

## 이중 입도 분포를 가진 현탁액의 침강 속도 예측

구상균<sup>†</sup>

상명대학교 공업화학과  
(2008년 7월 14일 접수, 2008년 10월 28일 채택)

## Prediction of Hindered Settling Velocity of Bidisperse Suspensions

Sangkyun Koo<sup>†</sup>

Department of Industrial Chemistry, Sangmyung University, Seoul 110-743, Korea  
(Received July 14, 2008; accepted October 28, 2008)

본 연구는 크기가 다른 두 종류의 입자를 가진 비(非)콜로이드성 현탁액의 평균 침강 속도를 예측하는 수치적 방법을 제공한다. 이 방법은 무수히 많은 입자들이 유체에 불규칙적으로 분포된 현탁액 시스템의 유체 속도, 온도 등의 물리량을 앙상블 평균의 개념을 사용해서 표현하는 유효 매체 이론에 기초한다. 본 연구에서는 Acrivos와 Chang[1]이 단일(單一) 입도 현탁액에 대해 제안한 모델을 이중(二重) 입도 현탁액에 응용한다. 구체적으로 방사 분포 함수(radial distribution function)에 대한 계산과 stream function을 이용하여 침강 속도를 계산하고 그 결과를 Davis와 Birdsell[2]과 Cheung 등[3]의 실험 결과와 비교하였다. 그 결과 본 연구의 모델에 의한 예측이 실험 결과와 일치하는 것으로 나타났다.

The present study is concerned with a simple numerical method for estimating the hindered settling velocity of noncolloidal suspensions with bidisperse size distribution of particles. The method is based on an effective-medium theory which uses the conditional ensemble averages for describing the velocity fields or other physical quantities of interest in the suspension system with the particles randomly placed. The effective-medium theory originally developed by Acrivos and Chang[1] for monodisperse suspensions is modified for the bidisperse case. Using the radial distribution functions and stream functions the hindered settling velocity of the suspended particles is calculated numerically. The predictions by the present method are compared with the previous experimental results by Davis and Birdsell[2] and Cheung *et al.*[3]. It is shown that the estimations by the effective-medium model of the present study reasonably agree with the experimental results.

**Keywords:** effective-medium model, hindered settling velocity, bidisperse suspensions, radial distribution function, conditional ensemble average

### 1. 서 론

유체 내의 입자 침강은 공업적으로 입자와 유체의 분리와 입자들의 분급에 많이 이용된다. 그 중에서도 입자 분포가 균일하지 않은 현탁액의 입자 침강은 실용적 측면에서 중요하게 취급되어 많은 연구가 행해졌다. Batchelor와 Wen[4]은 다중 입도 분포를 가진 묽은 현탁액의 침강 속도에 대한 이론식을 제시하였는데, 지금까지도 현탁액의 입자 침강에 관한 기본적인 관계식으로 인식되고 있다. 이 외에도 다수의 이론 연구 결과들[2-9]이 있으나 실험에 의한 연구의 비중이 더욱 높다. Davis와 Birdsell[2]은 레이저 빔과 광다이오드(photodiode)를 이용해 수백  $\mu\text{m}$  직경의 유리 구슬 입자의 침강 속도를 측정하고 그 결과들을 Batchelor와 Wen[4]의 이론적 예측과 비교하였다. 두 가지 크기의 입자들을 함유한 이중(二重) 입도 현탁액의 경우 부피 분율 최대 10%의 입자 농도 조건에서 침강 속도를 비교하였으며 낮은 농도 영역에서 Batchelor와 Wen[4]의 이론과 일치하였다. 그러나 Batchelor와 Wen[4]의 이론은 입자간의 상호 작용력이

무시할 만큼 매우 묽은 현탁액에 적용할 수 있다는 한계를 가진다. Cheung 등[3]은 NMR (nuclear magnetic resonance) imaging 방법을 사용해서 이중 입도 현탁액의 침강 속도를 측정하였다. 이 실험에서 폴리스티렌(polystyrene) 미립자를 사용하였고 최대 입자의 부피 농도 13%였다. 이들은 실험 결과와 함께 Barnea와 Mizrahi[10]의 단일(單一) 입도 현탁액에 대한 경험식에 근거한 이중 입도 현탁액의 침강 속도 예측 모델을 제시하였다. Selim 등[6]은 이중 입도 분포를 가진 현탁액의 침강 속도 측정 결과와 Richardson와 Zaki[11]의 침강 속도에 대한 경험식을 이중 입도 현탁액의 경우로 확장한 모델에 의한 예측치들과 비교하였다. 이들 실험적 연구의 대부분이 단일 입도 현탁액의 침강 속도를 나타내는 경험식을 수정하여 이중 입도 현탁액에 적용한 예측 모델들을 함께 제시하고 있는데, 이 모델들은 현탁액의 입자들간 상호 작용에 대해 적절히 고려한다고 보기 어렵다.

그리고 현탁액 시스템의 분석에 있어 수치적으로 엄밀한 해(exact solution)를 계산하는 연구도 많이 진행이 되었으나[8,9,18-20], 계산 방법이 복잡하므로 방법적으로 간단하면서 엄밀한 해나 혹은 실험

<sup>†</sup> 교신저자 (e-mail: skkoo@smu.ac.kr)

결과와 잘 일치하는 계산 방법을 개발하기 위한 노력이 계속되어 왔다.

본 연구에서는 유효 매체 이론(effective-medium theory)에 근거한 모델을 침강 문제에 응용하여 그 모델에 의한 예측이 실험 결과들과 잘 일치하는지를 살펴본다. 입자가 불규칙적으로 분포하는 현탁액에 대해 입자 규모의 미시적인 분석을 하기 위해 앙상블 평균(ensemble average) 개념을 도입한다. 현탁액의 입자 배열을 하나의 배열로 정의할 수 없으므로 무수한 입자 배열에 대한 평균인 앙상블 평균이 사용된다. 현탁액의 물성이나 거동을 알기 위해서 대표성을 띠는 한 입자의 위치를 고정한 조건부 앙상블 평균을 이용하는 데 유효 매체 이론이 바로 이 조건부 평균에 기초하고 있다. 이 이론은 하나의 대표 입자가 원점에 있고 그 주변을 유효 매체로 구성된 것으로 가정하는데 유효 매체의 영역이나 성질에 대한 정의에 따라 다양한 모델들이 제시되어 왔다. 엄밀한 수치 해석에 따른 계산 부담을 피하고 간단하게 이용할 수 있다는 점과 경험식이 아닌 이론에 근거한다는 점이 장점이라 할 수 있다. 그러나 이들은 대부분 단일 입도 현탁액에 대한 것이므로 이종 입도 현탁액의 경우에는 수정이 필요하다.

본 연구에서는 Acrivos와 Chang[1]이 제안한 단일 현탁액에 대한 유효 매체 이론을 응용한 모델을 이종 입도 현탁액에 적용한다. Acrivos와 Chang[1]이 제안한 이론은 유효 매체 내의 물성들이 연속적으로 변하는 것으로 가정하므로 유효 매체의 영역을 구간별로 정의를 한 다른 모델들에 비해 입자들간의 상호 작용에 대한 고려가 잘 이루어진 모델로 인식된다. 이 이론은 Acrivos와 Chang[1]이 복합재료의 열전도도를 계산에서 제시하였으며 엄밀한 수치 해석 결과들과 잘 일치하는 것으로 나타났다. 구체적으로 본 연구에서는 이 이론을 응용한 계산 방법을 사용해서 크기가 다른 두 가지 입자들을 함유한 비(非)콜로이드성 현탁액에서 입자의 침강 속도를 예측하고 이 예측이 Davis와 Birdsell[2]과 Cheung 등[3]의 실험 결과들과 비교한다. 그리고 이종 입도 현탁액의 물성을 결정하는 중요한 인자인 입자의 크기 비에 따른 침강 속도 계산 결과도 제시한다.

## 2. 이론과 계산 방법

구형 입자들이 점성 유체 속에서 침강하는 현탁액을 고려한다. 이 때 입자는 단단한 구(hard sphere)이며 비압축적 뉴턴성(Newtonian) 유체를 지나면서 침강한다고 가정한다. 그리고 입자의 크기와 침강 속도를 기준하는 Reynolds 수(Re)가 매우 작을 때 유체의 유동은 다음의 운동 방정식(momentum equation)을 만족한다.

$$\nabla \cdot \sigma + \rho_f \mathbf{g} = 0 \quad (1)$$

여기서  $\sigma$ 는 위치  $\mathbf{x}$ 에서의 유체의 응력이고  $\rho_f$ 는 유체의 밀도,  $\mathbf{g}$ 는 중력가속도이다. 입자 내부에 대해서도 위와 유사한 식을 적용하는 데, 이 때 밀도는  $\rho_f$ 가 아닌  $\rho_p$  즉 입자의 밀도로 주어진다. 식 (1)은 일반적으로 Stokes equation으로 불리며 Re가 매우 작은 경우에 적용되는 운동 방정식이다. 즉 다루는 시스템에서 점성력과 압력을 포함하는 응력 항(stress term)과 중력 항(gravitational term)의 균형을 나타낸다.

입자들이 불규칙적으로 분포해 있는 현탁액의 물리적 성질을 다루기 위해 무수히 많은 입자 분포의 배열에 대한 평균 개념인 앙상블 평균(ensemble average)을 사용한다. 위 식 (1)에 대해 하나의 입자

를 원점  $\mathbf{0}$ 에 두는 조건부 앙상블 평균을 취하면 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \langle \sigma \rangle_c(\mathbf{x}|\mathbf{0}) + \rho_f + (\rho_p - \rho_f) \langle \chi \rangle_c(\mathbf{x}|\mathbf{0}) \mathbf{g} = 0 \quad (2)$$

여기서  $\chi$ 는 입자의 상 지시 함수(phase indicator function)로서 위치 벡터  $\mathbf{x}$ 가 입자 안에 위치하면 1이고 그렇지 않으면 0이 되는 함수이다. 이 함수의 조건부 앙상블 평균  $\langle \chi \rangle_c(\mathbf{x}|\mathbf{0})$ 은 다음의 식으로 표현된다.

$$\langle \chi \rangle_c(\mathbf{x}|\mathbf{0}) = \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \leq a} P(\mathbf{x}'|\mathbf{0}) dV_{\mathbf{x}'} \quad (3)$$

여기서  $P(\mathbf{x}'|\mathbf{0})$ 는 한 입자가 원점에 있을 때 위치  $\mathbf{x}'$ 에서 다른 입자를 찾을 확률 밀도(probability density)이다. 원점에서의 거리가 멀어질수록  $\chi$ 는 입자의 농도 즉 부피 분율  $\phi$ 에 가까워진다. 입자간 확률 밀도가 일정한 현탁액에 대해 응력(stress)은 일반적으로 다음의 구성 방정식(constitutive equation)으로 나타낼 수 있다.

$$\langle \sigma \rangle_c = -\langle p \rangle_c \mathbf{I} + \eta(r) \left[ \nabla \langle \mathbf{u} \rangle_c + (\nabla \langle \mathbf{u} \rangle_c)^T \right] \quad (4)$$

여기서  $\langle p \rangle_c$ 는 조건부 앙상블 평균 압력,  $\eta(r)$ 는 원점으로부터 거리  $r$ 에서의 점도,  $\mathbf{I}$ 는 등방성 단위 텐서(tensor)이다. 이 식의 응력은 우변 첫 번째 항의 압력(pressure) 성분과 두 번째 항의 점성력(viscous force) 성분의 합으로 나타남을 의미한다. 그리고 우변의 위첨자  $T$ 는 transpose를 나타낸다. 원점에서의 거리가 멀어질수록 조건부 앙상블 평균 압력과 속도는 무조건부 앙상블 평균(unconditional ensemble average)에 근사하게 된다. 입자들의 평균 침강 속도는 원점에서 평가되는 조건부 평균 속도에 해당한다.

본 연구에서는 이 조건부 평균 속도를 효율적으로 구하기 위해 유효 매체 이론을 응용한다. 여러 가지 유효 매체 이론이 제안되어 왔는데 그 중에서 주목할 만한 것이 Acrivos와 Chang[1]이다. 그들은 입자들이 매체상에 분포된 복합 재료의 열전도도를 구하는 데 유효 매체 이론을 개발하여 적용하였다. 그 이론은 입자들이 불규칙적으로 매체상에 분포된 복합 재료를 대표 입자와 이를 둘러싼 유효 매체로 구성되는 것으로 보며 이 유효 매체의 밀도와 점도 등의 성질이 연속적으로 변하는 것으로 가정한다.

이 이론에서는 지시 함수의 조건부 평균을 구해야 하는데, 단단한 구의 방사 분포 함수(radial distribution function)에 관한 Percus-Yevick식[12]을 풀어서 결정한다. 입자 쌍 확률 밀도(pair probability density)가 방향에 무관한 현탁액에 대해서 Figure 1과 같은 기하학적인 고려를 이용하여 식 (3)의 부피 적분은 다음과 같이 변수  $y$ 에 대한 적분으로 나타낼 수 있다.

$$\langle \chi \rangle_c(\mathbf{x}|\mathbf{0}) = n\pi \int_{-a}^{r+a} g_r(y)(2y-y^2/r-r+a^2/r)ydy \quad (5)$$

여기서  $n$ 은 구 입자들의 수 밀도(number density),  $g_r$ 은 단단한 구의 방사 분포 함수이다. 이는 식 (3)에 나타난 확률 밀도 함수  $P(\mathbf{x}|\mathbf{0}) = ng_r(\mathbf{x}|\mathbf{0})$ 의 관계를 이용하고 이를 원점  $\mathbf{0}$ 에 입자가 있을 때  $\mathbf{x}$ 위치에 있는 가상의 입자 공간에 대한 부피 적분이다. 이 가상의 입자 공간 부분이 Figure 1의 점선으로 나타낸 공간이며, 이에 대한 부피 적분을 위해 변수  $y$ 를 이용하여 나타낸 것이다. 단일 입도 분포의 경우

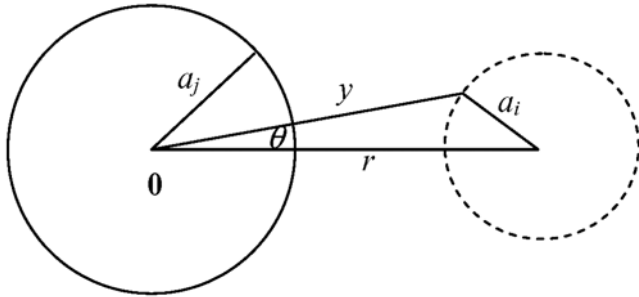


Figure 1. Geometry for the integration in (5) and (7).

Figure 1에서  $a_i=a_j$ 가 되며  $|\mathbf{x}| = r$ 이다. 이 식을 이용해 현탁액의 위치에 따른 점도나 밀도 등을 계산하게 된다.

이중 입도 현탁액의 경우는 조금 더 복잡해진다. 입자의 반경  $a_i$ , 밀도  $\rho_{p,i}$ , 부피 분율  $\phi_{i,n}$  이중 입도 분포의 현탁액을 고려한다. 아래 첨자  $i$ 는 1과 2로 주어지며, 본 연구에서는 큰 입자를 1, 작은 입자를 2로 표기한다. 위의 식 (2)도 이중 입도 현탁액의 경우 반지름이  $a_i$ 인 한 입자가 원점에 있을 때, 입자의 크기를 구분하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\nabla \cdot \langle \sigma \rangle_c(\mathbf{x}|0, a_i) + \left[ \rho_f + \sum_{k=1}^2 (\rho_{p,k} - \rho_f) \langle \chi_k \rangle_c(\mathbf{x}|0, a_i) \right] \mathbf{g} = 0 \quad (6)$$

여기서  $\chi_k$ 는  $k$  종류 입자의 지시 함수이며,  $\langle \sigma \rangle_c(\mathbf{x}|0, a_i)$ 는 반지름이  $a_i$ 인 입자가 원점 0에 있을 때  $\mathbf{x}$  위치에서의 응력의 조건부 앙상블 평균을 나타낸다. 이 경우에 식 (6)은 입자의 크기를 구분하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\langle \chi_i \rangle_c(\mathbf{x}|0, a_j) = n_i \pi \int_{r-a_i}^{r+a_i} g_{r,ij}(y) (2y - y^2/r - r + a_i^2/r) y dy \quad (7)$$

위 식에서  $g_{r,ij}$ 는  $j$  입자가 원점에 있을 때  $i$  입자의 방사 분포 함수이다. 이 식의 물리적인 의미는 위 식 (6)과 같으며, 단지 원점에 있는 입자와 거리  $r$ 에 존재하는 가상의 입자의 크기를 구분하여 더 일반화시킨 것이다. 크기가 다른 두 가지 단단한 구들의 혼합물의 방사 분포 함수  $g_{r,ij}$ 는 Percus-Yevick식을 풀어서 얻는다. Lebowitz[13], Throop and Bearman[14], Leonard 등[15]이 Percus-Yevick식에 대한 해나 방법을 다양한 형태로 제시하였는데 본 연구에서는 Throop and Bearman[14]의 계산 방법을 따라  $g_{r,ij}$ 에 대한 명료한 식들을 유도하였고 이를 부록에 나타내었다.

상기의 이론 식들을 요약해보면 유체상에 무한히 많은 입자들이 무질서하게 분포한 현탁액의 평균 물성을 묘사하기 위하여 앙상블 평균 개념을 사용하는데, 그 중에서도 한 입자의 위치를 고정하는 조건부 앙상블 평균을 이용하여 유효 매체 이론을 전개하고 있다. 구체적으로 본 유효 매체는 원점에 위치한 대표 입자와 이를 둘러싼 유효 매체로 구성이 되는데, 이 유효 매체의 성질을 어떻게 정의하는가에 따라 대표 입자에 미치는 영향이 달라지며 궁극적으로 현탁액의 성질을 결정하게 된다. 단일 입도 계에서는 대표 입자와 유효 매체로 구성되는 하나의 모델로 해석을 하지만 이중 입도 현탁액의 경우 큰 입자와 작은 입자 각각이 대표 입자가 되는 두 개의 유효 매체 모델을 조합한 것으로 본다. 이러한 입자의 크기를 반영

한 운동 방정식이 식 (6)이다. 이들 유효 매체가 대표 입자에 미치는 영향을 계산하여 궁극적으로 hindered settling velocity를 결정하게 되므로 이 유효 매체 물성에 대한 정의가 매우 중요해지는데, 본 유효매체 모델의 경우 유효 매체의 물성이 방사 분포 함수의 적분 형태로 주어지는  $\langle \chi \rangle_c$ 에 의존하는 것이 가장 중요한 특징이며 실제 현탁액에 근사한 모델이라 할 수 있다.

현탁액에서 입자들의 평균 침강 속도를 계산하기 위해서는 유효 점도에 대한 계산이 선행되어야 한다. 유효 매체 이론을 이용하여 유체의 조건부 평균 속도, 그리고 점도와 침강 속도를 결정하기 위해서는 유효 매체에 대해 식 (2)와 (5)가 결합된 운동 방정식을 풀어야 한다. 단, 유효 매체이므로 그 밀도  $\rho(r)$ 과 점도  $\eta(r)$ 는 원점에서의 거리  $r$ 의 함수이다. 평균 유체 흐름이나 중력의 방향은 조건부 평균 속도가  $x_1$ 축에 대해 대칭이 되도록 주어진다. 축대칭 시스템은 2차원 흐름으로 간주할 수 있으므로 stream function을 사용해서 운동 방정식을 단순화하는 것이 가능하다. Stream function은 다음과 같이  $r$ 과  $\mu$ 의 함수의 곱으로 표현할 수 있다.

$$\psi = f_n(r) Q_n(\mu) \quad (8)$$

여기서  $\mu = \cos \theta$  인데  $\theta$ 는  $x_1$ 축을 중심으로 하는 극 각도(polar angle)이고  $Q_n$ 은 Legendre function의 적분으로 침강 문제의 경우  $n=1$ , 점도 문제는  $n=2$ 에 해당된다(Leal[16] 참조).

수치적 계산을 위해 stream function을 이용하여 운동 방정식(momentum equation)을 계산에 편리한 형태로 정리한다. 먼저 현탁액의 점도 계산 문제에 대해 위 식 (8)을 이용하여 운동 방정식을 아래와 같이  $f_2$  함수의 상미분 방정식(ordinary differential equation)으로 바꿀 수 있다.

$$f_2^{(4)} + \frac{2\eta'}{\eta} f_2''' + \left( \frac{\eta''}{\eta} - \frac{2}{r} \frac{\eta'}{\eta} - \frac{12}{r^2} \right) f_2'' - \left( \frac{2}{r} \frac{\eta''}{\eta} + \frac{10}{r^2} \frac{\eta'}{\eta} - \frac{24}{r^3} \right) f_2' + \left( \frac{6}{r^2} \frac{\eta''}{\eta} + \frac{24}{r^3} \frac{\eta'}{\eta} \right) f_2 = 0 \quad (9)$$

여기서

$$\eta = \eta(r) = \eta_0 (1 + \alpha \langle \chi_1 \rangle_c(r) + \beta \langle \chi_2 \rangle_c(r)) \quad (10)$$

$$\alpha = \frac{3S_1}{4\pi a_1^3}, \quad \beta = \frac{3S_2}{4\pi a_2^3} \quad (11)$$

이고  $\eta'$ 와  $\eta''$ 는 각각  $\eta$ 의  $r$ 에 대한 1차와 2차 미분이다. 그리고  $S_1$ 와  $S_2$ 는 각 종류의 입자에 기인하는 stresslets이며 이 값들이 현탁액의 유효 점도를 결정한다. 위 식의 함수  $f_2$ 는 입자 표면에서의 유체의 미끄러짐이 없고 원점에서의 거리  $r$ 이 매우 클 때 주어진 평균 유체 흐름에 따른다는 경계 조건을 적용해서 수치적으로 적분하여 구한다. 이와 관련한 상세한 계산 방법과 결과들은 Song과 Koo[17]에 잘 나타나 있다. 이렇게 구한 점도는 침강 속도의 계산에 사용된다.

현탁액의 침강 속도를 구하는 문제도 계산 절차에 있어 위의 점도 문제와 유사하다. 침강 문제에 대해 stream function을 이용하면 운동 방정식을 다음과 같이  $f_1$  함수의 상미분 방정식으로 나타낼 수 있다.

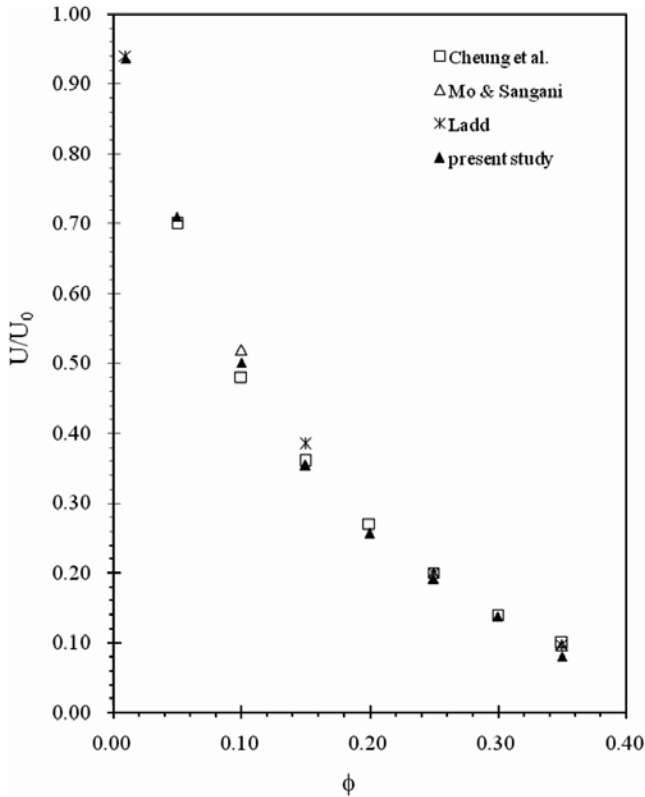


Figure 2. Normalized settling velocity  $U/U_0$  vs.  $\phi$  for monodisperse suspensions.

$$f_1^{(4)} + \frac{2\eta'}{\eta} f_1''' + \left( \frac{\eta''}{\eta} - \frac{2\eta'}{r\eta} - \frac{4}{r^2} \right) f_1'' - \left( \frac{2\eta''}{r\eta} + \frac{2\eta'}{r^2\eta} - \frac{8}{r^3} \right) f_1' + \left( \frac{2\eta''}{r^2\eta} + \frac{8\eta'}{r^3\eta} - \frac{8}{r^4} \right) f_1 - \frac{2\Delta\rho'rg}{\eta} = 0 \quad (12)$$

여기서  $\eta$ 는 위 문제에서 구한 값을 사용한다. 그리고  $\Delta\rho = \rho(r) - \rho_\infty$ 이므로  $\Delta\rho'$ 은  $\rho(r)$ 의  $r$ 에 대한 미분이며  $\rho(r)$ 과  $\rho_\infty$ 은 다음과 같다.

$$\rho(r) = \rho_f + (\rho_p - \rho_f)(\langle \chi_1 \rangle_c(r) + \langle \chi_2 \rangle_c(r)) \quad (13)$$

$$\rho_\infty = \rho_f + (\rho_p - \rho_f)\phi \quad (14)$$

입자 표면에서 유체의 미끄러짐이 없는 조건과 원점으로부터 먼 거리에 있을 때 유체는 주어진 평균 유체 흐름을 따른다는 경계 조건들을 적용하여 위 식을 수치적으로 적분하고 matrix solver를 사용해 입자의 침강 속도를 구하게 된다. 점도와 침강 두 문제 모두 큰 입자가 원점에 있는 모델과 작은 입자가 원점에 있는 모델에 대해 각각 상호 교차적으로 계산이 이루어진다.

### 3. 결과 및 고찰

현탁액에서 침강 속도는 단일 입자의 침강 속도와 입자들간의 상호 작용에 의한 인자의 곱으로 나타내지는데 입자들간 상호 작용에 의한 인자는 입자 농도의 함수로 주어진다. 현탁액의 입자 침강

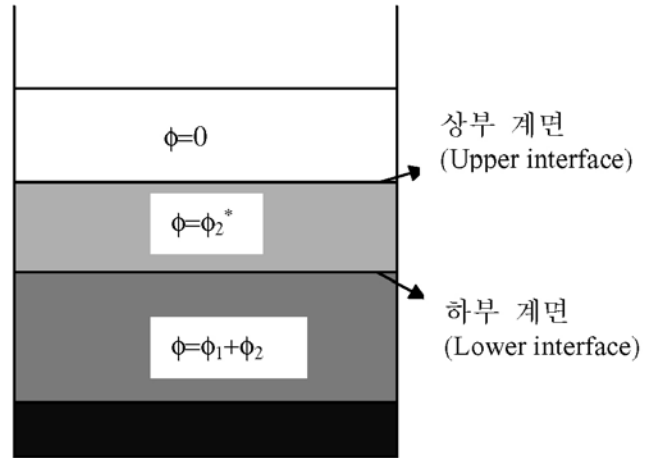


Figure 3. Formation of four zones in the course of hindered settling particles ( $\phi_2^* \geq \phi_2$ ).

은 입자들간 상호 작용에 영향을 많이 받으므로 hindered settling이라 부르며 입자 상호 작용에 의한 인자를 결정하는 것이 주된 관심사이다. 이론적으로나 실험적으로 입자간 수력학적 상호작용(hydrodynamic interaction)을 구하기 위한 다양한 연구 결과가 제시되었는데 비(非)콜로이드성(性) 단일 입자를 함유한 현탁액의 경우, 최근에도 그 연구 결과들이 보고되고 있다[18-20]. 우선 본 연구의 유효 매체 모델을 사용하여 입자의 농도에 따라 단일 입도 현탁액의 침강 속도를 구하였으며 그 결과를 Figure 2에 나타내었다. 비교를 위해 엄밀한 계산 결과[19,20]와 Cheung 등[3]의 실험 결과도 같이 나타냈는데 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

이중 입도 현탁액의 경우는 좀 더 복잡해진다. 입자 농도만의 함수로만 주어지는 단일 입도 현탁액과 달리 입자 크기의 비, 각 입자의 농도, 전체 농도가 침강 속도를 결정하는 매개 변수가 된다. 실험적으로도 단순히 입자들이 침강하면서 생기는 입자 함유 영역과 현탁액의 윗부분에 남은 유체 영역간의 경계선이 하강하는 것을 비접촉식 방법으로 측정하던 단일 현탁액과 달리 이중 입도 현탁액은 Figure 3에 나타난 바와 같이 입체 침강 중 여러 개의 영역간 경계선이 나타난다. 먼저 유체와 잘 혼합된 현탁액은 입자들의 침강이 일어나면서 네 가지 영역으로 나뉜다. 최상부는 투명한 유체만 남고 그 아래에는 작은 입자들만으로 구성되는 영역 그리고 그 밑으로는 작은 입자와 큰 입자가 초기의 농도로 공존하는 영역이고 그 다음은 최하부로 입자들의 침적층이다. 실험에서는 상부 투명층과 작은 입자로만 구성되는 영역간 계면(여기서 상부 계면으로 부르기로 한다)과 작은 입자만으로 구성되는 영역과 혼합 입자가 존재하는 영역간 계면(하부 계면)의 하강 속도를 측정한다. 여기서 하부 계면의 하강 속도는 큰 입자의 하강에 의해 결정되므로 큰 입자의 침강 속도에 해당된다. 상부 계면의 하강 속도는 작은 입자만 존재하므로 실제로 단일 입도 현탁액의 거동과 같으나 작은 입자의 농도는 초기 농도와 동일하지 않다. 실제 이 작은 입자 영역에서 입자 농도는 초기 농도보다 높게 나타나며 이는 실험적으로도 확인된다. 이를 정리해서 표현하면

$$U_{\text{lower interface}} = U_1(\phi_1, \phi_2, \lambda) \quad (15)$$

$$U_{\text{upper interface}} = U_2(\phi_2^*) \quad (16)$$

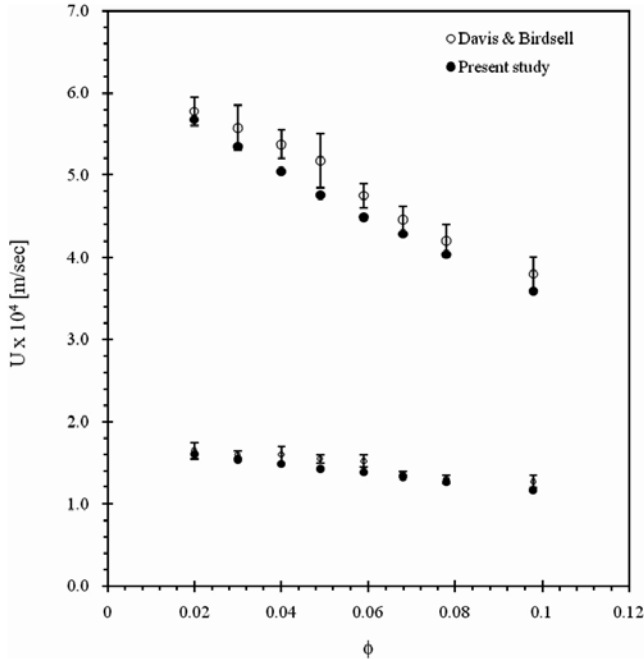


Figure 4. Settling velocity vs.  $\phi$  for bidisperse suspensions at the experimental conditions from Davis and Birdsell[2]. Upper branch is for the moving velocity of lower interface and lower branch corresponds to that of upper interface ( $\lambda=a_2/a_1=0.52$ ,  $\phi_1=\phi_2=\phi/2$ ).

로 나타낼 수 있는 데  $\lambda$ 은 작은 입자와 큰 입자의 크기비  $a_2/a_1$ 이며  $\phi_2^*$ 는 작은 입자만으로 구성된 층의 농도로  $\phi_2$ 보다는 다소 높은 값을 가지는 것이 실험적으로 관찰되어 본 연구에서는 실험 결과와의 정확한 비교를 위해 실제 측정된  $\phi_2^*$ 를 사용하여 단일 입도계의  $U_2$ 를 계산하였다. 본 연구의 모델에서는 이중 입도계의  $U_I(\phi_1, \phi_2, \lambda)$ 과  $U_I(\phi_1, \phi_2, \lambda)$ 을 계산하도록 되어 있어 실제 실험상에서 직접적으로 확인되는 것과 차이가 있다. 이는 실험적으로 작은 입자의 침강 속도만을 분리해서 측정하기가 실제적으로 어렵기 때문이다. 따라서 위의 관계식 (15)와 (16)에 의해 실험 결과와 이론적인 계산 결과를 비교하였다.

실험 결과와 비교를 위해 비콜로이드성 현탁액의 침강을 다른 Davis와 Birdsell[2] 그리고 Cheung 등[3]의 실험 결과들을 사용하였다. Davis와 Birdsell[2]은 주로 평균 입경이 각각 136과 261  $\mu\text{m}$  (밀도  $2.49 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ )의 유리 비드를 뉴턴성 유체(밀도  $1.015 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , 점도  $0.086 \text{ kg/m} \cdot \text{sec}$ )에 분산시킨 현탁액에 대해 광학적 방법으로 현탁액 내에 형성되는 경계면의 강하 속도를 측정하였다. 즉 그 경계면에서 입자의 농도 차이에 따라 광의 흡수율이 달라지는 것을 이용하여 그 강하 속도를 측정하였으며 입자의 부피 분율이 0.1 이하의 범위에서 실험이 이루어졌다. 그리고 Cheung 등[3]은 광학적 방법이 아닌 NMR imaging 방법을 사용하여 주로 두 종류의 폴리스타이렌 비드(274와 655  $\mu\text{m}$ , 밀도  $1.088 \times 10^3$ 과  $1.044 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ )와 뉴턴 유체(밀도  $0.973 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , 점도  $0.043 \text{ kg/m} \cdot \text{sec}$ )로 구성되는 현탁액에 대해 시간과 위치에 따른 입자 농도 변화를 측정하여 경계면 강하 속도를 구하였다. Figure 4에서 Davis와 Birdsell[2]의 결과와 비교했는데 상, 하부 계면의 하강 속도를 나타내었다. 그림의 윗부분에 나타난 것이 하부 계면의 하강 속도이고 그림 아랫부분이 상부 계면의 하강속도이다. 모델의 예측치가 실험 결과와 대체로

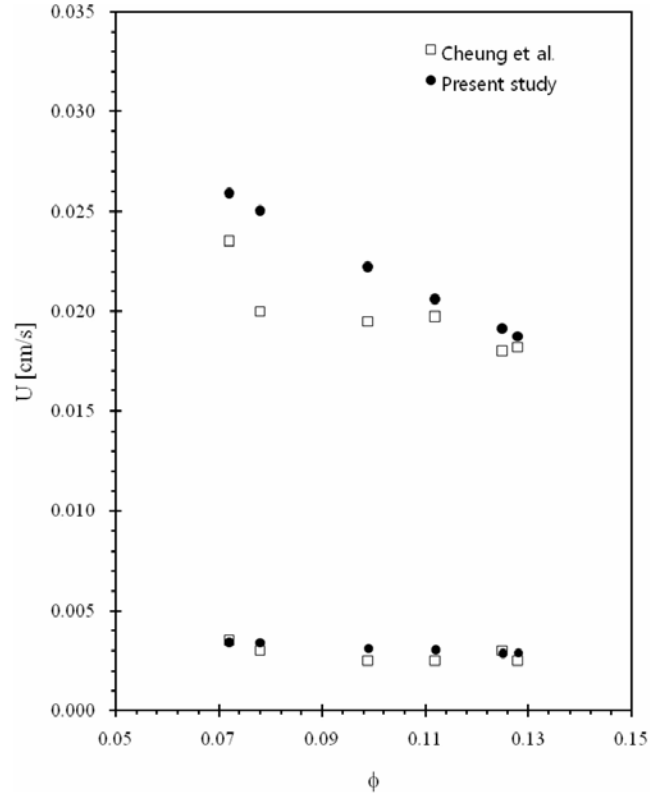


Figure 5. Settling velocity vs.  $\phi$  for bidisperse suspensions at the experimental conditions from Cheung *et al.*[3]. Upper branch is for the moving velocity of lower interface and lower branch corresponds to that of upper interface ( $\lambda=a_2/a_1=0.42$ ,  $\phi_1=\phi_2=\phi/2$ ).

잘 맞는 것을 알 수 있다. 다른 비교 예로 Cheung 등[3]의 결과를 Figure 5에 나타내었는데 유효 매체 모델로 예측한 하부 계면의 하강 속도가 실험 결과보다 약간 높게 나타남을 볼 수 있다. Cheung 등[3]은 그들의 측정 결과와 잘 일치하는 모델의 예측도 제시하고 있는데 이는 Barnea와 Mizrahi[10]의 단일 입도 현탁액에 대한 상관식을 이중 입도 현탁액에 응용한 것이다. 그들의 모델에 의한 예측과 Davis와 Birdsell[2]의 실험 결과를 비교하였는데 예측이 Davis와 Birdsell[2]의 실험 결과에 비해 낮은 값을 나타내었다. Cheung 등[3]은 그 차이에 대한 이유를 그들이 고안한 모델이 현탁액의 입자가 규칙적으로 배열된 것으로 가정한 데서 기인한다고 설명하고 있다.

이 두 연구 그룹들의 결과와 본 연구의 모델에 의한 예측 결과를 비교·정리하여 Figure 6에 나타내었다. 하부 계면의 하강 속도에 해당하는 큰 입자의 침강 속도를 단일 입자의 침강 속도로 나눈 침강 속도비를 입자 농도에 따라 나타내었는데 실험 결과들은 그 평균만을 나타내었다. 본 모델에 의한 예측이 Davis와 Birdsell[2]의 실험 결과에 비해서는 다소 낮은 값을 보이고 Cheung 등[3]의 결과에 비해서는 다소 높은 값을 보이나 Figure 4의 Davis와 Birdsell[2]의 실험 결과 비교를 보면 실험 오차의 범위 내에 있다. 따라서 본 모델의 예측이 실험 결과들과 일치한다고 볼 수 있다.

위의 실험들과 달리 입자의 농도가 높은 현탁액에 대해서는 입자들간의 응집 현상 발생에 관한 보고가 많으며[21-23] 입자들의 응집이 발생하게 되면 개별 입자간의 상호 작용에 근거하는 이론들을 적용하는 것은 적합하지 않다.

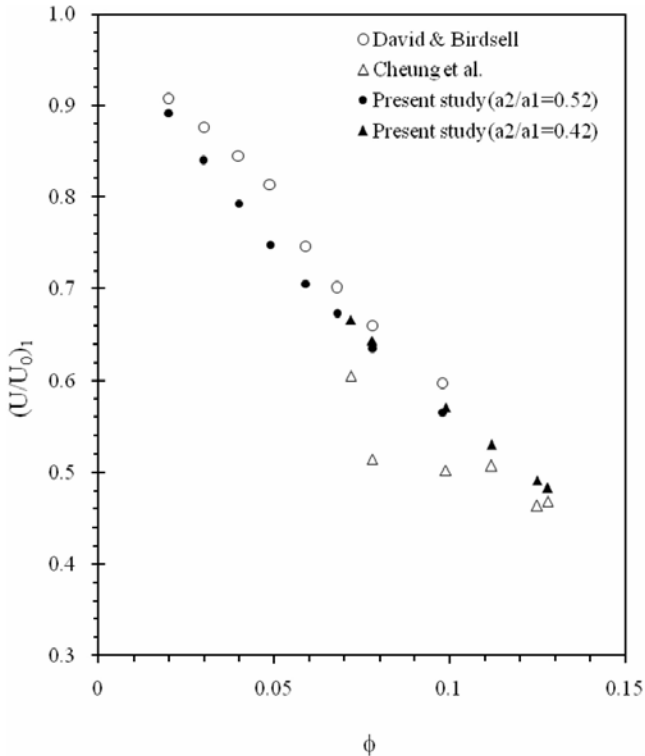


Figure 6. Normalized settling velocity of large particles  $(U/U_0)_1$  vs.  $\phi$  for bidisperse suspensions at the experimental conditions.

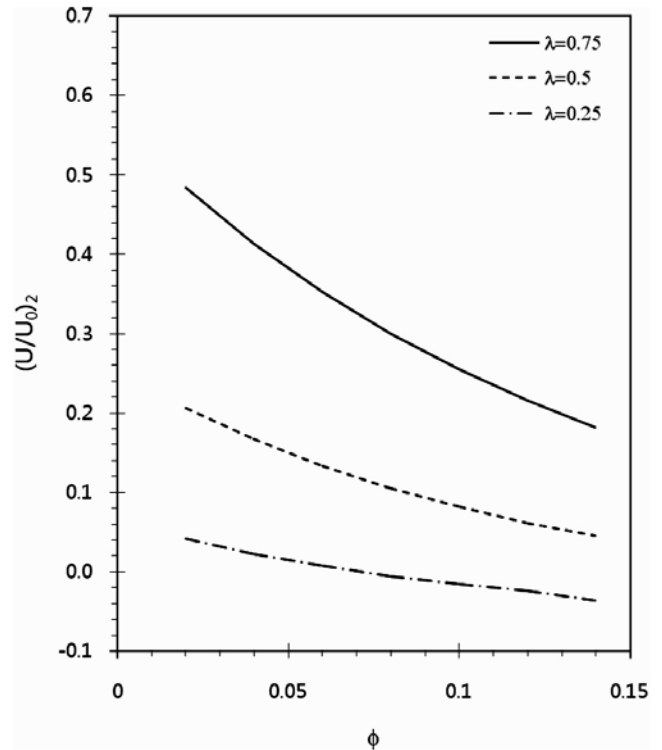


Figure 8. Normalized settling velocity of small particles  $(U/U_0)_2$  vs.  $\phi$  for bidisperse suspensions at  $\lambda (=a_2/a_1) = 0.75, 0.5,$  and  $0.25$  ( $\phi_1 = \phi_2 = \phi/2$ ).

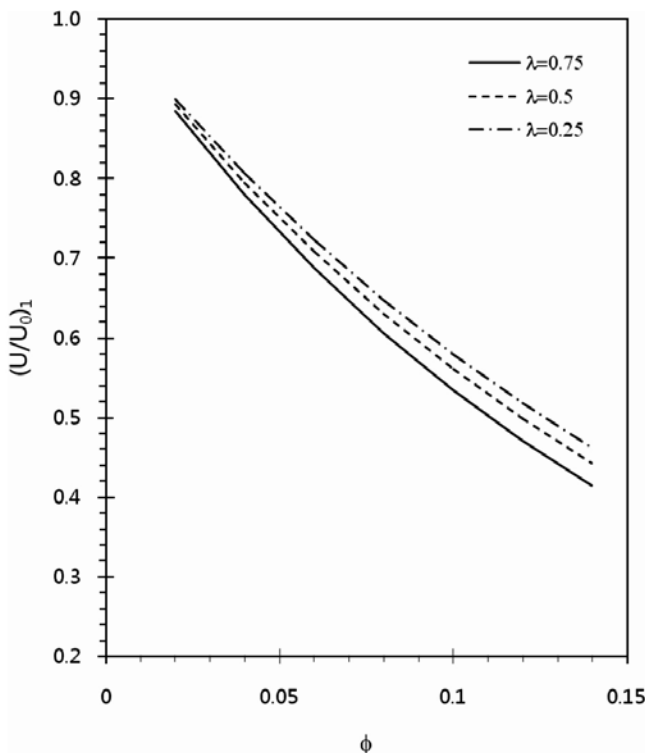


Figure 7. Normalized settling velocity of large particles  $(U/U_0)_1$  vs.  $\phi$  for bidisperse suspensions at  $\lambda (=a_2/a_1) = 0.75, 0.5,$  and  $0.25$  ( $\phi_1 = \phi_2 = \phi/2$ ).

그리고 Figures 7과 8에 입자의 크기 비( $\lambda = a_2/a_1 = 0.75, 0.5, 0.25$ )에 따른 침강 속도의 변화를 나타냈다. 여기서 입자 종류별 부피 분율은 동일하다. 입자의 농도에 따라 Figure 7은 큰 입자의 침강 속도를 Figure 8은 작은 입자의 침강 속도비를 보이는 데 입자 크기비  $\lambda$ 가 작을수록 즉 입자 크기 차이가 클수록 작은 입자의 침강 속도는 크게 감소하여  $\lambda$ 가 0.25인 경우에 침강 속도가 음수값을 보이기도 한다. 반면 큰 입자의 경우는 상대적으로 변화가 작는데  $\lambda$ 가 작아질수록 침강속도가 증가하는 경향을 보인다. 이 결과들은 입자들이 침강하면서 입자 주변에 유체의 상승 흐름이 생겨 그 주변 입자들의 하강에 영향을 미치는데 기인한다. 입자 크기의 차이가 클수록 작은 입자의 침강 속도는 크게 감소하게 되는 데, 입자의 침강에 따른 주변 유체의 역방향 흐름은 입자의 침강 속도에 비례적이고 입자의 침강 속도는 입자 반경의 제곱에 비례한다는 점(즉,  $U \propto a^2$ )에서 대략적인 추정은 할 수 있다. 이러한 주변 유체의 흐름은 입자간 거리나 입자의 농도에 따라서도 영향을 받으므로 복잡한 계산이 필요하게 된다. 본 모델을 이용함으로써 효율적이고 정확한 계산이 가능하며 Figures 7과 8은 그 결과를 잘 보여주고 있다.

#### 4. 결 론

크기가 다른 두 가지 입자들을 함유한 비콜로이드성 현탁액의 침강 속도를 예측하기 위해 간단한 수치적 방법을 제시하고 선행 실험 결과들과 비교하였다. 이 방법은 Acrivos와 Chang[1]이 단일 입도 현탁액에 대해서 제안한 유효 매체 모델을 이중 입도 현탁액에 응용한 것이며 방사 분포 함수(radial distribution function)와 stream func-

tion를 이용하여 유효 매체에 대한 운동 방정식(momentum equation)을 풀어 침강 속도를 구하였다. 먼저 입도가 균일한 단일 현탁액의 경우에 대해 침강 속도를 계산하였고, 그 결과와 엄밀한 이론 계산 결과[20,21] 및 Cheung 등[3]의 실험 결과와 잘 일치하는 것으로 나타났다. 이중 입도 현탁액에 대해 위의 계산 방법으로 구해진 침강 속도를 Davis와 Birdsell[2] 그리고 Cheung 등[3]의 실험 결과들과 비교하였다. 구체적으로 입자 크기비(작은 입자경/큰 입자경)  $\lambda = 0.52$ 의 유리 비드를 사용한 현탁액에 대해 각 입자의 부피 분율이 같고 총 입자 부피 분율이 0.02~0.1 범위의 조건에서 행해진 Davis와 Birdsell[2]의 실험 결과와 0.07~0.13 범위의 총 입자 부피 분율 범위에서  $\lambda = 0.42$ 의 폴리스타이렌 비드를 사용한 Cheung 등[3]의 결과들이 본 모델의 이론적 계산 결과와 실험의 오차 범위 내로 일치하는 결과를 보였다.

두 종류 입자의 농도를 동일하게 하고 입자의 크기비( $\lambda = 0.25, 0.5, 0.75$ )에 따른 침강 속도의 변화를 보았는데 입자의 크기 차이가 클수록 작은 입자의 침강 속도가 크게 감소하고 큰 입자의 침강 속도는 약간 증가한다. 이는 침강되는 입자 주변에 발생하는 역방향 유체의 흐름에 의한 것으로 입자 크기의 제곱에 비례하는 입자의 침강 속도와 비례적이라는 점에서 대략적인 추정이 되는 결과이나 본 모델을 이용하여 정확한 계산 결과를 제시하였다.

결론적으로 본 계산 방법을 이용해 이중 입도 현탁액의 침강 속도에 대한 정확한 예측이 가능함을 확인하였으며, 이 방법을 응용한 분석이나 이중 입도 분포를 가진 현탁액과 복합 재료(composite materials)의 다른 물질들을 예측하는 데도 이용될 수 있을 것으로 기대된다.

**부록: 크기가 다른 두 가지 단단한 구들을 함유한 혼합물의 방사 분포 함수(Radial distribution function of binary mixture of hard spheres)**

본 연구에서는  $g_{r,ij}(r)$ 의 계산을 위해 Throop and Bearman[14]의 방법을 사용한다. 방사 분포 함수  $g_{r,ij}(r)$ 의 Laplace 변환에 대한 inversion 적분은 다음과 같이 주어진다.

$$r_{g_{r,11}}(r) = \frac{1}{12\xi_1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{s[H-L_2(s)\exp(2sa_2)][I(s)]^m \exp[s(r-2a_1-2a_2)] ds}{[F(s)]^{m+1}}$$

$$r_{g_{r,22}}(r) = \frac{1}{12\xi_2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{s[H-L_1(s)\exp(2sa_1)][I(s)]^m \exp[s(r-2a_1-2a_2)] ds}{[F(s)]^{m+1}}$$

$$r_{g_{r,12}}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\left[12(\xi_2 a_2^3 - \xi_1 a_1^3)(a_2 - a_1) - a_{12}\left(1 - \frac{1}{2}\theta\right)\right] s - (1+2\theta)}{[I(s)]^m s^2 \exp[s(r-a_{12})] ds} \frac{[I(s)]^m s^2 \exp[s(r-a_{12})] ds}{[F(s)]^{m+1}}$$

(A1)

여기서  $\xi = \pi n_i / 6$ ,  $n_i$ 는  $i$ 의 수밀도(number density)이다.  $H, L_i(s), L_2(s), F(s), I(s)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$H = 72\xi_1 \xi_2 (a_2 - a_1)$$

$$L_1(s) = 12\xi_2 \left[ \left(1 + \frac{1}{2}\theta\right) + 12\xi_1 a_1^2 (a_2 - a_1) \right] a_2 s_2 + [12\xi_2 (1+2\theta) - 2Ha_1] s + H$$

$$L_2(s) = 12\xi_1 \left[ \left(1 + \frac{1}{2}\theta\right) + 12\xi_2 a_2^2 (a_1 - a_2) \right] a_1 s_2 + [12\xi_1 (1+2\theta) - 2Ha_2] s + H$$

$$F(s) = H + [12(\xi_1 + \xi_2)(1+2\theta) - 2H(a_1 + a_2)] s - 72(\xi_1 a_1^2 + \xi_2 a_2^2) s^2 - 24(\xi_1 a_1^2 + \xi_2 a_2^2)(1-\theta) s^3 - (1-\theta)^2 s^4$$

$$I(s) = L_2(s) \exp(-2sa_1) + L_1(s) \exp(-2sa_2) - H \exp[-2s(a_1 + a_2)]$$

(A2)

나머지 정리(residual theorem)를 이용하면 Eq. (A1)의 적분항은  $2\pi i R_m^j$ 가 되며  $R_m^j$ 는 다음과 같다.

$$R_m^{ij} = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{t_i} \lim_{s \rightarrow t_i} \left( \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} [(s-t_i)^m] \sum_{k=1}^2 \frac{\phi_m^{ij}(s) \exp[s(r-\psi_k^{ij}(a_1, a_2))]}{[F(s)]^m} \right)$$

(A3)

여기서  $t_i$ 는  $F(s)=0$ 의 네 개의 근이고  $\phi_k^{ij}$ 는  $s$ 의 다항식(polynomial)으로 다음과 같다.

$$\phi_1^{11} = \frac{-L_2(s)s}{12\xi_1} \Xi(s), \quad \phi_2^{11} = \frac{Hs}{12\xi_1} \Xi(s)$$

$$\phi_1^{22} = \frac{-L_1(s)s}{12\xi_2} \Xi(s), \quad \phi_2^{22} = \frac{Hs}{12\xi_2} \Xi(s)$$

$$\phi_1^{12} = \left\{ \left[ 12(\xi_2 a_2^3 - \xi_1 a_1^3)(a_2 - a_1) - a_{12} \left( \frac{1-\theta}{2} \right) \right] s - (1+2\theta) \right\} s^2 \Xi(s),$$

$$\phi_2^{12} = 0$$

(A4)

여기서

$$\Xi(s) = \sum_{q_1=0}^{q_1+} \sum_{q_2=0}^{q_2+} \sum_{q_3=0}^{q_3=m-1} \frac{(m-1)!}{q_1! q_2! q_3!} L(s)^{q_1} L(s)^{q_2} (-H)^{q_3}$$

(A5)

$\psi_k^{ij}$ 는  $a_1$ 과  $a_2$ 의 선형 조합이다.

$$\psi_1^{11} = 2(m-q_2)a_1 + 2(m-q_1-1)a_2$$

$$\psi_2^{11} = 2(m-q_2)a_1 + 2(m-q_1)a_2$$

$$\psi_1^{22} = 2(m-q_2-1)a_1 + 2(m-q_1)a_2$$

$$\psi_2^{22} = 2(m-q_2)a_1 + 2(m-q_1)a_2$$

$$\psi_1^{12} = 2\left(m - q_2 - \frac{1}{2}\right)a_1 + 2\left(m - q_1 - \frac{1}{2}\right)a_2$$

$$\psi_2^{12} = 0$$

(A6)

이제  $g_{r,ij}(r)$ 은 식 (A4)을 미분하여 정할 수 있다. 식 (A1)의 경로 적분(contour integrals)은  $r-\psi_k^j(a_1, a_2) > 0$ 의 조건에서는 나머지(residues)  $R_m^j$ 의 합과 같고 그렇지 않으면 0이기 때문에  $r$ 의 함수인  $g_{r,ij}$ 를 구하는 것은 미분 차수  $m$ 에 의해 제한된다. 거리  $r$ 이 클 때  $g_{r,ij}$ 의 계산은 고차 미분이 필요하게 되므로 매우 복잡해진다. 본 연구에서는 미분 차수는  $m = 4$ 까지 행해졌는데  $r < 8a_1 + 2a_2$ 에 대해서는  $g_{r,ij}$ 를 구하는 데는 충분하다. 이 거리 이상에서  $g_{r,ij}$ 는 1로 간주된다.

## 참 고 문 헌

1. A. Acrivos and E. Y. Chang, *Phys. Fluids* **29**, 3 (1986).
2. R. H. Davis and K. H. Birdsell, *AIChE J.*, **40**, 570 (1994).
3. M. K. Cheung, R. L. Powell, and M. J. McCarthy, *AIChE J.*, **42**, 271 (1996).
4. G. K. Batchelor and C. S. Wen, *J. Fluid Mech.*, **124**, 495 (1982).
5. S. Mirza and J. F. Richardson, *Chem. Eng. Sci.*, **34**, 447 (1979).
6. M. S. Selim, A. C. Kothari, and R. M. Turian, *AIChE J.*, **29**, 1029 (1983).
7. M. Hoyos, J. C. Bacri, J. Martin, and D. Salin, *Phys. Fluids*, **6**, 3809 (1994).
8. S. Koo and A. S. Sangani, *Phys. Fluids*, **14**, 3522 (2002).
9. E. M. Tory and R. A. Ford, *Int. J. Miner. Process.*, **73**, 119 (2004).
10. E. Barnea and J. Mizrahi, *Chem. Eng. J.*, **5**, 171 (1973).
11. J. F. Richardson and W. N. Zaki, *Trans. Inst. Chem. Eng.*, **32**, 35 (1954).
12. J. K. Percus and G. Y. Yevick, *Phys. Rev.*, **110**, 1 (1958).
13. J. L. Lebowitz, *Phys. Rev.*, **133**, A895 (1964).
14. C. J. Throop and R. J. Bearman, *J. Chem. Phys.*, **42**, 2838 (1965).
15. P. J. Leonard, J. D. Henderson, and J. A. Barker, *Mol. Phys.*, **21**, 107 (1973).
16. L. G. Leal, *Laminar flow and convective transport processes: Scaling principles and asymptotic analysis*, Butterworth-Heinemann, Boston (1992).
17. K. H. Song and S. Koo, *J. Ind. Eng. Chem.*, **12**, 368(2006).
18. H.-Q. Nguyen and A. J. C. Ladd, *J. Fluid Mech.*, **525**, 73 (2005).
19. A. C. Ladd, *J. Chem. Phys.*, **93**, 3484 (1990).
20. G. Mo and A. S. Sangani, *Phys. Fluids*, **6**, 1637 (1994).
21. R. Davies, *Powder Tech.*, **2**, 43 (1968).
22. R. G. Cox, *Int. J. Multiphase Flow*, **16**, 617 (1990).
23. S. P. Lin, *Chem. Eng. Comm.*, **29**, 201 (1984).