한국학교수학회논문집 제 11 권, 제 2 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 11, Number 2, 201-219, June 2008

초등학교 6학년 수업에서의 수학적 의사소통과 학생의 수학적 사고 분석

홍우주[1] · 방정숙[2]

본 연구는 초등학교 6학년 수학 수업에서 이루어지는 교사와 학생의 의사소통을 분석하고 의사소통 수준에 따라 학생의 수학적 사고의 특징을 탐구하였다. 이를 위해 수학적 의사소통을 질문하기, 설명하기, 수학적 아이디어의 근원이라는 세 가지 요소로 나누어 분석하였다. 또한 수학적 의사소통의 수준에 따라 학생의 수학적 사고의 빈도와 수학적 사고의 유형이 어떻게 다른지 양적연구방법과 질적연구방법을 병행하여 살펴보았다. 교사와 학생의 수학적 의사소통은 하위 요소에 따라 수준이 동일하지 않았으나 학생 간 질문이 활발할수록, 교사가 수학적으로 다양한 해결방법과 수학적으로 정당화할 수 있는 설명을 요구할수록, 학생의 수학적 아이디어를 적극적으로 반영할수록 수학적 의사소통이 활발히 일어났다. 그리고 수학적 의사소통 수준이 높을수록 학생의 수학적 사고의 빈도가 많이 나타났고 학생의 수학적 사고의 유형도 높은 단계를 나타내었다. 이를 통해 본 논문은 초등학교 수준에서 경험적 근거를 토대로 수학적 의사소통의 중요성을 강조하고 이를 향상시키기 위한 시사점을 제공한다.

주요용어 : 수학적 의사소통, 질문하기, 설명하기, 수학적 아이디어의 근원, 수학적 사고

I. 서 론

의사소통은 인간이 사회생활을 유지할 수 있게 하고 더욱이 교수-학습 상황에서 의미 있는 학습을 가능하게 한다. 수학적 의사소통은 다른 사람의 생각을 들음으로써 새롭게 생각할 수 있게 하며, 다른 방법으로 생각할 수 있는 기회를 제공하고 많은 상황에서 다양한 접근을 할 수 있게 한다(Rowan, Mumme, & Shepherd, 1990). 그리고 수학적 언어와 사고를 연결시켜 수학 내용을 깊이 있게 이해하게 하며 수학적 사고를 표현할 수 있도록 하여 수학적 사고의 발달을 촉진한다(이종희, 김선희, 2002; Brendefur & Frykholm, 2000).

전미수학교사협의회(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000)는 수학교육의 질과 목표, 변화를 촉진하는 규준의 하나로써 수학적 의사소통 능력을 제안함으로써 의사소통을 학교 수학의 본질적인 부분으로 강화하는 역할을 하였다. 호주의 교육과정 평가 기준에서는 수학적 활동요소로 조사, 추측, 문제해결 전략의 이용, 적용과 증명, 수학적

1) 대구월서초등학교 (kitty3523@hanmail.net)
2) 한국교원대학교 (jeongsuk@knue.ac.kr)[교신저자]

언어의 사용, 상황에서의 탐구 등을 포함하는데(김수환, 2000), 이는 수학적 언어 사용을 권장하여 수학적 의사소통 학습을 강조한 것이라고 볼 수 있다. 또한 뉴질랜드의 수학 교육과정의 성취 목표에서도 수학적 사고에 관한 의사소통이 포함되어 있다(최승현, 황혜정, 1999).

한편, 우리나라에서는 제7차 수학과 교육과정에서 문제해결력, 수학적 추론 능력, 의사소통 능력 등을 포괄하고 있는 수학적 힘의 신장을 제안하였다(교육부, 1997). 또한 초·중등학교 교육과정 부분 수정 고시(교육인적자원부, 2006)에서는 수학과 교육목표에 명시적으로 의사소통 능력의 신장을 추가하였다. 이처럼 국가 교육과정 수준에서 수학적 의사소통의 중요성이 더욱 더 부각되고 있으며 수학 지식이나 추론 능력과 같이 하나의 평가 범주로써도 활용되고 있다.

수학적 의사소통은 수학적 사고의 구성과 발달에 관련되어 있다(Askew, Brown, Rhodes, Johnson, & William, 1997; Hobson, 2004; Tomaello, 2001). 즉 수학적 의사소통은 학생들이 수학적 사고를 조직하고 굳건히 할 수 있게 하고 다른 사람의 수학적 사고와 전략을 분석하여 자신의 수학적 사고를 구성하고 창조할 수 있게 하므로 수학적 의사소통은 수학적 사고의 발달과 연관되어 있다는 것이다. 그러므로 교사와 학생이 수학 수업에서 구체적으로 어떻게 의사소통을 하고 이에 따라 학생의 수학적 사고가 어떻게 이루어지는지에 대한 연구가 필요하다.

우리나라에서 수학적 의사소통에 관한 연구를 살펴보면, 의사소통 능력을 향상시키기 위한 방안이나 구체적인 교수·학습 자료를 제안하고 의사소통을 강조한 수학 수업의 효율성을 평가하는 연구 등이 주로 많이 이루어지고 있으나 초등학교 수학 수업에서 교사와 학생의 수학적 의사소통이 구체적으로 어떻게 이루어지며 이에 따른 학생의 수학적 사고를 알아보는 연구는 거의 없다. 이런 측면에서 본 연구는 초등학교 수학 수업에서 교사와 학생의 의사소통을 문헌 분석을 토대로 질문하기, 설명하기, 수학적 아이디어의 근원과 관련하여 어떻게 이루어지는지 구체적으로 알아보고, 이에 따라 각 교실에서 학생들의 수학적 사고의 특징이 어떠한지 그 빈도와 유형을 면밀히 탐색하여 교사들이 초등학교 수업에서 수학적 의사소통을 활용하기 위한 기초적인 정보를 제공하고자 하였다.

II. 이론적 배경

1. 초등학교에서의 수학적 의사소통

수학적 의사소통은 모든 학교교육과정에서 강조되어야 하지만 특히 초등학교에서 더욱 강조되어야 한다. 그 이유는 첫째, 수학적 의사소통은 초등학교 학생들에게 비형식적이고 직관적인 사고를 추상적이고 기초적인 수학적 언어와 연결하는 것을 돕기 때문이다. 둘째, 구체적 조작기인 초등학교 학생들은 구체물을 대상으로 하여 체험적 활동에 의해 형성된 표상을 시각적인 기호에 의한 학습과 언어에 의한 학습이 상보적인 관계를 유지하면서 학습이 이루어져야하기 때문이다(김상룡, 박병서, 1999). 셋째, 초등학교 학생들은 학교생활의 거의 모든 시간을 교사와 함께 생활하는 특성 때문에 많은 초등학교 학생들에게 교사는 중요한 사람으로 학생들의 수학적 발달에 영향을 주는 중심적인 역할을 한다. 실제로 학생들은 그들의 수학적 활동에 영향을 주는 교사를 내면화한다. 이런 측면에서 교사와의 원활한 수학적 의사소통은 학생들의 수학 학습에 많은 영향을 줄 수 있다.

2. 상호작용 유형과 수학적 의사소통 수준

수학 수업에서 교사와 학생, 학생과 학생간의 상호작용에 의해 의사소통 유형을 구분하여 살펴보면, 초등학교 수학 수업에서 이루어지는 교사와 학생들의 의사소통의 특징을 알 수 있다. 수학적 의사소통은 흔히 “깔대기 유형(funnel pattern)"과 “초점 유형(focusing pattern)"으로 구분할 수 있는데, 전자는 질문의 범위를 좁혀 문제를 여러 개의 하위 문제로 나누어 교사가 학생에게 질문하는 상호작용의 유형인데 반해, 후자는 학생들이 담화에 더 동등하게 참여하는 학습 상황을 만들어 학생들이 계속 과제에 집중하고 참여하도록 교사가 격려하는 유형이다(Wood, 1994). 또한 교사와 학생들 간의 상호작용을 보다 자세히 설명하기 위해서 토의 맥락을 세 가지로 구분하여 “방법을 보고하기(report ways)", “탐구(inquiry)", “논의(argument)"로 분석하기도 한다(Wood & Turner-Vorbeck, 2001).

한편, Hufferd-Ackles(2004)는 교실에서 모든 참여자가 수학학습을 할 수 있도록 교사와 학생간의 담화가 이루어지는 교실 공동체를 의미하는 말로 “수학 담화 학습 공동체(Math-Talk Learning Community)"라는 용어를 사용하면서, 그 공동체의 수준을 질문하기(questioning), 수학적 사고를 설명하기(explaining mathematical thinking), 수학적 아이디어의 근원(source of mathematical ideas), 학습의 책임성(responsibility for learning)으로 분류하여 0수준에서 3수준으로 구분하고 각 수준에서 교사와 학생의 대표적인 행동을 제시하였다. 개괄적으로 살펴보면 우선 0수준에서는 교사가 학생들에게 간단한 대답을 유도하는 정도로 수업을 이끄는 전통적인 교사 중심을 의미하고, 1수준에서는 교사가 학생들의 수학적 사고를 탐구하기 시작하지만 여전히 교사의 중심적인 역할이 돋보이는 상태이다. 한편, 2수준에서는 학생들이 수학 학습 담화 공동체의 중심 역할을 하도록 교사가 자극하기 시작하고 3수준에서는 더욱 더 학생들이 중심적이고 주도적으로 공동체에서 역할을 수행하도록 교사가 돕고 자신은 그 과정을 점검하는 역할을 하게 된다. 기존의 선행 연구는 수학 수업에서 교사와 학생들의 의사소통이 어떻게 이루어지는지 알아보기 위한 구체적인 분석 요소나 틀을 제공 하지 못한 반면에, Hufferd-Ackles(2004)의 연구는 네 가지 분류 요소와 그에 따른 교사와 학생의 행동 기준을 제시함으로써 수학수업에서 이루어지는 교사와 학생들의 의사소통을 자세히 살펴보려는 본 연구에 유용한 도구가 된다.

3. 수학적 사고

수학적 사고에 대한 연구는 그동안 많이 있었으나 수학적 사고에 대해 명확하게 사용하는 공통적인 정의를 찾기는 어렵다. 우선 강완과 백석윤(1998)은 수학적 사고를 수학적 문제 상황을 해결하기 위한 사고라고 정의하고 수학의 각 내용 영역과 관련시켜 집합적 사고, 함수적 사고, 도형적 사고, 통계적 사고 등으로 세분하여 설명한다. 또한 수학의 특정 내용과 관계없이 기능 측면에서 구별할 때는 논리적 사고, 추상화, 일반화, 연역적 사고, 귀납적 사고, 유비적 사고 등으로 구별하기도 한다.

한편, Williams(2000)는 수학적 사고를 수학적 아이디어의 추상화와 일반화를 포함하는 지적 활동으로 정의하고, 학생들이 수학 문제를 해결할 때 사용하는 인지 활동의 위계를 개발하기 위해서 인지적 복잡성(cognitive complexity)을 체계적으로 분류하기 위해 틀을 만들었

는데, 여기서 사용된 인지 활동이 이해하기, 적용하기, 분석하기, 종합-분석하기(synthetic - analyzing), 평가-분석하기(evaluative - analyzing), 종합하기, 평가하기이다. 이러한 위계는 수학적 지식의 구성은 추상화와 일반화의 인지 과정에서 일어나는 세 가지 관찰 가능한 인식 행동(epistemic actions), 즉, 인지하기(recognizing), 형성하기(building-with), 구성하기(constructing)로 이루어진다는 Dreyfus, Hershkowitz, Schwarz(2001)의 연구를 바탕으로 보다 정교화된다. Williams의 위계는 특정한 유형의 수학적 사고를 관찰 가능한 인식 행동과 연결했다는 점에서 의의가 있다.

한편, Wood, Williams, McNeal(2006)은 개별적인 인지 활동을 연구하기 위해서 개발된 Williams의 위계를 보다 확장하여 면담과 같은 특정 상황에서 개개 학생들의 사고를 관찰하는 수준을 넘어서서 학생들이 모둠이나 전체 학급 토론과 같은 상황에서 표현하는 수학적 사고를 고려했다([그림 1] 참조). 이러한 확장은 교실에서 일어나는 상호작용의 패턴과 학생들의 표현된 수학적 사고 간의 관계를 탐색할 수 있는 수단을 제공한다는 측면에서 본 연구와 관련된다.

수학적 사고		인지 활동의 예
인지하기 (Recognizing)	이해 (comprehending)	· 배운 아이디어나 알고 있는 전략으로 개념을 이해한다.
	적용 (applying)	· 알고 있는 수학적 아이디어를 언제 활용할지 안다.
형성하기 (Building-with)	분석 (Building-with analyzing)	· 새로운 맥락에 알고 있는 수학적 절차를 적용한다. · 약간 변형된 문제를 활용하여 해결한다. · 특정한 수치적 예를 활용하여 문제에 익숙하게 된다. · 수치적 결과를 체계화하고 패턴을 찾는다.
	종합 - 분석 (synthetic -analyzing)	· 차이점을 찾기 위해 두 가지 방법을 비교하고 대조한다. · 다양한 표현, 연산, 가정을 상호 연결한다. · 문제를 풀기 위해 한 가지 이상의 방법을 사용한다. · 개별적인 일반화, 즉 "작은 발견(small discovery)"을 만들어낸다. · 새로운 규칙을 만들기 위해 한 사례를 분석하거나 지침을 만든다.
	평가 - 분석 (evaluative -analyzing)	· 결점을 확인하고 논의를 강화하기 위해 해결 방법을 상호 연결한다. · 판단하기 위해 여러 가지 아이디어를 모은다. · 방법이나 결과가 합리적인지, 효율적인지, 명쾌한지 평가한다.
구성하기 (Constructing)	종합 (synthesizing)	· 발견한 패턴을 설명하기 위해 수학적으로 논의한다. · 단순히 해결만 하기 보다는 다양한 관점에서 문제를 탐구한다. · 새로운 생각이나 아이디어(통찰)를 만들기 위해 개념을 통합한다. · 새로운 통찰을 지속적으로 개발시키기 위해 문제를 점진적으로 탐구한다.
	평가 (evaluating)	· 일관되지 않은 정보를 인지하거나 보다 명쾌한 해결 방법을 찾기 위해 전체적으로 상황을 반성한다. · 제한점이나 다른 맥락에 적용하기 위해 문제 해결 과정을 반성한다. · 미래에 활용하기 위해 발견한 풀이 과정과 그 풀이과정이 일반적인 수학 과정에 어느 정도로 적용가능한지 반성한다.

[그림 1] 수학적 사고와 인지 활동의 범주

4. 선행연구 고찰

수학적 의사소통에 관련된 선행 연구를 살펴보면 수학적 의사소통 지도의 효과, 수학적

의사소통의 지도방안, 수학 수업에서 이루어지는 교사와 학생의 상호작용을 분석한 연구로 나누어 볼 수 있다. 첫째, 수학적 의사소통 지도의 효과에 대한 연구로는 수학적 의사소통을 지도 받은 학급과 그렇지 않은 학급 간에 학업 성취도, 문제해결 능력, 수학적 성향, 의사소통 능력, 추론 능력 등을 비교 및 대조하여 효과를 밝히려고 노력하였다. 예를 들어, 쓰기(예, 수학 펜팔, 수학 일기, 일지 쓰기)를 사용한 의사소통 지도 결과 학업성취도 측면에서는 차이가 드러나지 않았지만 학생들의 수학적 사고를 향상시키거나, 수학적 태도에 긍정적인 영향을 끼치는 것으로 드러났다(예, 김선희, 1998).

둘째, 수학적 의사소통의 지도방안에 대한 연구는 대개 수업 방법에 따른 지도 방안을 연구하거나 자료를 개발하여 지도 방안을 탐색하는 연구 등이 진행되어 왔다. 수업 방법은 주로 소집단 협력학습이 이용되었고, 학생들의 수학적 언어 사용, 수학적 표현, 수학적 설명 등의 측면에서 지도 방안이 연구되었다(예, 김경미, 2003). 또한 자료 개발에 따른 지도 방안 연구는 게임 활동을 활용하거나 수학과 영역별 이야기틀을 만들어 여기에 제시된 문제를 해결하는 과정에서 학생들의 수학적 언어를 사용하고 수식을 표현하게 하는 방안 등이 제기되었다(예, 김영옥, 2003).

셋째, 초등학교 수학 수업에서 이루어지는 교사와 학생의 상호작용을 분석한 연구는 주로 상호작용의 유형에 관한 것이나 의사소통 수준과 관련된 연구가 있다. 우선 상호작용의 유형에 관한 연구를 살펴보면 대표적으로 깔대기 유형과 초점 유형, 또는 해결 방법을 보고하기, 탐구하기, 논의하기로 세분되어 활용되었다(Wood, 1994; Wood & Turner-Vorbeck, 2001). 또한 Crespo(2006)는 수학 토론의 중심이 교사냐 학생이냐에 따라서 해설적 유형과 탐구적 유형으로 나눠 설명하기도 하였다. 한편, Wood 외(2006)는 4가지 다른 수학교실문화에 따른 상호작용 유형과 수학적 사고간의 관계를 연구하기도 하였다. 또한 Kwon, Pang, Lee(2005)는 우리나라 초등학교 수학 교실 문화를 바탕으로 다양한 의사소통 수준에 따른 상호작용의 특징을 비교분석하기도 하였다.

이러한 연구 결과를 종합하여 보면, 주로 우리나라에서는 수학적 의사소통의 효과와 지도 방안에 대한 연구가 많이 이루어졌고, 대부분 학생에 초점을 두고 분석함으로써 학생과 교사 간의 수학적 의사소통에 관한 집중적인 연구는 부족한 편이다. 또한 수학적 의사소통 수준과 학생의 수학적 사고의 특성이 밀접한 관련을 가지지만, 이의 연계성을 연구한 것도 거의 없다. 그러므로 교실에서 실행되는 교사와 학생들의 수학적 의사소통을 알아보고 수학적 의사소통 수준에 따른 학생들의 수학적 사고의 특성을 살펴본다면, 교사들 자신의 수업에 대해 스스로 평가하거나 동료 교사의 수업을 관찰하는 준거를 마련할 수 있으며, 더 나아가 수학과의 교수 실제에 반영될 수 있는 수학적 의사소통의 근거를 제공하게 될 것이다.

III. 연구 방법

1. 연구 대상

대구시에 소재한 초등학교에 근무하는 교사 중에서 일선 교사들로부터 예비 연구 대상자를 추천 받아 교사 6명에게 설문지와 면담을 실시하였다. 설문 문항은 교사들의 수학적 의사소통에 대한 전반적인 인식을 알아보기 위해 선행 연구를 참조하여 크게 (1) 수학적 의사소통에 대한 이해(의사소통의 개념, 학생과의 상호작용, 수업 진행 방식, 의사소통 유형, 학

생의 개입 정도), (2) 수학적 의사소통의 활용(의사소통의 효율성, 의사소통 평가 및 활용, 의사소통 활성화를 위한 학습 활동, 장애요인)으로 나누어 문항을 작성한 후, 내용 전문가 및 현직 교사 3명의 검토를 통해 수정·보완하여 총 43개 문항을 선정하였다. 이처럼 여러 가지 문항을 사용한 것은 연구 목적에 가장 부합하고 풍부한 정보를 가진 대상자를 선정하기 위함이었다.

설문지와 면담을 통해 예비 연구 대상자 중 수학적 의사소통에 대해 전반적인 인식의 차이가 나는 A, B, C 세 교사를 선정하였다([그림 2] 참조). 설문 항목별로 조금씩 차이가 있기는 하지만, 전반적으로 A교사와 B교사가 C교사에 비해서 수학적 의사소통에 대한 이해 정도가 높았다. 또한 A교사와 B교사는 학생들과의 상호작용이 활발히 이루어진다고 하였으나 C교사는 교사-학생 간의 상호작용이 더 많이 일어난다고 하였다. 수업 진행 방식은 A교사와 C교사는 다양한 문제해결 전략을 중요시하는 반면, B교사는 정확한 답을 선호하는 편이었다. A, B, C 교사 모두 수학적 의사소통의 효율성을 알고 있었다. 특히 B교사의 경우 수학적 의사소통을 활성화하기 위한 학습 활동을 가장 활발히 하고 A교사가 가장 적게 한다고 말하였으나 B교사가 실제 가장 많은 장애 요인을 느끼고 있는 것으로 드러났다.

교사	경력	비고
A	5년	수학교육 심화, 수학교육 대학원
B	4.5년	수학교육 심화
C	17년	교육학 심화, 수업대회 1등급 수상

[그림 2] 최종 연구 대상

2. 연구 방법

본 연구는 초등학교 수학 수업에서 교사와 학생의 의사소통이 어떻게 이루어지는지를 분석하기 위해 질적연구방법을 사용하였다. 한편, 수학적 의사소통 수준에 따라 학생의 수학적 사고의 특징을 살펴보기 위해 우선 학생의 수학적 사고가 나타나는 빈도를 양적연구방법을 이용하여 조사하였고 이를 구체적으로 분석하기 위해서 수학적 사고의 유형에 대해서는 질적연구방법을 병행하였다.

3. 자료 수집 및 분석

초등학교 6학년 세 교실에서 가 단계 <8. 문제 푸는 방법 찾기> 단원의 수업에 관한 자료를 수집하였다. 전체 7차시로 구성된 단원에서 '재미있는 놀이' 차시를 제외한 6차시 분량의 수업을 관찰하여 전체 18차시의 수업을 관찰하였다. 교사와 학생 전체를 중심으로 수업 과정을 녹화하기 위해 교실 앞편에 캠코더를 설치하였다. 학생이 칠판에 나와 문제 해결 과정을 설명할 경우나 개별 활동, 소집단 협동학습을 할 경우에는 캠코더의 위치를 이동하여 녹화하였다. 수업 관찰을 통한 18차시의 촬영 자료는 추후에 트랜스크립트를 만들어 분석의 기초로 삼았다.

교사와 학생의 수학적 의사소통이 어떻게 이루어지는지 알기 위해 Hufferd-Ackles(2004)가 제시한 분석틀에 기초하여 질문하기, 설명하기, 수학적 아이디어의 근원 요소별 분석 내

용을 정하여 교사와 학생의 수학적 의사소통 수준을 재구성하였고[3] 이 분석 기준에 따라 초등학교 수학 수업에서 교사와 학생들의 수학적 의사소통이 어떻게 이루어지는지를 분석하였다([그림 3] 참조).

		0수준	1수준	2수준	3수준
질문하기	교사	답에 초점 둔 짧고 빈번한 질문	풀이 방법이나 이유에 초점을 둔 질문	학생의 사고과정을 이해하기 위한 질문	정당화를 요구하는 질문
	학생	단답형 대답을 하고 학생-학생의 대화 일어나지 않음		교사의 격려에 의한 학생 간 질문	학생 주도의 학생-학생 질문
설명하기	교사	답에 초점을 둔 설명	교사 유도의 의한 풀이방법 간단히 설명	상세하게 설명하도록 격려, 개방적이고 다양한 전략을 유도	학생들이 사고를 설명하도록 하고, 탐구적인 질문을 통해 완전한 설명이 되도록 격려
	학생	다른 사람의 설명 소극적으로 듣기	간단한 설명 다른 학생의 풀이 되풀이	교사의 탐구에 의해 사고 단계를 설명, 답이나 방법에 대해 방어하기 시작	방어와 정당화 설명, 다른 학생들은 교사나 학생의 오류 수정, 도전
수학적 아이디어의 근원	교사	교사가 주로 아이디어 제시	교사는 아이디어의 주요 근원	학생들의 오류를 학습 기회로 이용함	새로운 전략을 공유하도록 함
	학생	학생들은 아이디어 제시하지 않음	학생들의 몇 가지 아이디어가 제시되나 탐구되지 않음	학생들의 다양한 전략 제시	학생 아이디어의 비교 대조, 학생의 아이디어가 수업의 방향 제시

[그림 3] 수학적 의사소통 수준에 대한 분석 기준

학생의 수학적 사고의 특징을 살펴보기 위해 수학적 사고가 나타난 빈도를 알아보고 에피소드 중심으로 유형의 특징을 상세하게 분석하였다. 앞서 만든 트랜스크립트를 가지고 분석하되, 코딩은 수학적 의사소통이 어떻게 이루어지는지를 알아보기 위한 코딩과 분리하여 하였다. 학생들의 수학적 사고의 특징을 알아보기 위해 개개 학생들이 말로 표현한 문장을 범주화하였다. 이를 위해 Wood, Williams, Mcneal(2006)이 제시한 분석틀([그림 1])에 기초하되 <문제 푸는 방법 찾기> 단원에 적합하도록 인지 활동의 예를 보다 구체화하여 학생의 수학적 사고의 특징이 어떠한지를 분석하였다.

구체적으로, 학생의 수학적 사고가 나타난 빈도는 각 반별로 빈도수를 조사하고 각각 백분율로 나타내었으며 1차시당 수학적 사고가 나타난 평균을 구하였다. 수학적 사고가 나타난 빈도의 결과에 대한 객관도를 알아보기 위해 연구자를 포함한 3인의 채점자를 선정하고 채점자간 신뢰도를 산출하였다. 본 연구자를 제외한 채점자는 대학과 대학원에서 초등수학교육을 전공한 교육경력 4년의 여교사와 교육경력 6년의 남교사이다. 수학적 사고의 빈도 조사 결과가 횟수로 부여되는 양적 변수인 관계로, 채점자간 신뢰도를 추정하는 방법으로 상관계수법을 사용하였다(성태제, 2002). SPSS/WIN 10.1을 사용하여 Pearson 상관계수를 구한 결과 채점자1과 채점자2의 신뢰도는 0.902이며, 채점자2와 채점자3의 신뢰도는 0.821,

3) Hufferd-Ackles의 분석 요소 중 학습의 책임성을 활용하지 않은 이유는 이 분석 요소가 다른 요소, 특히 설명하기에서 설명을 듣는 학생의 역할, 그리고 수학적 아이디어의 근원에서 학생의 역할과 중복되는 경향이 있기 때문이었다.

채점자 1과 채점자3의 신뢰도는 0.853이다. 이는 $p<.01$ 수준에서 유의한 것으로 나타났다. 이를 통해 채점자간 신뢰도가 높은 것을 알 수 있었다.

Ⅳ. 결과 분석

1. 초등학교 수학 수업에서 교사와 학생의 수학적 의사소통

세 교실에서 이루어지는 교사와 학생의 수학적 의사소통을 구체적 에피소드를 들어 질문하기, 설명하기, 수학적 아이디어의 근원 측면으로 나누어 분석하였다. 본 논문에서는 지면의 한계상 질문하기와 설명하기는 에피소드를 제시하지 않고 수준만 요약하여 제시하였다. 반면에, 수학적 아이디어의 근원은 각 교실별로 수준 차이가 두드러지게 나므로 이와 관련된 대표적인 에피소드를 중심으로 상세히 다루었다.

A교실에서 교사와 학생의 수학적 의사소통 분석 결과는 [그림 4]와 같다[4]. A교실에서는 새로운 전략을 모든 학생들이 공유할 수 있도록 교실을 순회하면서 새로운 전략을 사용한 학생을 발표시키거나 다른 전략을 사용한 학생이 자유롭게 발표하도록 하였다. 또한 "또 다른 방법?"과 같은 질문을 하여 학생들이 다양한 아이디어를 제시하도록 격려하였고 짝끼리 서로 바꾸어 보고 짝의 새로운 방법을 발표하도록 하였다. 그리고 학생들은 풀이 방법을 서로 비교하는 설명을 자주 하였고 같은 해결전략을 사용한 학생들의 풀이 방법을 비교·대조하였다.

요소	수준	교 사	학 생
질문하기	2.5 수준	• 이유와 사고과정 탐구에 초점을 둠. • 교실을 순회하면서 개별적으로도 학생에게 질문을 하여 학생들의 사고 과정을 탐구함 • 정당화를 요구하는 질문을 제기함	• 사고 과정을 이해하기 위한 질문을 제기함 • 풀이 방법이 이해될 때까지 후속질문을 제기함 • 학생 간 질문은 자유롭고 활발하게 이루어짐
설명하기	2.5 수준	• 타당한 이유를 가지고 설명하도록 요구함 • 확장된 정보를 제공하여 자세히 설명하도록 격려함 • 이유 없이 설명하는 경우에 그 학생에게 이유를 설명하도록 요구하기 보다는 반 전체 학생이 설명하도록 함	• 답 뿐 아니라 풀이방법이나 과정을 구체적으로 설명하고 이유를 설명하려고 함 • 여러 가지 전략을 사용하여 설명함.
수학적 아이디어의 근원	3 수준	• 새로운 전략을 공유하도록 함 • 학생의 오류를 자연스럽게 학습 기회로 삼음	• 학생 스스로 다른 학생의 전략과 자신의 전략을 비교 및 대조함 • 다양한 아이디어와 전략을 제시함

[그림 4] A교실에서 교사와 학생의 수학적 의사소통

4) 세 교실의 수학적 의사소통 수준에서 2.5는 2와 3수준, 1.5는 1과 2수준의 과도기적 수준을 나타내는 것이다. 선행연구에서는 0~3수준으로 4단계로만 구분하였으나, 본 연구에서 의사소통을 면밀히 분석하는 과정에서 예를 들어, 2수준의 일부와 3수준의 일부를 동등한 수준으로 드러내는 경우가 있어 2.5수준이라고 표현하였다.

A교사는 학생들의 오류를 학습기회로 이용하여 자연스럽게 수업을 해 나갔는데 그 중 <에피소드 A1>은 대표적인 것으로써 주머니 속에 0과 1인 적힌 공이 각각 1개, 2가 적힌 공이 2개, 3이 적힌 공이 3개 있을 때 공을 하나씩 꺼내어 세 자리수를 만드는 문제에서 세 자리수의 개수를 아무런 규칙이나 순서 없이 적어 답이 중복되는 경우에 대해 교사가 학생들에게 이런 오류를 범하지 않는 방법을 묻는 상황이다.

<에피소드 A1> 학생의 오류를 학습기회로 전환

교 사: 근데 앞의 발표한 사람들은 35개인데 여기는 36개이네. 그러면 다르다 그지?
은 채: 답을 고쳤는데 왜 답을 고쳤습니까?
지 현: 다시 해보니 틀렸기 때문입니다.
교 사: 잠깐만~그렇다 말은 처음에는 답이 몇 개가 나왔단 말이야?
지 현: 39개.
교 사: 그 다음은?
지 현: 38개.
교 사: 그 다음은?
지 현: 36개.
교 사: 야들아~왜 이렇게 답이 점점 변할까? 동민.
동 민: 똑같은 수가 반복되기 때문입니다.
교 사: 어~~근데 이 방법으로 풀었는데 똑같은...
학 생: (한 학생이 교사가 설명하고 있는데) 어~찾았어요. 23번이랑 30번 숫자가 같아요.
교 사: 어~23번이랑 30번 숫자가 같네.
학생들: 오~
교 사: 이렇게 풀게 되었는데 왜 이런 반복되는 숫자가 생기겠노? 지현이 덕분에 소중한 공부를 하고 있는 겁니다. 승민.
승 민: 여러 개를 하다가 똑같은 것을 모르고 계속 쓰기 때문입니다.
교 사: 그러면은 이런 실수 없이 하려면 어떻게 하면 좋을까? 지현이한테 어떤 도움말을 주면 좋을까? 어~현우 한번 해볼까?
현 우: 규칙을 세워 합니다.
교 사: 규칙? 어떤 규칙을 세워서? 범신.
범 신: 승완이가 한 것처럼 표로 세워서 하면 좋겠습니다.
교 사: 표? 다른 방법? 규칙 말고라도 다른 방법? 소연.
소 연: 저 방법이라도 적는 수를 작은 수부터 차례로 적어주면 됩니다.

위 에피소드에서 나타나듯이, 교사가 처음부터 의도하지 않았지만 한 학생이 세 자리수를 구할 때 중복되는 오류를 범한 것을 발견하자 나머지 학생들에게 이런 오류를 범하지 않으려면 어떻게 해야 하는지를 물어 학생들이 자연스럽게 학습하도록 수업을 진행하였다. 또한 A교사는 학생들의 문제 해결 과정을 살펴보다가 오류를 보이는 학생을 발표시켜 학생들끼리 논의하게 하여 오류를 수정하는 경험을 제공하였고 다른 학생들의 오류에 수정, 도전하는데 부담스러워 하지 않고 자연스럽게 할 수 있는 환경이 조성되어 있음을 알 수 있었다. 다른 학생의 오류를 수정하는 동안 학생들은 자신의 풀이 과정을 반성하고 수학적 사고를 더 깊게 할 수 있는 계기가 되었다.

다음으로 B교실에서 교사와 학생의 수학적 의사소통 분석 결과는 [그림 5]와 같다. A교실처럼 학생들은 다양한 아이디어와 해결전략을 제시하였다. 교사도 학생들이 다양한 해결방법을 제시하도록 격려하였는데 그 예로, “한 가지 방법을 찾았다고 해서 가만있지 말고요 또 다른 방법은 없을까 생각해 보세요.” 와 같은 말을 통해 학생들이 다양한 의견을 제시하도록 하였다. 그러나 교사의 격려에도 여러 가지 아이디어가 나오지 않았을 경우 A교실에서처럼 짝끼리 서로 바꾸어 보고 짝의 새로운 방법을 함께 나누고 탐구할 수 있도록 하거나 힌트를 제공하여 학생 스스로 찾을 수 있도록 수업을 진행하기 보다는 교사가 직접 제시해 주는 경향이 있었다.

요소	수준	교 사	학 생
질문하기	2.5 수준	• 이유와 해결과정에 초점을 둠 • 문제 해결에 힌트가 되는 정보를 찾는 질문을 제기함 • 학생 질문 중 논의할 가치가 있는 질문은 전체 논의로 활용함	• 이유와 해결과정에 초점을 둠 • 문제가 잘 해결되지 않거나 의문점은 교사에게 자유롭게 질문함 • 학생설명-교사 질문 격려-학생 질문-교사질문 정리-발표학생 대답의 형태
설명하기	2 수준	• 교사가 의도적으로 틀린 방법을 제시해 수학적으로 타당한 근거를 요구함 • 재설명을 요구함 • 학생의 설명에 대해 부연 설명함	• 풀이단계와 이유를 설명함 • 교사의 오류에 도전하고 수정함 • 정당화 설명이 잘 이루어지지 못함
수학적 아이디어의 근원	2 수준	• 다양한 아이디어와 해결전략을 제시하도록 격려함 • 여러 가지 아이디어가 나오지 않을 경우에 교사가 직접 제시함 • 학생들의 오류를 학습기회로 이용함	• 다양한 아이디어와 해결전략을 제시하려고 노력함 • 문제해결에 어려움을 겪는 학생의 문제를 함께 해결하려고 노력함

[그림 5] B교실에서 교사와 학생의 수학적 의사소통

<에피소드 B1>은 학생들이 주어진 문제에 대해서 세 가지 방법으로 설명한 후에 교사가 또 다른 방법으로 해결할 것을 요구한 경우인데, 교사가 의도하거나 교과서에 제시된 해결전략이 제시되지 않자, 교사가 직접 설명하는 부분을 제시한 것이다. 주어진 문제는 4000원짜리 공책 3권을 사고 서점에서 5000원짜리 동화책 2권을 산 후 용돈 5000원을 받았더니 남아 있는 돈이 6100원일 때, 처음에 가지고 있는 돈을 묻는 문제였다.

<에피소드 B1> 특정한 전략에 대한 교사의 직접적 제시

교 사: 네, 잘했습니다. 거꾸로 풀기, 수직선 이용해서 풀기, 예상과 확인의 방법이 나왔습니다. 또 다른 방법은 없나요? (학생들 아무 대답이 없자) 선생님이 하도 안 나와서 다른 방법 하나 가르쳐 줄게요. 자, 보면 문장제 문제를 잘 이해를 못하는 사람이 많아. 그지? 다른 사람한테 그 문제를 설명해 주고자 할 때에는 이 문제를 좀 더 간단하게 보여주는 게 참 좋잖아. 단순화시켜서. 그림을 통하든지 아니면 말을 간단하게 바꾸든지. 선생님은 그림으로 했어. 자. (복주머니를 그리면서) 복주머니에 원래의 얼마의 돈이 있었어? 원래 돈 물음표, 얼만지 알 수가 없죠. 하여튼 이 주머니 속에 400원 3개니까 1200원 빼 졌어.

5000원짜리 2장, 10000원 빼 썼어. 그랬는데 다행히도 아빠가 5000원을 주셨죠. 그래서 쓴 돈과 받은 돈이 구별되게 단순화 시켜서 그려놨잖아. 그래서 결과적으로 남은 돈이 얼마에요?

학생들: 2100원.

교　사: 그러면 아빠한테 5000원 받기 전에 나한테 얼마 있었다는 뜻이야?

B교사는 학생들이 주의 깊게 들을 수 있게 설명을 하면서 지속적으로 질문을 하였다. 하지만, 위 에피소드에서 드러난 바와 같이 학생들이 다양한 해결전략을 제시하지 못할 경우 정보를 확장하거나 힌트를 줘 학생들이 발견할 수 있도록 유도하기 보다는 교사가 직접적으로 해결 전략을 설명하는 경우가 있어 학생들의 사고나 해결 전략을 넓혀 나갈 수 있도록 하는 기회를 제공하지는 못하였다.

마지막으로 C교실의 교사와 학생의 수학적 의사소통 분석 결과는 [그림 6]과 같다.

요소	수준	교 사	학 생
질문하기	1 수준	• 답보다는 이유에 초점을 둔 질문을 제기함 • 학생의 이해 여부에 중점을 둔 질문을 제기함 • 학생이 모르는 것에 대해 그 학생에게 계속적으로 질문하기보다는 다른 학생들에게 질문함 • 교사가 주로 질문함	• 학생 간 질문은 이루어지지 않음 • 학생 풀이에 질문이 생기면 교사에게 질문함
설명하기	1.5 수준	• 단계적 질문을 통해 재설명을 요구함 • 학생의 설명에 대해 부연 설명함 • 학생의 부족, 타당하지 않은 설명에 대해 교사가 대신 설명함	• 답보다는 풀이과정과 이유에 초점을 두고 설명함 • 교사의 유도에 의해 사고과정을 설명함
수학적 아이디어의 근원	1 수준	• 살펴볼 필요가 있는 해결방법을 전체 학생들과 탐구하나 타당성이나 방법 간 비교·대조에 대한 논의는 이루어지지 않음 • 학생들의 오류를 학습 기회로 이용하나 학생들의 오류에 대한 다양한 의견에 논의가 이루어지지 못함 • 교사가 주로 핵심적인 아이디어를 제시함	• 여러 가지 아이디어가 제시된 경우에도 교사의 판단 아래 선택적으로 수용함 • 새로운 아이디어를 제시하는 것에 대해 부담스러워 함

[그림 6] C교실에서 교사와 학생의 수학적 의사소통

C교사는 문제를 보고 해결하기 전에 방법을 먼저 생각하게 한 후 학생이 제시한 방법이 적절한지 전체 학생들이 풀어보도록 하였다. 그러나 해결 방법을 학생들과의 논의를 통해 탐구하기 보다는 교사의 판단에 의해 결정하였고 교사가 의도하는 방법만을 활용하도록 하였다. <에피소드 C1>은 이러한 대표적인 사례로써, 1시간에 사과 18개, 24개를 따는 두 학생이 사과 105개를 함께 따는데 걸리는 시간을 묻는 문제의 해결 방법으로 민영이가 제시한 표 만들기 방법을 전체 학생들에게 살펴보도록 하는 상황이다.

<에피소드 C1> 교사의 판단에 의존한 해결 방법

교 사: 아, 식을 만들자. (칠판 1번 옆에 적으면서) 혜진이가 발견한 것은 식 세우기. 또 어떤 방법이 있을 수 있을지.
민 영: 표.
교 사: 표? 표 나왔다. 그지? 할 수 있겠는지 표로 한번 해보세요. 이 문제를 표로 하면 좋겠다고 얘기했습니다. 시작! 한번 해 보세요. (시간을 준 후) 그만, 그만! 지금까지 표로 나타내 보니까 어떤대?
학생들: 아직 하고 있는데요.
교 사: 응, 빨리 해라. (시간을 준 후) 아직 표도 그리지 못한 사람 너무 많네. 도대체 어디에 무슨 항목을 넣어야 될지 모르는 사람 너무 많네. 자. 그만. 찾은 사람? 표로 완성해서 답을 구했는 사람? (몇 몇 학생 손을 듬) 음~ 손 내리고. 표로 하니 굉장히 힘들다는 사람 손 들어보세요. 이거 왠지 어제와는 달리 표로 하니 굉장히 힘들더라.
학생들: (많은 학생들이 손을 들고 몇 몇 학생들은) 이거 어떻게 해요?
교 사: 오~굉장히 많네. 어~손 내리고. 대부분이 표로 하니까 너무너무 힘들다 그러네. 그럼 표는 기각하겠어요. 다른 방법 찾아주세요.
학 생: 예상.
교 사: 예상하기? 예상하기도 매우 어렵습니다.
학 생: 그림.
교 사: 아하~2번째 방법은 그림. 그러면은 여러 가지 방법 중에서 식을 세워서 하는 방법과 그림을 그려서 하는 방법을 해보자.

위 에피소드에서 C교사는 주어진 문제를 해결하기 전에 해결방법을 학생들이 제시하도록 하였다. 학생이 제시한 방법 중 문제를 해결하기에 효과적이지 않다고 생각하는 방법에 대해서는 전체 학생들에게 풀어보도록 하여 학생들이 적절하지 않다는 것을 느끼도록 하였다. 하지만 효과적이지 않은 방법에 대해 왜 그런지, 표 만들기 방법이 편리한 문제와 비교하는 등의 논의가 이루어지지 않고 학생에게 어려운지에 대한 여부만 물어 개괄적으로 살펴보는 수준에서 끝나는 경우가 많았다. 그리고 표로 문제를 해결한 몇 몇 학생 있었는데 이 학생들의 해결방법에 대한 언급이나 논의 없이 넘어가 다양한 해결 전략이 있음을 격려하지 못하였다. 또한 한 학생이 제시한 예상의 방법에 대해서는 학생들에게 살펴볼 시간을 주는 대신에 교사가 어렵다는 말로 지나가 깊이 있는 탐구가 이루어지지 않았다. 학생들이 여러 가지 아이디어를 제시하였지만 교사의 판단 아래 학생들의 아이디어를 선택적으로 수용하여 교사가 수학적 아이디어 제시의 주요 근원임을 알 수 있었다.

이상의 연구 결과를 종합해 보면, 첫째, 질문하기와 관련하여 대부분의 교사들은 학생들에게 답 보다는 해결방법과 이유에 초점을 둔 질문을 주로 하였다. 교사가 학생의 설명에 대해 질문하는 교실보다는 학생이 적극적으로 질문하도록 격려하고 학생-학생 간의 대화를 강조하는 교실에서 학생 간 질문이 활발하게 나타났다. 둘째, 설명하기와 관련하여 대부분의 학생들은 답 보다는 풀이 과정에 초점을 두고 설명하였다. 교사가 학생들에게 타당한 근거를 들어 설명하도록 요구하는 교실일수록 학생들도 타당한 이유를 가지고 설명하였다. 그리고 학생의 설명 후 교사가 평가를 하느냐에 따라, 교사가 어떠한 반응을 보이느냐에 따라, 학생 간 대화를 격려하느냐에 따라 학생들이 수학적으로 다른 해결 방법 제시 여부, 수학적으로 정당화할 수 있는 설명 여부에 차이가 나타났다. 셋째, 수학적 아이디어의 근원과 관련

하여 학생들의 아이디어를 수업에 적극 반영 하는 교실이 있는 반면, 교사가 아이디어 제시의 주요 근원이 되는 경우도 있었다. 학생들의 의견을 수업에 많이 반영하는 교실일수록 학생들이 더 다양한 의견을 제시하는 경향이 있었다.

2. 초등학교 수학 수업에서 학생의 수학적 사고의 특징

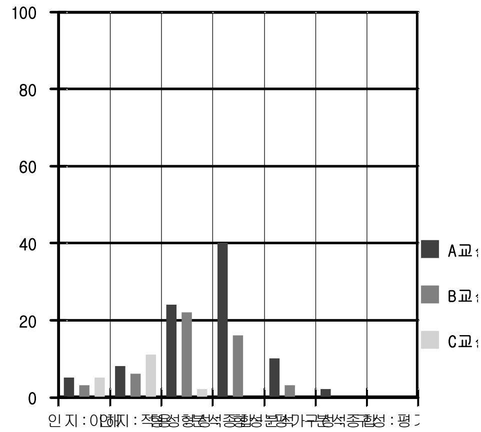
본 연구에서는 수학적 의사소통 수준에 따라 학생들의 수학적 사고가 어떻게 달라지는지를 알아보기 위해 세 교실에서 이루어지는 학생들의 수학적 사고 빈도와 수학적 사고 유형의 특징으로 나누어 분석하였다.

1) 수학적 사고 빈도

수학적 사고 빈도는 수학적 사고 유형에 따라 수학적 사고가 나타난 빈도수와 내용을 바탕으로 학생들의 수학적 사고의 특징을 세 교실별로 분석한 것이다. 수학적 사고 유형은 인지하기: 이해, 적용, 형성하기: 분석, 종합-분석, 평가-분석, 구성하기: 종합, 평가로 나누어 살펴보았다. 각 교실별로 수학적 사고의 빈도수와 비율은 <표 1>, <그림 7>과 같다.

<표 1> 교실에 따른 수학적 사고의 빈도수와 비율

		A교실	B교실	C교실
인지하기	이해	5 (5.6%)	3 (6.0%)	5 (27.8%)
	적용	8 (9.0%)	6 (12.0%)	11 (61.1%)
형성하기	분석	24 (27.0%)	22 (44.0%)	2 (11.1%)
	종합-분석	40 (44.9%)	16 (32.0%)	·
	평가-분석	10 (11.3%)	3 (6.0%	·
구성하기	종합	2 (2.2%)	·	·
	평가	·	·	·
계		89 (100%)	50 (100%)	18 (100%)



<그림 7> 각 교실의 유형별 수학적 사고의 비율

<표 1>과 <그림 7>에서 보는 바와 같이 A교실에서, 수학적 사고가 나타난 빈도수는 89번으로 1차시당 수학적 사고가 나타난 빈도수는 14.8번이였다. 또한 수학적 사고 중에 14.6%는 인지하기, 83.2%는 더 높은 단계인 형성하기이다. 가장 높은 단계인 구성하기는 2.2%로 나타났다. 이처럼 인지하기, 형성하기, 구성하기 사고 유형 중 대부분 형성하기가 나타났으며 형성하기 중에서도 종합-분석이 가장 많이 나타났다. A교실에 나타난 가장 두드러진 특징은 다른 교실에는 나타나지 않은 수학적 사고 중 가장 높은 단계인 구성하기가 나타났다는 점이다.

B교실은 수학적 사고가 나타난 빈도수는 50번으로 1차시당 수학적 사고가 나타난 빈도수는 8.3번이였다. 이 수학적 사고 중에 18.0%는 인지하기, 82.0%는 더 높은 단계인 형성하기

였다. 하지만 가장 높은 단계인 구성하기는 나타나지 않았다. B교실도 A교실처럼 학생들의 수학적 사고는 대부분 형성하기 단계에 나타났다. 그 중에서도 학생들이 표현한 사고가 가장 잘 나타나는 것은 분석에 초점을 둔 형성하기였다. 이것은 A, B교실 모두 형성하기 단계가 가장 많이 나타났지만 B교실은 A교실에 비해 형성하기 단계 중 한 단계 낮은 단계에 집중되어 있음을 알 수 있다. 인지하기의 이해단계는 A교실과 비슷하게 나타났으나 인지하기의 적용단계는 A교실보다 다소 높게 나타났다.

C교실에서 수학적 사고가 나타난 빈도수는 18번으로 1차시당 수학적 사고가 나타난 빈도수는 3.0번이였다. 수학적 사고는 88.9%는 인지하기, 11.1%는 형성하기였다. B교실과 마찬가지로 가장 높은 단계인 구성하기는 나타나지 않았다. 학생들의 수학적 사고는 인지하기 단계에 집중되어 있었다. 수학적 사고의 유형은 단지 3가지 경우만 나타나 사고의 유형이 다른 교실에 비해 제한적이었다. 그리고 형성하기도 가장 낮은 단계인 분석하기만 나타났다. 이것은 교사 중심적이고 학생들이 표현한 수학적 사고는 기억과 정보의 회상에 집중되어 있음을 의미한다.

2) 수학적 사고 유형의 특징

다음은 수학적 사고 유형을 바탕으로 학생들이 수학적 사고 과정에 어떻게 참여했는지를 보다 구체적으로 비교 분석한 것이다. 본 논문에서는 지면의 한계상 각 교실의 특징과 관련하여 대표적인 에피소드를 하나씩만 제시하였다.

(1) A 교실- 형성하기: 종합-분석

A교실에 나타난 수학적 사고 유형의 두드러진 특징은 다음과 같이 요약할 수 있다. 첫째, 형성하기: 종합-분석이 다른 수학적 사고의 유형보다 많이 나타났다. 그 이유는 교사가 자신의 풀이 방법과 다른 사람의 풀이 방법을 비교하는 것을 중요시한 수업 방법에 있다. 그리고 같은 전략을 사용했을지라도 전략 내에 차이점이 없는지도 탐색하였기 때문이다. 둘째, 학생들은 다른 사람의 풀이 방법뿐 아니라 자신의 풀이 방법 간에도 비교를 하여 방법이나 결과가 적절한지, 효율적인지를 평가하였다. 이에 대한 대표적인 예로 <에피소드 A2>는 서로의 해결 방법을 비교하면서 설명하는 것으로, 성민이와 소윤이가 문제 해결 방법의 차이점을 찾기 위해 서로의 풀이 방법을 비교 대조하는 상황이다.

<에피소드 A2> 차이점을 찾기 위해 2가지 방법 비교 대조하기

성 민: 저는 표를 만들서 표현하였습니다. 처음에는 지우개 10개, 연필 13개를 예상했습니다. 그러니까 50원이 남는 4050원이 되어서 지우개를 한 개 늘이고 연필을 한 개 줄여서 4000원이 되게 만들었습니다.

소 윤: 저도 아까 전에 성민이 처럼 표 만들기 방법을 사용하였습니다. 하지만 저는 성민이처럼 지우개 10개, 연필 13개로 시작하지 않고 (자신의 학습지를 가리키며) 총 23개니까 거의 반으로 나누어서 지우개는 11개, 연필은 12개하니까 4000원이 나왔습니다. 그리고 규칙을 찾을 수 있었습니다. 지우개의 개수가 줄어들수록 50원씩 줄어들고 연필의 개수가 한 개씩 줄어들수록 50원씩 늘어났습니다.

셋째, A교실의 학생들은 한 가지 방법에만 국한되지 않고 두 가지 이상의 다양한 방법으

로 문제를 해결하였고 여러 가지 표현, 연산 등을 상호 연결시키려는 수학적 사고도 나타났다. 넷째, 다른 두 교실은 구성하기 단계가 나타나지 않았지만 A교실에서는 구성하기가 나타났다. 하지만 다른 교실과 마찬가지로 모순 되는 정보를 깨닫거나 명쾌한 풀이 방법을 알기 위해 전체적으로 상황을 반성할 수 있어야 하는 구성하기: 평가는 나타나지 않았다. 이것은 문제를 해결할 때 여러 가지 방법을 사용하지만 해결방법을 통해 답이 나오면 문제 해결을 마쳤다고 인식하고 그 풀이에 대한 제한점이나 발전적 풀이 방법을 탐구하는 자세가 부족하기 때문인 것으로 유추된다.

(2) B 교실- 형성하기: 분석

B교실에 나타난 수학적 사고 유형의 두드러진 특징은 다음과 같이 요약할 수 있다. 첫째, 가장 빈번한 수학적 사고 유형은 형성하기: 분석이다. A교실보다 한 단계 낮은 단계인 분석이 두드러지는 이유는 해결전략을 비교・대조하거나 일반화하는 활동이 A교실에 비해 많이 나타나지 않았기 때문이다. 둘째, 새로운 상황에 알고 있는 수학적 방법을 적용하여 문제를 해결하였다. B교실의 학생들은 문제를 해결할 때 전 학년이나 전 단원에 배워 알고 있는 전략을 활용하였다. 셋째, 결과를 체계적으로 정리하고 패턴을 찾는 수학적 활동이 다른 교실에 비해 자주 나타났다. 이에 대한 예는 <에피소드 B2>에 잘 드러난다. 시훈이는 표나 예상과 확인의 방법을 이용하지 않고 배는 1개씩 줄어날수록 사과는 1개씩 늘어날수록 400원이 줄어든다는 규칙을 발견하여 사과와 배의 개수를 구하였다.

<에피소드 B2> 패턴 찾기

시 훈: 사과 1개, 배 4개를 사면 8600원으로 돈이 넘어 사과 2개, 배 3개를 사면 8200원이 되어 또 돈이 넘습니다. 여기서 규칙을 찾을 수 있는데 돈의 합을 보면 배의 개수를 1개씩 줄어들 때마다 400원씩 줄어들고 반대로 배의 개수를 늘어날 때마다 400원씩 늘어납니다. 그리고 사과의 개수가 늘어날 때마다 돈이 400원씩 줄어들고 사과의 개수가 줄어들 때마다 400원씩 늘어납니다. 그러니까 배는 1개씩 줄어들수록 사과는 1개씩 늘어날수록 400원씩 줄어듭니다.

넷째, B교실에서도 한 가지 방법만이 아니라 여러 가지 방법을 사용하여 문제를 풀려고 노력하였고 방법이나 전략을 비교 대조하는 수학적 사고도 나타났다. 다섯째, B교실의 수학적 사고의 유형에서 가장 독특한 특징은 문제를 풀기 위해 정보가 불충분할 때 추가적인 정보가 필요하다는 것을 알았다는 점이다. 추가 정보를 찾음으로써 학생들은 문제의 의도를 면밀히 파악할 수 있었고 문제 해결에 결정적인 단서를 발견하기도 하였다. 이런 수학적 사고가 자주 나타난 이유로는 교사가 문제에서 표면적으로 드러나는 정보뿐만 아니라 표면적으로는 제시되어 있지 않지만 알 수 있는 정보를 찾는 활동을 중요하게 생각한 수업 방법에 있다.

(3) C 교실- 인지하기: 적용

C교실에 나타난 수학적 사고 유형의 두드러진 특징은 다음과 같이 요약할 수 있다. 첫째, 가장 빈번한 수학적 사고 유형은 인지하기: 적용이다. 적용에서 학생들이 많이 표현한 사고는 이미 배운 개념, 원리를 문제 해결에 적용하는 것이었다. 둘째, 전 학년에서 배워 알고

있고 교사가 그 문제에 효율적인 방법, 필요한 정보를 제시하여 학생들은 교사가 제시한 전략이나 사실 등을 사용하여 문제를 해결하였다. 학생들의 수학적 사고도 교사가 제시한 전략에 한정되어 있었고 교사의 유도에 의해 알고 있거나 제시한 사실, 개념, 방법을 이용하여 문제를 해결하였다. 이에 대한 대표적인 사례로써, <에피소드 C2>는 교사가 제시한 방법으로 문제를 해결하는 상황이다.

<에피소드 C2> 교사가 제시한 방법을 사용하여 문제 해결하기

> 교 사: 오늘은 먼저 예상과 확인과 표 만들기 방법 중에서 예상과 확인의 방법으로 한번 풀어보도록 합시다. 일단 구하려고 하는 것은 무엇이죠? 총 샀는 개수는 몇 개예요?
> 학생들: 23개.
> 교 사: 23개. 그 다음에 내가 갖고 있는 돈은 전부 얼마야?
> 학생들: 4000원.
> 교 사: 어, 지혜가 갖고 있는 돈은 4000원이야. 그지? 4000원을 갖고 23개 샀다.

셋째, C교실 학생들은 새로운 상황에서 알고 있는 수학적 방법을 활용하는 것에 어려워하였고 규칙을 찾고 문제를 한 가지 이상의 방법으로 해결하거나 방법을 비교, 대조하는 등의 수학적 사고는 나타나지 않았다. 넷째, C교실에서는 형성하기 단계 중에 가장 낮은 수준인 분석도 새로운 상황에 알고 있는 수학적 방법, 전략을 적용하는 것만 2번 나타났고 결과를 체계화하고 패턴 찾기, 수학적 정보가 불충분함을 인지하기 등은 나타나지 않아 학생들의 수학적 사고가 제한적임을 알 수 있었다.

V. 결 론

본 연구는 초등학교 수학 수업에서 교사와 학생의 수학적 의사소통이 어떻게 이루어지는지를 알아보고, 수학적 의사소통에 따른 학생의 수학적 사고의 특징을 알아보기 위해 초등학교 6학년 세 교실을 대상으로 분석하였다. 분석 결과를 바탕으로 수학 수업에서 수학적 의사소통 활용에 대한 시사점을 논의해 보면 다음과 같다.

첫째, 교사와 학생의 수학적 의사소통은 하위 분석 요소에 따라 수준이 동일하지 않았으며 교실마다 높은 수준을 나타내는 요소와 낮은 수준을 나타내는 요소가 각기 다르게 나타났다. 결과적으로 각 교실마다 요소별로 의사소통 수준을 구별하여 분석하는 방법은 각 교실의 특징을 보다 세부적으로 파악하게 하는 데 도움이 되며, 이를 통해 교사와 학생의 수학적 의사소통 능력을 향상시키는 데 구체적인 자료가 될 수 있다.

둘째, 질문하기와 관련하여 학생 간 질문이 활발한 교실은 질문의 주체가 교사인 교실보다 학생들이 스스로 오류를 찾고 서로의 사고 과정을 의미 있는 방법으로 탐구하는데 적극적이었다. 이는 교사 중심의 질문보다는 학생 간 질문을 수학 수업에서 보다 강조할 필요성을 경험적으로 부각시키는 것이다. 또한 학생들은 교사의 질문 방법을 모델링 하는 경우가 많으므로 교사가 적절한 시범을 통해 어떻게 질문하는지를 보여줄 필요가 있다.

셋째, 설명하기와 관련하여 교사의 접근 방법에 따라 교실마다 뚜렷한 차이점이 나타났다. 교사가 수학적으로 다른 해결 방법을 설명하도록 요구하는 교실일수록, 교사가 수학적으로

정당화할 수 있는 설명을 요구하는 교실일수록, 학생들은 수학적으로 의미 있는 설명이나 타당한 이유를 제시하였고 도전적인 질문을 하기도 하였다.

넷째, 수학적 아이디어의 근원과 관련하여 학생들의 수학적 아이디어의 반영 여부, 다양한 아이디어 제시 등 교실마다 차이점이 나타났다. 이는 학생들이 제시하는 아이디어들이 수학적으로 어떻게 같은지, 다른지 또는 자신이 사용한 전략들 사이에 어떤 점이 같은지, 다른지에 대한 탐색과 수학적으로 타당한 설명인지에 대한 논의가 필요함을 시사한다.

다섯째, 수학적 의사소통 수준이 높을수록 학생의 수학적 사고의 빈도가 많이 나타났고 학생의 수학적 사고의 유형도 다양하였다. 그리고 수학적 의사소통 수준이 높은 교실은 그렇지 않은 교실에 비해 학생들의 수학적 사고가 높은 단계에 집중되어 있었으며 특히 가장 높은 단계인 구성하기 단계의 수학적 사고 유형도 나타나는 것으로 보아 수학적 의사소통 수준이 높을수록 높은 단계의 수학적 사고를 유도한다는 것을 드러낸다고 볼 수 있다.

이는 교실 문화에 따라 즉 학생의 참여가 더 많은 교실일수록 학생들이 더 높은 수준의 수학적 사고와 관련되어 있다고 한 Wood 외(2006)의 연구와 유사한 결과라고 할 수 있다. 다만, Wood 외(2006)의 연구는 수학적 의사소통 수준에 따른 것이 아니고 교실 문화에 따라 학생들의 수학적 사고를 연구하여 다소 차이가 있다. 하지만 수학적 의사소통 수준이 높을수록 학생의 참여가 더 많아지므로 일맥상통한다고 볼 수 있다.

본 연구는 구체적인 수업 자료를 바탕으로 수학적 의사소통이 학생의 수학적 사고에 긍정적 영향을 미치며, 수학 수업이 학생들의 수학적 의사소통 능력을 향상시키는 방향으로 나아갈 필요가 있음을 강조한다. 본 연구를 바탕으로 수학적 의사소통의 어떤 요소가 수학적 사고에 어떻게 작용하는가에 대한 보다 심층적인 연구를 기대해 본다.

참고문헌

강완, 백석윤(1998). 초등수학교육론. 서울: 동명사.

교육부(1997). 초등학교 교육과정 해설(Ⅳ): 수학, 과학, 실과. 서울: 대한 교과서 주식회사.

교육인적자원부(2006). 초・중등학교 교육과정 부분 수정 고시. 제2006-75호.

권민성(2005). 초등학교 수학 수업에서 이루어지는 교사와 학생의 상호작용 분석. 한국교원대학교 석사학위논문.

김경미(2003). 소집단 협력학습에서 수학적 의사소통에 관한 연구. 청주교육대학교 석사학위논문.

김상룡, 박병서(1999). 초등 수학교육에서 의사소통 지도의 실제. 수학교육논문집, 8(1), 33-44.

김선희(1998). 의사소통 지도가 수학 학습에 미치는 효과. 이화여자대학교 석사학위논문.

김수환(2000). 수학적 활동과 의사소통 활성화를 위한 과제 개발. 청주교육대학교 과학과 수학교육논문집, 21, 19-23.

김영옥(2003). 이야기틀을 활용한 수학적 의사소통 활동에 대한 연구. 서울교육대학교 석사학위논문.

성태제(2002). 타당도와 신뢰도. 서울: 학지사.

이종희, 김선희(2002). 수학적 의사소통. 서울: 경문사.

최승현, 황혜정(1999). 수학과 평가틀에 관한 고찰. 대한수학교육학회논문집, 9(2), 459-471.

Askew, M., Brown, M., Rhodes, V., Johnson, D., & William, D. (1997). Effective teachers of numeracy: Final report. London: King's College, University of London.
Brendefur, J. & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers' conceptions and practices. Journal of Mathematics Teacher Education, 3, 125-153.
Crespo. S. (2006). Elementary teacher talk in mathematics study groups. Education Studies in Mathematics, 63, 29-56.
Dreyfus, T., Hershkowitx, R., & Schwarz, B. (2001). The construction of abstract knowledge in interaction. Cognitive Science Quarterly, 1, 307-368.
Hobson, P. (2004). The cradle of thought: Exploring the origins of thinking. New York: Oxford University Press.
Hufferd-Ackles, K., Fuson, K. C., & Sherin,M. G. (2004). Describing levels and components of a math-talk learning community. Journal of Research in Mathematics Education, 35(2), 81-116.
Kwon, M.S., Pang, J.S., & Lee, K.H (2005). An analysis of teacher-students interaction in Korean elementary mathematics classrooms. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol.1, p.255. University of Melbourne, Australia.
National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: The Author.
Rowan, Y. E., Mumme, J., & Shepherd, N. (1990). Communicating in mathematics. Arithmetic Teacher, 38(1), 18-22.
Tomaello, M. (2001). Bruner on language acquisition. In D. Bakhurst & S. Shanker (Eds.), Jerome Bruner: Language, culture, self (pp.31-49). London: Sage Publications.
Williams, G. (2000). Collaborative problem solving and discovered complexity. In J. Bana & A. Chapman (Eds.), Mathematics education beyond 2000 (pp. 656-663). Perth, Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia.
Wood, T. (1994). Patterns of interaction and the culture of mathematics classrooms. In S. Lerman (Ed.), Cultural perspectives on the mathematics classroom. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Wood, T. & Turner-Vorbeck, T. (2001). Extending the conception of mathematics teaching. In T. Wood, B. S. Nelson, & J. Warfield (Eds.), Beyond classical pedagogy (pp. 185-208). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Wood, T., Williams, G., & McNeal, B. (2006). Children's mathematics thinking in different classroom cultures. Journal for Research in Mathematics Education, 37(3), 222-255.

An Analysis of Teacher-Student Communication and Students' Mathematical Thinking in Sixth Grade Mathematics Classrooms

Hong, Woo Ju[5] · Pang, JeongSuk[6]

Abstract

The purpose of this study was to provide useful information for teachers by analyzing various levels of teacher-student communication in elementary mathematics classes and students' mathematical thinking. This study explored mathematical communication of 3 classrooms with regard to questioning, explaining, and the source of mathematical ideas. This study then probed the characteristics of students' mathematical thinking in different standards of communication.

The results showed that the higher levels of teacher-student mathematical communication were found with increased frequency of students' mathematical thinking and type. The classroom that had a higher level of teacher-student mathematical communication was exhibited a higher level of students' mathematical thinking. This highlights the importance of mathematical communication in mathematics classes and the necessity of further developing skills of mathematical communication.

Key Words : Mathematical communication, Questioning, Explaining, Source of mathematical ideas, Mathematical thinking

5) Daegu Wol-seo Elementary School (kitty3523@hanmail.net)
6) Korea National University of Education (jeongsuk@knue.ac.kr)