우극한 두 개의 극한이 존재할 수 있다”고 답한 학생이 있었다. 함수의 극한에서 배운 개념에 혼동이 생겨 극한에 대해 부적절한 개념 이미지를 갖게 된 경우이다. 그리고 수렴값이 각 항보다 클 수 없는지를 물었던 ④에 대해서는 약 18%의 학생들이 오답을 나타내었다. 단조 증가하면서 수렴하는 수열만을 떠올린 결과로 보인다.

[표 8] 문항 1-4)에 대한 응답 유형 분류

		정답		오답		합계
		정답자수	정답자비율	오답자수	오답자비율	
1-4)	①	103	85.1%	18	14.9%	121명 (100%)
	②	98	81.0%	23	19.0%	〃
	③	16	13.2%	105	86.8%	〃
	④	99	81.8%	22	18.2%	〃
	⑤	94	77.7%	27	22.3%	〃
	⑥	103	85.1%	18	14.9%	〃
	⑦	76	62.8%	45	37.2%	〃

2) 무한급수의 합

‘무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 가 S에 수렴한다.’는 것의 정의를 쓰는 문항 2-1)에 대해, [연구문제 1-1)]에서 살펴보았던 것처럼 전체 응답자의 약 22%가 잘못된 응답을 하였다. 학생들이 가지고 있는 부적절한 개념 정의들은 다음과 같다.

첫째: 무한수열의 극한으로 정의한 경우.

무한수열의 수렴과 무한급수의 수렴을 혼동하는 학생들이 있었다. 이는 부적절한 개념 이미지를 갖고 있는 학생 가운데 약 23%에 해당한다.

둘째: 무한등비급수의 합이 수렴하는 것으로 한정시켜 정의한 경우.

무한급수 단원에서 무한등비급수를 많이 다루었기 때문인지, 무한등비급수가 수렴할 조건으로 일반적인 무한급수의 합이 수렴하는 것을 정의한 학생들이 있었다. 부적절한 개념 이미지를 갖고 있는 학생 가운데 약 12% 정도가 이와 같이 답하였다.

셋째: $\sum$와 lim의 순서를 바꾼 경우.

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 가 S에 수렴한다는 것은 n이 한없이 커질 때 부분합 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 이 S에 수렴한다는 뜻이다. 즉, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S$ 이다. 그런데 여기서 $\sum$와 lim의 순서를 바꾸어 $\lim_{n\to\infty} a_n$을 더해나가면 S가 된다고 정의한 학생들이 다소 있었다.

그 밖의 경우: 그 외 소수 의견으로 기호나 문자를 잘못 사용한 경우를 비롯하여, 제 1항부터 항의 값을 계속하여 더해나가는 것인데 숫자 1부터 ∞를 합친다고 쓴 경우, 특정 숫자를 언급한 경우 등 다음과 같은 답변들이 나왔다.

문항 2-3) 역시 학생들이 무한급수의 수렴에 관한 개념 이미지를 어떻게 가지고 있는지 살펴보기 위한 문항으로, 앞의 문항에서 드러나지 않은 점들을 더 자세하게 묻고자 하였다.

특징적인 결과는 문항 2-3) ②에서 나타난다. ②는 부분합과 관련된 것으로 무한급수의 합에 대한 형식적 정의와 깊이 관련된 내용이다. 그런데 이 보기에 대한 오답률이 약 57%로 다른 보기들에 대한 오답률 보다도 월등히 크게 나타났다. [연구문제 1-1)]에서 살펴본 것처럼, 무한급수의 합에 대한 개인의 개념 정의와 교과서에 제시된 형식적인 정의가 일치하는 경우는 약 5%에 불과했다. 그리고 이번 문항의 결과에서 알 수 있듯이 형식적 정의를 이해한 학생은 약 43%로 절반에도 미치지 못했다. 이러한 결과는 부분합을 이용하여 무한급수의 합을 구하는 문제에서도 영향을 미칠 것으로 예상된다. 한편, 무한급수의 수렴과 관련한 나머지 ①과 ③에 대해서는 모두 약 81%의 정답률을 보여 많은 대조를 이루었다. 순환소수에 관한 질문인 ④와 ⑤에서는 같은 유형의 보기였음에도 불구하고 답변 비율이 다르게 나타났다. 0.333333⋯이 $\frac{1}{3}$과 같다고 답한 학생이 약 63.6%인데 반해, 0.99999⋯가 1과 같다고 답한 학생은 약 73.6%이었다.

> 2-3) 다음 설명에 대해 참 · 거짓을 판별하시오.
>
> ① 무한히 많은 항을 더해도 일정한 값으로 수렴 할 수 있다.
>
> ② 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합을 S_n이라고 할 때, 부분합의 수열 $\{S_n\}$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴하고, $\{S_n\}$이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.
>
> ③ 수열 $\{a_n\}$을 첫째 항부터 둘째 항, 셋째 항⋯ 무한히 계속 더해 나갈 때, 임의의 자연수 n에 대하여 $a_n > 0$ 이면 그 합은 무한히 커지고, $a_n < 0$ 이면 그 합은 무한히 작아진다.
>
> ④ $0.333333\cdots = \frac{1}{3}$ 이다.
>
> ⑤ $0.99999\cdots = 1$ 이다.

학생들의 응답 결과는 다음과 같다.

[표 9] 문항 2-3)에 대한 응답 유형 분류

		정답자		오답자		합계
		인원수	비율	인원수	비율	
2-3)	①	98	81.0%	23	19.0%	121명(100%)
	②	52	43.0%	69	57.0%	〃
	③	98	81.0%	23	19.0%	〃
	④	77	63.6%	44	36.4%	〃
	⑤	89	73.6%	32	26.4%	〃

2. [연구문제 2]에 대한 결과 및 분석 :

학생들은 교과서 예제를 푸는 과정에서 어떤 유형의 오류를 범하는가?

교과서의 예제는 기본적이고 대표적인 문제들로, 학생들이 해결할 수 있어야 하는 기초적인 수준의 문제들이다. 따라서 교과서의 예제를 모두 풀 수 있다면 필수적으로 알아야 하는 기본 유형의 문제들을 해결가능할 것이다. 이런 의미에서 교과서의 예제로 질문지의 범위를 한정했다. 본 연구에서는 학생들이 '어려운 응용문제를 얼마나 잘 풀 수 있는지' 보다는 '반드시 풀 수 있어야 하는 문제를 얼마나 정확하게 해결하는지' 조사하는데 목표가 있다.

그러나 교과서의 예제들이 정의만으로 해결할 수 있는 아주 간단한 문제라고 보기에는 어렵다. 관련된 성질이나 정리들도 같이 활용하여 해결해야 하는 문제들로, 답을 얻으려면 적어도 몇 줄의 풀이 과정이 필요하다. 무응답을 제외한 정답과 오답을 구한 학생 모두의 풀이 과정을 조사했으며, 그 결과 다음과 같이 6가지의 오류 유형으로 분류할 수 있었다.

[표 10] 오류 유형 분류

A: 기호 사용의 오류

$\lim\limits_{n\to\infty}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$, $\sum\limits_{k=1}^{n}$ 또는 등호 등의 기호를 잘못 사용한 경우를 말한다.

B: 연산 오류

계산을 잘못한 경우를 말한다.

C: 정의가 왜곡된 오류

극한이나 급수에 관한 정의를 잘못 알고 있어서 생긴 오류를 말한다.

D: 정리 또는 성질을 잘못 적용한 오류

극한이나 급수에 관한 성질들을 왜곡되게 알고 있거나 부적절한 곳에 사용해서 생긴 오류들이다.

E: 풀이 과정이 생략된 오류

풀이 과정 없이 답만 쓴 경우나, 중간에 풀이 과정을 많이 생략하여 알아보기 힘든 경우, 또는 풀이 과정이 중단된 경우 등을 분류하였다.

풀이 과정이 없는 경우 학생이 이 문제를 알고 푼 것인지, 아니면 모르면서도 답만 적은 것이지 알 수 없기 때문에 오류로 분류하였다.

F: 기타 오류

위의 어느 경우에도 해당하지 않는 오류로서, 답변이 모호해서 해석하기 힘든 경우나 오류의 원인을 파악하기 애매한 경우, 또한 앞의 내용을 옮겨 적는 과정에서 잘못 옮겨 적는 실수를 한 경우 등을 분류하였다.

1) 무한수열의 극한

1-5) 다음 극한값을 구하는 풀이 과정 및 답을 쓰시오.
① $\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{2n}$ ② $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$
③ $\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{4^n}$ ④ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n}{3}\pi$

이들 문항에 대한 학생들의 응답 결과는 다음 표와 같다.

[표 11] 문항 1-5)에 대한 응답 유형 분류

		오류유형 비율(%)							
문항	정답률	무오류	A	B	C	D	E	F	χ^2
$\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{2n}$	96.6	40.3	22.7	0.8	0	0	35.4	0.8	82.64
$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$	81.8	24.8	29.1	29.9	6.8	0	6.0	3.4	54.85
$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{4^n}$	62.8	35.6	18.8	6.9	14.9	1.0	18.8	4.0	61.47
$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n}{3}\pi$	80.2	28.0	5.6	8.4	16.8	0	32.7	8.4	82.64
평균	80.3	32.2	19.0	11.5	9.6	0.2	23.2	4.2	

유형 분류 결과, 네 문항 모두에서 p =.0001 < 0.05 이므로, 통계적으로 응답자 수의 차이가 유의미하다고 말할 수 있다.

풀이과정을 생략한 E유형의 학생들의 경우, ①문항에서 대부분 정답을 구했다. 일반항이 분수식의 형태인 수열의 수렴 여부를 묻는 ①문항에서 '분모와 분자의 최고차수가 같을 때 $\frac{(\text{분자의 최고차항의 계수})}{(\text{분모의 최고차항의 계수})}$로 수렴한다'는 성질을 이용하여 중간 풀이 과정 없이 답을 바로 구한 것으로 보인다. 또한 ④문항에서는 풀이 과정 전혀 없이 답만 제시한 학생도 23명이나 되었다. 교과서에 제시된 문제들 중 샌드위치 정리를 사용하는 문제는 모두 범위가 -1과 1사이인 $\sin$ 함수나 $\cos$ 함수를 포함하고 있으며, 이들 모두 답이 0이었다. 이 사실을 기억해서 답을 0으로 쓴 학생이 많았던 것으로 보인다.

기호 사용의 오류를 범한 A유형의 학생들은 대부분 습관적으로 기호를 생략하거나 혹은 처음부터 기호의 사용법을 바르게 알지 못했다. $\lim_{n\to\infty}$ 기호 없이 $n\to\infty$로 계산하거나, 반대로 $n\to\infty$로 계산했음에도 불구하고 계속 $\lim_{n\to\infty}$ 기호를 써내려간 경우가 많았다.

다른 문제들에 비하여 유독 ②에서 연산 오류를 범한 학생들이 두드러졌다. $\infty-\infty$형태

의 무리식을 변형해서 $\frac{\infty}{\infty}$ 형태의 분수식으로 고쳐야 하는 문제였기 때문에 이런 과정에서 학생들이 계산 실수를 많이 했다. 무리식의 유리화를 제대로 할 줄 모르는 경우, 분모와 분자를 같은 식으로 나누어야 하는데 그러지 못한 경우 등이 있었다. ③에서는 지수를 계산하는 과정에서 지수의 성질을 제대로 알지 못해 틀린 경우가 많았고, ④에서는 삼각함수에 대한 정보가 부족하여 계산을 실수한 경우가 많았다.

왜곡된 정의를 갖고 있는 것으로 분류한 C유형의 학생들 중에는 $\frac{\infty}{\infty}=1$, $\frac{0}{0}=0$, $\frac{c}{0}=0$ (단, c는 상수) 라고 잘못 대답한 경우가 많았으며, 또한 변수 n에 관해 $\lim_{n\to\infty}$ 을 일부만 적용한 경우도 있었다. 한편 ③에서는 무한 등비수열의 극한을 계산하지 못한 경우, 무한등비수열의 극한값과 무한급수의 합을 혼동하여 무한급수의 수렴값을 답으로 적은 경우, 일반항의 n에 몇 개의 수를 직접 대입하여 수렴값을 구하려고 시도한 경우 등이 있었다.

그리고 극한의 성질을 잘못 적용한 D유형의 학생이 소수 있었는데 , a_n과 b_n이 수렴하지 않는데도 불구하고 성질 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n}$과 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$을 적용시켜 풀었다.

평균적으로 전체 학생의 약 68%가 오류를 나타냈다. 문항 ①과 ④의 영향으로 풀이 과정을 생략한 E유형의 오류가 가장 많았으며, A유형인 기호 사용의 오류와 B유형인 계산 오류가 그 다음을 차지했다. 한편 '무한수열의 극한'에 대한 정의와 성질에 관한 오류인 C와 D 유형은 전체 오류의 약 10% 정도였다.

2) 무한급수의 합

2-4) 다음 무한급수의 수렴, 발산을 조사하는 풀이 과정을 쓰고 , 수렴하면 그 합을 구하시오. ① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ ② $\sum_{n=1}^{\infty}(-\sqrt{n}+\sqrt{n+1})$ ③ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n+4}$ ④ $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n})$

학생들의 응답 결과는 다음 [표 12]와 같다. 문항 2-4)에 대한 평균 정답률은 약 45%로 나타났다. 이는 문항 1-5) 무한수열의 수렴·발산을 판단하는 문항에 대한 정답률 약 80%에 훨씬 못 미친다. 각각을 살펴보면 문항 2-4) ①에 대해 가장 많은 학생들이 정답을 구했다. 부분분수로 분리하여 해결할 수 있는 이 문항은 교과서의 예제들 중 가장 먼저 나오는 예제이다. 무한수열의 극한 문항 1-5)에서도 교과서에 제일 처음으로 나오는 예제였던 ①에 대해 정답률이 가장 높았던 것과 상통하는 결과이다. 가장 먼저 그리고 많이 접한 유형으로 정형화된 풀이법에 대한 연습이 많았던 것으로 보인다.

[표 12] 문항 2-4)에 대한 응답 유형 분류

		오류유형 비율(%)							
문항	정답률	무오류	A	B	C	D	E	F	χ^2
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$	63.6	23.5	30.4	2.6	21.7	1.7	13.9	6.1	61.34
$\sum_{n=1}^{\infty}(-\sqrt{n}+\sqrt{n+1})$	44.6	20.7	10.8	3.6	38.7	11.7	9.9	4.5	68.92
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n+4}$	25.6	14.3	3.1	2.0	30.6	33.7	9.2	7.1	153.71
$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n})$	48.7	62.0	1.1	1.1	25.0	0	6.5	4.3	157.91
평균	45.63	28.8	12.3	2.4	29.1	11.5	10.1	5.5	

문항 2-4) 네 문항 모두에서 $p=.0001 < 0.05$ 으로, 통계적으로 각 오류 유형별 응답자 수의 차이가 유의미하다고 말할 수 있다. A유형의 오류로는 앞에서 언급한 무한수열의 극한에서와 마찬가지 경우와 더불어, $\sum_{k=1}^{n}$를 계산했음에도 불구하고 여전히 기호를 사용한 경우, 무한급수를 부분합으로 고쳐서 계산하는 개념은 알고 있으나 기호로 $\sum_{n=1}^{\infty}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}$와 같이 고치지 못한 경우, $\sum$ 기호와 lim기호를 사용할 때 첨자를 정확하게 쓰지 않은 경우, 첨자와 일반항의 변수가 일치하지 않는 경우, 그 밖에 괄호를 생략했거나 등호를 잘못 사용하는 등 기타 기호 사용의 오류를 범한 경우 등이 있었다.

B유형인 연산 오류를 범한 학생 가운데 ①문항에서는 대부분 부분분수로 고치는 과정에서 오류를 범했다.

정의가 왜곡된 C유형의 오류로는 극한과 급수의 개념을 혼동하는 경우, 부분합을 이용한 무한급수의 계산법을 모르는 경우, 즉, $\sum_{n=1}^{\infty}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}$ 이렇게 고쳐서 풀지 못한 경우가 많았다. 이 중 절반은 부분합 $\sum_{k=1}^{n}$만 계산하고 그 다음을 진행시키지 못했다. 또한 n에 몇 개의 한정된 숫자들을 대입하여 해를 구하려한 경우가 있었다. 특히 ②에서는 다른 문항들과 달리 정의가 왜곡된 오류 유형 C가 약 32%로 가장 많이 나타났다. 또한 ④에서는 무한등비급수의 합을 계산하지 못한 경우와 무한등비수열의 극한과 혼동하여 급수의 합을 0이라고 답한 경우 등이 있었다.

한편, ②에서 눈여겨 볼 사항은 일반항이 무리식이면 무조건 유리화부터 하는 학생들이 있었다는 점이다. 이들을 유형 D로 분류하였다. 문항 ② $\sum_{n=1}^{\infty}(-\sqrt{n}+\sqrt{n+1})$은 부분합의 수열로 고쳐서 그 수렴 여부를 판단하면 간단하게 답이 나온다. 그러나 일반항이 무리식이면서 $\infty-\infty$의 형태를 나타내는 것의 극한값을 구할 때 유리화하듯이 일반항의 형태를 변화시켜 $\frac{\infty}{\infty}$의 꼴로 바꾼 후 계산하는 전략을 공식처럼 외운 학생들을 볼 수 있었다. 한편

③에서 '일반항이 분모와 분자의 차수가 같은 분수식인 경우 분모와 분자의 최고차항의 계수로 수렴값을 구할 수 있다'는 것을 무한급수에 잘못 적용하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+4} = \frac{2}{3}$이라고 암산으로 답한 학생도 있었다.

평균적으로는 무한급수에 대한 정의를 왜곡되게 알고 있어 발생한 C유형의 오류가 약 36%로 가장 많았다. 또한 C유형과 정리 또는 성질을 잘못 적용한 D유형의 합을 살펴보면 약 41%로 문항 1-5)에서의 약 10%와 매우 대조적인 결과가 나타났다. 다른 오류 유형과 달리 C와 D 오류 유형은 선수학습과는 별도로 '극한'단원을 배우면서 학생들이 새롭게 형성하게 되는 개념 정의나 개념 이미지와 연결되어 오류가 나타날 수 있는 유형들이다. 그런데 이 유형들에서 문항 1-5)와 2-4)가 극명한 차이를 보이는 것은 그 만큼 학생들이 무한수열의 극한 보다 무한급수에 대한 개념을 더 어려워하고 있으며 성질이나 정리들이 정확하게 확립되어 있지 않음을 말해주고 있다.

3. [연구문제 3]에 대한 결과 및 분석 :

부적절한 개념 이미지를 가지고 있음에도 불구하고, 수렴·발산을 바르게 판단할 수 있는가?

이에 관한 분석을 위해 다음과 같이 총 네 가지의 경우로 나눠 살펴볼 것이다.

(1) 무한수열의 극한
무한수열의 극한에 관한 부적절한 개념 이미지를 많이 가지면,
① 무한수열에 대한 수렴·발산 여부를 판단하는 간단한 문항에 대해서도 오답이 많이 나타나는가?
② 무한수열에 대한 수렴·발산 여부를 판단하는 교과서 예제 수준의 문항에 대해서도 오답이 많이 나타나는가?

(2) 무한급수의 합
무한급수에 관한 부적절한 개념 이미지를 많이 가지면,
① 무한급수에 대한 수렴·발산 여부를 판단하는 간단한 문항에 대해서도 오답이 많이 나타나는가?
② 무한급수에 대한 수렴·발산 여부를 판단하는 교과서 예제 수준의 문항에 대해서도 오답이 많이 나타나는가?

1) 무한수열의 극한

극한에 관한 부적절한 개념 이미지를 얼마나 갖고 있는지는 무한수열의 극한과 관련한 개념 이미지를 물었던 문항인 1-1)과 1-2)의 ①~③, 1-4)의 ①~⑦ 총 11개의 결과를 합산해서 파악했다. 문항 1-1)에서는 부적절한 개념 이미지로 분류되었던 I유형과 무응답을 오답으로 보았다.

[표 13] 문항 1-1), 1-2), 1-4)에 대한 부적절한 개념 이미지 개수 합산

	부적절한 개념 이미지 개수												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	합계
응답자수	2	18	31	33	15	12	6	2	1	1	0	0	121명

수열의 수렴 여부를 판단하는 매우 간단한 문항으로는 질문지 문항 1-3)을 제시했다. 극한에 관한 성질이나 정리 없이 극한에 관한 정의만 알면 눈으로 보고 답할 수 있는 매우 간단한 문항이다

1-3) 다음 수열이 수렴하면 그 수렴값을 구하고, 발산하면 그 이유를 쓰시오.

① $-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$　　② $1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \cdots$

③ $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \cdots$　　④ $\frac{1}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ 1,\ \sqrt{3},\ \cdots$

⑤ $3+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2},\ 3+\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{3},\ 3+\frac{1}{4},\ 1+\frac{1}{4},\ \cdots$

이 문항은 [연구문제 2]에서 살펴본 문항 1-5)와는 구별된다. 1-5)는 교과서의 예제들을 모아놓은 것이라면 이 문항 1-3)은 예제를 다루기 이전에 극한의 정의를 배우면서 그 개념을 확인하기 위해 다루는 보기들에 해당한다. 이 문항에 대한 학생들의 응답 결과는 다음과 같다.

[표 14] 문항 1-4)에 대한 응답 유형 분류

		정답		오답		합계
		정답자수	정답률	오답자수	오답률	
1-3)	①	91	75.2%	30	24.8%	121명 (100%)
	②	107	88.4%	14	11.6%	〃
	③	108	89.3%	13	10.7%	〃
	④	99	81.8%	22	18.1%	〃
	⑤	66	56.2%	53	43.8%	〃

문항 1-3) 가운데 ①과 ⑤의 정답률이 다른 문항에 비해 낮게 나타났다. ①의 오답들을 살펴보면, +항과 -항이 교대로 진행되는 것을 보고 진동하는 수열이라고 답한 학생들이 많았다. 그리고 ⑤는 짝수 항과 홀수 항의 수렴값이 달라 발산하는 수열인데, 오답자들 가운데는 짝수 항일 때와 홀수 항일 때의 수렴값을 각각 구해서 수렴값을 두 개로 답한 경우가 많았다.

한편, 각 학생별로 이 문항에 대한 오답 개수를 합산한 결과는 다음 [표15]와 같다.

[표 15] 문항 1-3)에 대한 오답 개수 합산

1-3)	오답 개수						
	0	1	2	3	4	5	합계
응답자수	49	37	20	7	6	2	121명

다음으로 문항 1-5)에 대해 살펴보자. [연구문제 2]에서 살펴본 것처럼 일정 풀이 과정을 거쳐 답에 도달할 수 있는 문항이다. 문항 1-5) ①~④에서 각 학생별로 무응답 또는 오답을 나타낸 경우를 모두 합산한 결과는 다음 표와 같다.

[표 16] 문항 1-3)에 대한 오답 개수 합산

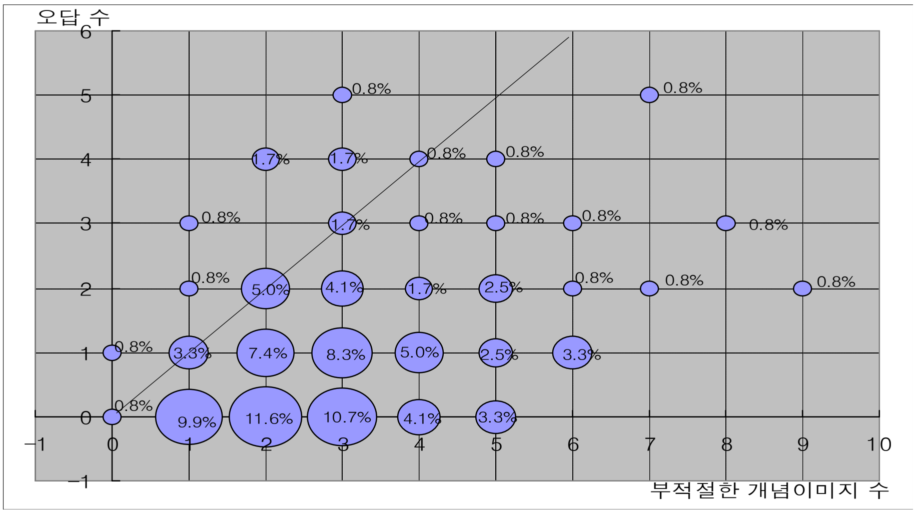
1-5)	오답 개수					
	0	1	2	3	4	합계
응답자수	61	35	16	8	1	121명

(1) 무한수열의 극한에 대한 부적절한 개념 이미지 개수와 수열의 수렴·발산을 판단하는 간단한 문항에 대한 오답 개수 사이의 관계

[표 17] 무한수열의 극한에 대한 부적절한 개념 이미지 개수와 문항 1-3)의 오답 개수 상관표

		무한수열의 극한에 대한 부적절한 개념 이미지 개수										
		0개	1개	2개	3개	4개	5개	6개	7개	8개	9개	합계
문항 1-3)의 오답 개수	5개				1				1			2명
	4개			2	2	1	1					6명
	3개		1		2	1	1	1		1		7명
	2개		1	6	5	2	3	1	1		1	20명
	1개	1	4	9	10	6	3	4				37명
	0개	1	12	14	13	5	4					49명
	합계	2명	18명	31명	33명	15명	12명	6명	2명	1명	1명	121명

위의 상관표에 따르면, 부적절한 개념 이미지가 많다고 해서 그에 비례하여 오답의 개수가 늘어난다고 말하기는 어렵다. 부적절한 개념 이미지의 개수에 상관없이 모든 학생의 오답 수는 0개와 1개에 집중되어있다. 이 두 요인의 상관계수 $r \fallingdotseq 0.32$ 정도로 나타났으며, 이는 거의 상관이 없거나 또는 약한 양의 상관관계가 있음을 말해준다. 위의 상관관계를 분산형 차트의 일종인 거품형 차트로 표현해 보면 다음 [그림 1]과 같다. 원의 크기는 각 격자점에 분포하고 있는 학생의 수를 나타내며 숫자는 전체에 대한 비율을 적어놓은 것이다. 그림을 통해서도, 개념 이미지의 개수에 상관없이 오답 개수는 대부분이 0개와 1개에 분포하고 있음을 알 수 있다. 즉, 대부분 좌측 하단에 위치하고 있다.



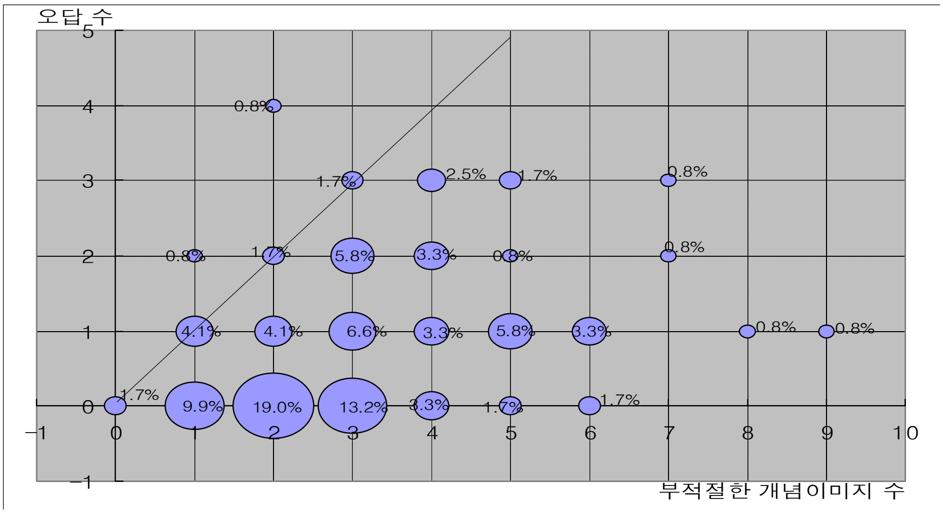
[그림 1] 무한수열의 극한에 대한 부적절한 개념 이미지 개수와 문항 1-3)의 오답 개수에 관한 거품형 차트

(2) 수열의 극한에 대한 부적절한 개념 이미지 개수와 수열의 수렴·발산을 판단하는 교과서 예제 수준의 문항에 대한 오답 개수 사이의 관계

[표 18] 무한수열의 극한에 대한 부적절한 개념 이미지 개수와 문항1-5)의 오답 개수 상관표

		무한수열의 극한에 대한 부적절한 개념 이미지 개수										
		0개	1개	2개	3개	4개	5개	6개	7개	8개	9개	합계
문항 1-5)의 오답 개수	4개			1								1명
	3개				2	3	2		1			8명
	2개		1	2	7	4	1		1			16명
	1개		5	5	8	4	7	4		1	1	35명
	0개	2	12	23	16	4	2	2				61명
	합계	2명	18명	31명	33명	15명	12명	6명	2명	1명	1명	121명

앞의 ①에서와 마찬가지로 부적절한 개념 이미지 개수가 1개, 2개, 3개일 때 모두 오답 개수는 0개가 그 다음으로 1개인 경우가 많았다. 그러나 부적절한 개념 이미지가 5개, 6개일 때는 오답수가 0개인 경우 보다 1개인 경우가 더 많았다. 그러나 이 두 요인의 상관계수도 $r \fallingdotseq 0.34$ 로 상관관계가 매우 약하다고 할 수 있다. 이를 거품형 차트로 나타내면 [그림 1]보다 더 뚜렷하게 좌측 하단 1행에 대부분이 분포하며, $y=x$ 직선보다 아래쪽으로 분포함을 알 수 있다.



[그림 2] 무한수열의 극한에 대한 부적절한 개념 이미지 개수와 문항 1-5)의 오답 개수에 관한 거품형 차트

2) 무한급수의 합

무한급수에 관한 부적절한 개념 이미지를 얼마나 갖고 있는지에 대해서는 무한급수와 관련한 개념 이미지를 물었던 문항인 2-1)과 2-3)의 ①에서 ⑤까지 총 6개에 대하여 각 학생별로 부적절한 개념 이미지의 개수가 몇 개인지 합산하여 판단하였다. 학생이 문항 2-1)에서 무응답 또는 I유형에 해당했는지, 그리고 문항2-3)에서는 오답을 몇 번 제시했는지 그 수를 세었다.

[표 19] 문항 2-1), 2-3)에 대한 부적절한 개념 이미지 개수 합산

	부적절한 개념 이미지 개수							
	0	1	2	3	4	5	6	합계
응답자수	15	36	24	25	14	4	1	121명

무한급수의 수렴 여부를 판단하는 매우 간단한 문제로, 질문지 문항 2-2)를 제시하였다. 각 항들이 나열되어 있어 무한급수에 관한 성질이나 정리 없이 정의만 알면 쉽게 답할 수 있는 문항으로, 무한급수의 합에 대한 정의를 배우면서 그 개념을 확인하기 위해 다루는 매우 간단한 문제들이다. 교과서의 예제였던 문항 2-4)와는 구별된다.

2-2) 다음 무한급수가 수렴하면 그 수렴값을 구하고, 발산하면 그 이유를 설명하시오. ① $-2+2-2+2-\cdots$ ② $1+\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+\cdots$ ③ $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots$ ④ $1-3+9-27+81-\cdots$ ⑤ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$

이 문항에 대한 학생들의 정답률은 다음과 같다.

[표 20] 문항 1-4)에 대한 응답 유형 분류

		정답		오답		합계
		정답자수	정답률	오답자수	오답률	
2-2)	①	81	66.9	40	33.1	121명 (100%)
	②	92	76.0	29	24.0	〃
	③	70	57.9	51	42.1	〃
	④	87	71.9	34	28.1	〃
	⑤	39	32.2	82	67.8	〃

전반적으로 무한수열의 극한에 대해 물었던 문항 1-3)에 비해 정답률이 낮았다. 교대수열의 무한급수에 대한 질문인 문항 2-2) ①에 대해서 “ $\lim_{n\to\infty} S_n \neq \lim_{n\to\infty} S_{n+1}$이므로 극한값이 존재하지 않는다.” 라고 정확하게 답변한 학생은 2명이었다. “짝수 항이면 0으로, 홀수 항이면 -2로 수렴한다.”라고 답변하여 수렴값이 둘 이상일 수도 있다는 잘못된 개념을 드러낸 학생도 3명 있었고, “-2와 2를 진동한다.”고 답변하여 무한수열의 극한과 무한급수를 혼동하고 있음을 보여주는 학생들도 4명 있었다. 또한 공비가 -1인 등비수열로 생각하여 무한등비급수가 발산함을 설명한 학생들도 있었다. 문항 2-2) ②부터 ④까지는 무한등비급수에 대한 질문이다. 이 중에서는 ③의 정답률이 가장 낮았는데, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열의 극한값 0을 답으로 제시한 학생들이 많았다. 여전히 무한수열의 극한과 무한급수를 혼동하고 있음을 보여주는 예이다. 또한 발산하는 경우인 ②와 ④에 대해서도 $\frac{a}{1-r}$ (단, a는 첫항, r은 공비)로 수렴한다고 답한 학생들이 오답의 대부분을 차지했다. 문항 2-2) ⑤의 경우도 오답의 대부분은 “0으로 수렴한다”고 답한 내용이었다. 또한 정답은 맞췄으나, “양수의 덧셈이므로 발산한다.”, “양수이므로 더하면 더할수록 값이 커지기 때문이다.” 등과 같이 잘못된 개념 이미지를 가진 학생들도 있었다.

각 학생별로 이 문항에 대한 오답 개수를 합산한 결과는 다음과 같다.

[표 21] 문항 2-2)에 대한 오답 개수 합산

2-2)	오답 개수						
	0	1	2	3	4	5	합계
응답자수	19	23	33	23	12	11	121명

다음으로, 교과서 예제에 해당하는 문항 2-5)에 대한 오답 개수를 합산하였다. [연구문제 2]에서 문항 2-5) ①부터 ④까지 제시했던 오답자수를 각 학생별로 무응답 또는 오답의 개수가 몇 개인지 세었으며, 다음과 같은 결과를 얻었다.

[표 22] 문항 2-5)에 대한 오답 개수 합산

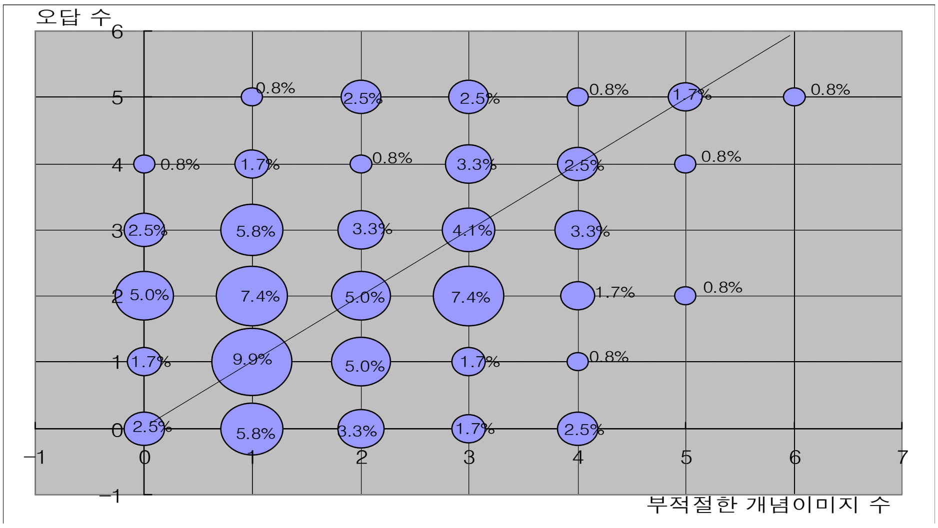
2-4)	오답 개수					
	0	1	2	3	4	합계
응답자수	61	35	16	8	1	121명

(1) 무한급수에 대한 부적절한 개념 이미지 개수와 무한급수의 수렴・발산에 대한 간단한 문항에 대한 오답 개수 사이의 관계

각 학생별로 이 두 가지에 대한 분포를 다음 상관표와 챠트로 나타내었다.

[표 23] 무한급수에 대한 부적절한 개념 이미지 개수와 문항 2-2)의 오답 개수 상관표

		무한급수에 대한 부적절한 개념 이미지 개수							
		0개	1개	2개	3개	4개	5개	6개	합계
문항 2-2)의 오답 개수	5개		1	3	3	1	2	1	11명
	4개	1	2	1	4	3	1		12명
	3개	3	7	4	5	4			23명
	2개	6	9	6	9	2	1		33명
	1개	2	12	6	2	1			23명
	0개	3	7	4	2	3			19명
	합계	15명	38명	24명	25명	14명	4명	1명	121명



[그림 3] 무한급수의 부적절한 개념 이미지 개수와 문항 2-2)의 오답 개수에 관한 거품형 차트

이 결과는 앞에서 살펴본 무한수열의 극한에 대한 결과와 차이가 있다. 우선 여러 격자점에 다양하게 분포되어 있다. 그리고 앞에서는 좌측 하단에 가로로 분포하는 학생수가 많았다면 이번에는 좌측에 세로로 분포하는 학생수가 많다. 이는 부적절한 개념 이미지의 개수가 1개인데도 문제를 풀면서 오답을 나타낸 학생들이 다양함을 뜻한다. 부적절한 개념 이미지 개수가 2개, 3개, 등으로 다른 경우에도 비슷하다. 두 요인사이의 상관계수 $r \fallingdotseq 0.33$ 으로 역시 상관관계가 매우 약하다고 할 수 있다.

(2) 무한급수에 대한 부적절한 개념 이미지 개수와 무한급수의 수렴·발산을 판단하는 교과서 예제 수준의 문항에 대한 오답 개수 사이의 관계

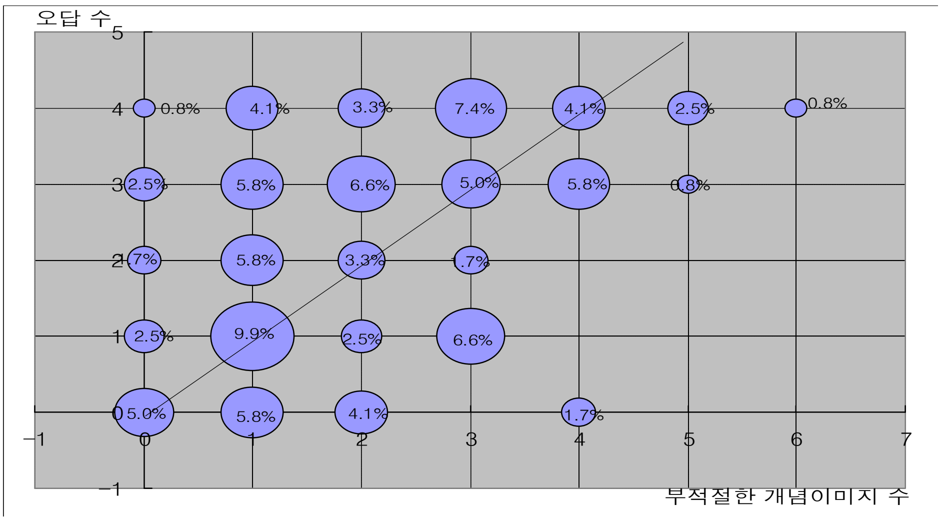
무한급수에 관한 부적절한 개념 이미지 개수와 교과서의 예제로 제시된 무한급수의 수렴 여부를 판단하는 문항에 대한 오답 개수에 관한 분포를 살펴보자. 이를 상관표와 챠트로 나타내면 다음과 같다.

이번 상관표와 그림에서도 [표 23] 및 [그림 3]에서와 마찬가지로 좌측에 세로로 분포하고 있는 학생이 많다. 부적절한 개념 이미지 개수가 1개인 학생도 오답 개수는 다양하며, 부적절한 개념 이미지 개수가 2개, 3개인 학생도 마찬가지이다. 두 요인 사이의 상관계수 $r \fallingdotseq 0.42$로 앞의 경우들보다는 조금 높게 나타났으나 이 역시 상관관계가 강하다고 말 할 수는 없는 수치이다.

그러나 직선 $y=x$ 보다 상단에 위치하는 학생이 [그림 48]에서 보다 더 많다. 이는 (1) 무한수열의 극한에서 보였던 분포와는 상반되는 상황이다. [그림 47]에서 나타났던 것처럼, 무한수열의 극한에서는 직선 $y=x$보다 하단에 대부분이 위치하고 있었다.

[표 24] 무한급수에 대한 부적절한 개념 이미지 개수와 문항 2-4)의 오답 개수 상관표

		무한급수에 대한 부적절한 개념 이미지 개수							
		0개	1개	2개	3개	4개	5개	6개	합계
문항 2-4)의 오답 개수	4개	1	5	4	9	5	3	1	28명
	3개	3	7	8	6	7	1		32명
	2개	2	7	4	2				15명
	1개	3	12	3	8				26명
	0개	6	7	5		2			20명
	합계	15명	38명	24명	25명	14명	4명	1명	121명



[그림 4] 무한급수의 부적절한 개념 이미지 개수와 문항 2-4)의 오답 개수에 관한 거품형 차트

이상으로 (1) 무한수열의 극한, (2) 무한급수의 합에 대하여 부적절한 개념 이미지를 갖고 있는 것과 정답을 구하지 못하는 것 사이에 어떤 양상이 나타나는지 살펴보았다. 이를 정리해보면 다음과 같은 특징들을 찾을 수 있다.

첫째, 부적절한 개념 이미지를 갖고 있는 것과 문제의 정답을 구하지 못하는 것 사이에는 강한 상관관계가 나타나지 않았다.

살펴보았던 네 가지 경우 모두 상관계수 r의 범위가 $0.32 \leqq r \leqq 0.42$ 로 나타났으며, 이는 상관관계가 매우 약함을 말하고 있다. 개념에 대한 이해 정도가 낮아도 문제의 정답은 바르게 구할 수 있음을 예측하게 한다. 학생들이 개념에 대한 정확한 이해 없이, 유형화 된 문제 풀이를 연습하여 정답을 구할 수 있었던 것으로 보인다. 그래서 정답을 구했음에도 불구하고 풀이 과정에서 다양한 오류가 나타난 것으로 판단된다.

둘째, (1) '무한수열의 극한'에서보다 (2) '무한급수의 합'에서의 상관관계가 상대적으로 더

강했다.

물론 상관지수 상으로는 앞서 말한 것처럼 매우 약하기는 하지만, 무한급수의 합을 구하는 예제 문제를 푸는 경우에 극한에서의 경우보다 상관지수가 약 1 정도 더 높게 나왔다. '무한급수의 합'에 대해서는 '무한수열의 극한'에서보다 부적절한 개념 이미지를 가지고 있으면 문제를 틀릴 가능성이 더 높을 것으로 추측된다.

셋째, (1) '무한수열의 극한'에서 나타난 분포 양상과 (2) '무한급수의 합'에서 나타난 분포 양상이 반대의 성향을 띄었다.

'무한수열의 극한'에서는 부적절한 개념 이미지 개수에 크게 연관 없이 대부분 오답 개수가 적었다. 즉, 대부분 정답을 구했음을 뜻한다. 하지만 '무한급수의 합'에서는 부적절한 개념 이미지 개수에 크게 연관되지 않고 대부분 오답이 더 많이 나타났다.

Ⅴ. 요약 및 결론

본 논문에서는 학생들이 어려워하는 단원 중 하나인 '수열의 극한'단원에 대하여 이 · 공계열 2학년 학생을 대상으로 아래와 같은 연구문제를 제시하였다.

'수열의 극한'과 '무한급수의 합'에 관련하여, 고등학교 2학년 학생들은

1. 어떤 개념 정의 및 개념 이미지를 가지고 있는가?
   (1) 교과서에 제시된 형식적 개념 정의와 개인의 개념 정의는 어떻게 다른가?
   (2) 학생들이 갖고 있는 개념 이미지 중, 부적절한 개념 이미지는 무엇인가?
2. 학생들은 교과서 예제를 푸는 과정에서 어떤 유형의 오류를 범하는가?
3. 부적절한 개념 이미지를 가지고 있음에도 불구하고, 수렴 · 발산을 바르게 판단할 수 있는가?

[연구문제 1]에서 살펴보고자했던 극한에 대한 개념 정의 및 개념 이미지를 조사한 결과, 우선 학생들의 개념 정의가 교과서에 제시된 형식적 정의와 비슷하게 일치하는 경우는 무한수열의 극한에 대해서는 전체 학생의 약 11%, 무한급수에 대해서는 약 5%에 불과했다. 대신 많은 학생들이 형식적인 정의처럼 짜임새 있는 정의는 아니지만 나름대로 직관적인 정의를 내렸다. 그러나 무한수열의 극한에 대해서는 약 19%의 학생들이, 무한급수에 관해서는 약 24%의 학생들이 전혀 정의를 내리지 못했다. 또한, 무한수열의 극한에 대해서 약 27%의 학생들이, 무한급수의 합에 대해서는 약 22%의 학생들이 오류가 있는 정의를 제시하였다.

학생들의 개념 정의를 포함하여 전체적인 개념 이미지를 살펴봤을 때, 다음과 같은 부적절한 개념 이미지들이 도출되었다.

- 수열의 발산과 수렴의 의미를 반대로 잘못 알고 있다
- 수열은 수렴하거나 양의 무한대로 발산한다.
- 일반항이 상수인 수열의 극한값을 바르게 구하지 못 한다
- 수열의 각 항들은 극한값을 향해 무한히 가까워지는 것이지 극한값과 같아질 수 없다
- 수열의 각 항을 무한히 나열하면 그 값이 극한값이 된다. 즉, 항수를 무한히 늘리면 수열 $\{a_n\}$의 항들은 극한값과 같게 된다.
- 수열의 각 항들은 극한값보다 클 수 없다
- 수열의 극한값은 2개 이상일 수 있다

- 극한값은 수열의 마지막 항의 값이다
- '무한수열의 극한'과 '무한급수의 합'을 혼동 한다
- '무한등비급수의 수렴'으로 '무한급수의 수렴'을 한정 한다
- '무한급수의 합'은 부분합 수열의 극한값이 아니라, 극한값을 계속 더해나가는 것이다
- 각 항이 모두 양수이면 무한급수는 발산 한다
- 0.9999⋯ 는 1과 다르다

[연구문제 2]의 분석을 통해 나타난 학생들의 오류 유형은 다음과 같이 크게 6가지로 나눌 수 있었다.

A: 기호 사용의 오류
B: 연산 오류
C: 정의가 왜곡된 오류
D: 정리 또는 성질을 잘못 적용한 오류
E: 풀이 과정정이 생략된 오류
F: 기타 오류

'무한수열의 극한' 단원에서 반드시 알아야할 기본적인 유형의 문제들을 푸는 과정에서 평균적으로 약 68%의 학생들이 풀이 과정에서 오류를 나타내었다. 정의와 정리 또는 성질을 잘못 적용한 C와 D유형의 오류를 범한 학생은 합쳐서 약 10%로, 공식처럼 결과를 외워서 풀이 과정을 생략하고 문제를 푼 E유형의 학생 약 23%와 기호를 잘못 사용한 A 유형의 학생 약 19%보다 낮은 비중을 차지했다. 그러나 '무한급수의 합'에서는 정의와 정리 또는 성질을 잘못 적용한 오류인 C와 D유형의 학생들을 합치면 약 41%에 달했으며, 이는 오류를 보인 약 71%의 학생들에 대해 절반이 넘는 수치이다. 따라서 학생들이 '무한수열의 극한'에 비하여 '무한급수의 합'에 관해서 그 정의와 성질들을 이해하고 적용하는 것을 어려워 한다는 점을 유추할 수 있다.

[연구문제 3]에서는 부적절한 개념 이미지 개수와 문제 풀이에서 나타난 오답의 개수 사이에 상관관계가 있는지 조사하였다. 그러나 '무한수열의 극한'과 관련해서는 상관계수가 약 0.3 정도, '무한급수'에 관련해서는 약 0.4 정도로 매우 약한 양의 상관관계가 나타났다. 즉, 부적절한 개념이 많은 것과 문제의 답을 구하지 못하는 것 사이에는 상관관계가 약했다. '무한수열의 극한'과 관련한 문제에서는 부적절한 개념 이미지가 많더라도 문제의 정답을 구한 학생들이 많았고, '무한급수'와 관련한 문제에서는 부적절한 개념 이미지가 적어도 문제의 정답을 구하지 못하는 학생들이 많았다. 일반적으로 개념을 바르게 알고 있어야 문제를 잘 풀 수 있을 것으로 생각했으나 결과는 그렇지 않았다. 극한의 개념은 정확하지 않아도 여러 번의 연습과 유형을 익히는 과정을 통해 문제의 정답을 구한 것으로 추측된다. 교사가 수업시간에 개념에 대한 지도 보다 문제 풀이에 대한 지도에 더 중점을 두지 않았는지 반성해볼 필요가 있을 것이다. 그리고 무한급수에 대해서는 학생들이 어려워해서 그런지 부적절한 개념이 별로 없음에도 불구하고 문제의 정답을 구하지 못한 학생들도 많았다. 즉, 개념을 잘 알고 있는 것과 그렇지 못한 것이 정답을 구하는 것에 미치는 영향이 적었다. 이는 개념만 바르게 안다고 해서 문제를 잘 푸는 것만은 아니며 문제풀이에 대한 연습도 필요함을 암시한다고 볼 수 있다. 그러나 이러한 결과는 기본적인 수준의 문제들에 대한 결과이었다. 따라서 문제의 난이도가 높아지고 학생들의 응용력과 문제 해결력을 많이 요구하는 문제에서는 다른 양상이 나타날 수 있음을 분명히 지적하는 바이다.

이상으로 연구문제 세 개에 대한 결론을 얻었다. 이를 토대로 부적절한 개념 이미지나 오류를 교정하기 위한 처치 방안의 개발을 위한 연구가 필요하리라 본다. 또한 본 연구에서는 학생들이 이 단원에서 알아야할 기본적인 수준에 초점을 맞추었으나, 극한의 개념이 다양하게 응용될 수 있는 만큼 활용과 관련한 수준에 초점을 맞춘 연구도 의미 있을 것으로 생각된다.

참고문헌

교육부 (1995). 고등학교 수학과 교육과정 해설-공통수학, 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 실용수학-. 교육부 고시 제1992-19호.

교육부 (1998). 수학과 교육과정. 제7차 교육과정 교육부 고시 제1997-15호.

교육부 (2001). 고등학교 교육과정 해설-⑤수학-. 교육부 고시 1997-15호.

김범수 (2004). 극한 개념의 효율적인 지도를 위한 연구. 동국대학교 교육대학원 석사학위 논문.

김상우 (2001). 고등학교 2학년을 대상으로 한 극한에 대한 오개념 및 오류에 관한 연구. 경상대학교 교육대학원 석사학위 논문.

김선주 (2005). 고등학교 극한 영역에서의 오류분석을 통한 교정학습지도방안. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.

김수미 (1994). 수학적 오개념의 자각과 조종-Fischbein의 메타인지전략을 통하여-. 대한수학교육학회 제4권 제2호, 173-188.

김응태 · 박한식 · 우정호 (1997). 증보 수학교육학개론. 서울대학교출판부.

김옥경 (1991). 고등학교 수학에서 발생하는 수학적 오류의 분류모델에 대한 연구. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.

김정렬 · 윤지여 (2004). 영어교육 연구에서 통계의 활용. 한국문화사.

김정환 (1999). 교육연구 및 통계방법. 원미사.

김천희 (2004). 교육연구와 논문 작성법. 21세기사.

김혁재 (2000). 고등학교 학생의 미분에 대한 이해와 오개념 및 오류에 관한 연구. 아주대학교 교육대학원 석사학위 논문.

김현웅 (2001). 호도법과 주기함수에 대한 오개념과 오류에 관한 연구. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위 논문.

김현정 (1990). 무한 개념의 수학 교육적 고찰. 서울대학교 대학원 석사학위 논문.

김희경 (1993). 수학적 개념 학습-지도이론에 대한 분석 고찰. 서울대학교 대학원 석사학위 논문.

노은정 (2002). 수학학습에서의 오류의 활용 효과-정의 지도를 중심으로. 이화여자대학교 대학원 석사학위 논문.

노선숙 · 김민경 (2001). 수학교육에서 교수매체에 대한 교사, 학생, 학부모의 인식 조사 연구. 한국수학교육학회지 시리즈A <수학교육> 제40권 제2호, 265-289.

노수진 (2000). 고등학교 학생들의 수열의 극한과 급수의 합에 대한 오개념과 오류분석에 관한 연구. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위 논문.

박도순 (2001). 교육연구방법론. 제2판. 문음사.
박선화 (1998). 수학적 극한 개념의 이해에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.
송경재 (2002). 일반계 고등학교 미・적분단원에서의 오류 유형 분석 및 지도방안. 영남대학교 교육대학원 석사학위 논문.
우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.
우정호・류희찬・문광호・송갑석・박선화・박경미 (2003). 고등학교 수학Ⅰ. 대한교과서.
우정호・류희찬・문광호・송갑석・박선화・박경미 (2003). 고등학교 수학Ⅰ 교사용 지도서. 대한교과서.
윤옥경・윤재한・허원・손문구・송병희 (1997). 고등학교 수학Ⅰ. (주)중앙교육진흥연구소.
윤원희 (2005). 무한 개념의 이해에 관한 연구: Repertory Grid의 적용. 서울대학교 대학원 석사학위 논문.
이기문・임홍빈 (1995). 우리말 돋움사전. (주)동아출판사.
이상원 (1993). 고등학교 학생의 대수 문제 해결: 전략과 오류 분석. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.
이준열 (2000). 학습부진아의 비정형 문제풀이 분석. 강원대학교 교육대학원 석사학위 논문.
이희영 (2005). 극한의 올바른 개념 정립을 위한 연구(고등학교 극한단원을 중심으로). 연세대학교 교육대학원 석사학위 논문.
정용균 (2001). Maple을 이용한 극한의 오개념과 오류에 대한 지도방법의 연구-고등학교 2학년과정을 중심으로. 순천대학교 교육대학원 석사학위 논문.
조영미 (2001). 학교수학에 제시된 정의에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.
조현정 (1997). 극한에 관련된 학생들의 수학적 신념에 관한 연구. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.
최복순 (2000). 고등학교 2학년 학생의 삼각함수에 대한 오개념과 오류에 관한 연구. 충남대학교 교육대학원 석사학위 논문.
최영아 (2001). 고등학교 수학에서 수학적 오류의 분석과 분류에 대한 연구. 성신여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.
최중오 (2001). 고등학교 극한 개념에 대한 연구 -역사 발생적 원리에 따른 극한수업의 효과성-. 고려대학교 교육대학원 석사학위 논문
최지선 (2003). 중등학교 수학 학습에서 나타나는 오개념에 대한 고찰. 서울대학교 대학원 석사학위 논문.
한문환 (2000). 학습부진아의 비정형 문제풀이 분석. 강원대학교 교육대학원 석사학위 논문.
한종희 (1997). 고등학교 2학년 학생의 극한에 대한 오개념과 오류에 관한 연구. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.
Bachelard, G (1970). la Philosophie du nom. Presses Universitaires de France. 김용선 역(1991). 부정의 철학. 인간사랑
Clements, M. A. (1980). Analyzing children's error on written mathematical tasks. Educational Studies in Mathematics 11, 1-21.
Fischbein, E., & Schnarch D. (1997). The Evolution Withe Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions. Journal for Research in Mathematics Education,

28(1), 96-105.

Marsden, J. E., & Hoffman, M. J. (1995). ELEMENTARY CLASSICAL ANALYSIS 2nd. FREEMAN.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. Journal for Research in Mathematics Education, May 1979, 163-172.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

Tall, D. (2003). Advanced Mathematical Thinking. 류희찬 · 조완영 · 김인수역 (1991). 고등수학적 사고. 경문사.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. INT. J. MATH. EDUC. SCI. TECNOL. vol. 14, No. 3, 293-305.

Vinner, S. (1989). Images and definition for the concept of function. Journal for Research in Mathematics Education, vol. 20, No. 4, 356-366.

Vinner, S. (1992). The function concepts as a prototype for problems in mathematics learning. Dubinsky(ed.), The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy. 195-213.

Concept Images and Definitions of Conepts of Infinity and Limits for High School Students*

Whang, Woo Hyung[5] · Jee, Young Jo[6]

Abstract

The purpose of the study was to investigate the definitions and concept images of Infinity and limits for high school students. In addition, the error patterns of the students were also investigated. The participants were 121 girls highschool students and survey method was used to collect data. Only 11% and 5% of the participants revealed the definitions similar to the standard textbook definitions in limits of infinite sequences and infinite series respectively. The participants showed 6 types of error patterns and had more difficulties in understanding and applying concepts and properties of infinite series than those of infinite sequences.

Key Words : Concept of limit, Concept image, Mathematics error

---

* This research is supported by a Korea University Grant.
5) Korea University (wwhang@korea.ac.kr)
6) Graduate School of Education, Korea University (evercg@hanmail.net)