

## 2축힘을 고려한 철근콘크리트 균열단면의 장기거동 해석

## Time-dependent Analysis of Cracked Reinforced Concrete Sections with Biaxial Bending

양주경\*

Yang, Joo Kyoung

## Abstract

An analytical approach to calculate time-dependent stresses and strains in initially cracked reinforced concrete section with biaxial bending was proposed. The method utilized the aging coefficient approach of Bazant and the linear creep theory. The position of neutral axis and strain and stress distributions of cracked section after creep and shrinkage were determined from the requirements of strain compatibility and equilibrium of a section. With this proposed algorithm, examples were given for rectangular section and a comparative analysis for stress and strain was also made.

**Keywords** : cracked reinforced concrete section, biaxial bending, creep, shrinkage

## 요 지

본 연구에서는 수정유효탄성계수법에 근거하여 2축 휨과 축력을 동시에 받는 경우에 콘크리트의 크리프와 건조수축을 고려한 철근콘크리트 보의 효율적이고 합리적인 단면해석 방법을 제안하였다. 제안된 방법은 재령보정계수와 선형 크리프 이론을 이용하였으며, 응력의 분포를 평형조건으로부터 유도하였다. 제안된 방법을 사용하여 직사각형 단면에 대한 예제해석을 수행하였으며 직사각형 단면에서 변형도의 변화와 응력의 변화를 검토하였다.

**핵심용어** : 철근콘크리트 균열 단면, 2축 휨, 크리프, 건조수축

## 1. 서 론

철근콘크리트는 경제성, 내구성, 내화성 등의 장점으로 인하여 여러 종류의 구조물에 널리 활용되고 있다. 철근콘크리트는 구조용 강재와는 달리 콘크리트와 철근의 합성구조이고 사용하중에서도 균열이 발생할 수 있기 때문에 그 거동이 매우 복잡하다. 특히 콘크리트는 크리프와 건조수축 등과 같은 비탄성거동을 보이는 재료이며 이러한 콘크리트의 성질로 인하여 시간에 따른 철근콘크리트 단면의 응력 및 변형도를 예측하는 것은 더욱 복잡하고 어렵다.

최근 설계법의 발달과 고강도 재료의 사용이 증가됨에 따라 구조물의 강도뿐만 아니라 사용성의 문제가 과거에 비하여 중요하게 대두되고 있다. 콘크리트의 크리프와 건조수축은 구조물의 내하력에는 큰 영향을 주지 않으나 사용성에는 큰 영향을 줄 수 있다. 따라서 철근콘크리트 구조물의 사용성을 평가하기 위해서는 콘크리트의 크리프와 건조수축을 고려하여 사용하중상태에서의 응력 및 변형도의 분포를 파악하여야 한다.

Jevtic(1982)은 크리프율법(rate of creep method)을 사용

하여 철근콘크리트 부재에 대한 단면해석 알고리즘을 유도하였으며 Neville 등(1983)은 Bazant(1972)에 의해 수정 제안된 재령보정계수를 사용하여 단면해석 알고리즘을 제안하였다. 그러나 이 방법들은 비균열단면에만 국한되어 적용된다.

곽효경(1994)은 수정유효탄성계수법을 적용하여 균열을 고려한 단면해석방법을 제안하였으나 단면을 층상화하여 사용하였다. Pretorius(1985)는 단면을 층상화하지 않고 균열단면에서 크리프 변형을 고려한 단면해석 방법을 제안하였으나 인장철근의 응력의 변화가 없는 것으로 가정하였다. 그리고 Samra(1997)는 인장철근의 응력변화를 고려한 방법을 제안하였으나 단철근 직사각형 보에만 한정하였다. Moustafa(1986)는 건조수축에 의해 변형도의 중립축과 응력의 중립축이 일치하지 않는 것을 고려하였으나, 크리프에 의해서도 변형도의 중립축과 응력의 중립축이 일치하지 않는다는 것은 고려하지 못하였다. Rao 등(1989)은 변형도의 중립축과 응력의 중립축이 일치하지 않는다는 점을 고려하여 균열단면에 대한 해석방법을 제시하였으나 중립축의 위치를 가정해야 하고 해석 알고리즘이 매우 복잡하고 최종적으로 3차 방정식의 근을 반복계산을 통하여 구하여야 하는 단점을 가지

\*정회원 · 청운대학교 철도행정토목학과 교수 (E-mail : jkyang@chungwoon.ac.kr)

고 있다. 김진근 등(1999)은 단면을 층상화 하지 않고 변형도의 중립축과 응력의 중립축이 일치하지 않는다는 점을 고려하여 해석할 수 있는 해석적인 알고리즘을 제안하였다.

1축 휨과 축력을 동시에 받는 철근콘크리트 부재에서 콘크리트의 크리프와 건조수축을 고려하여 단면을 해석하는 방법은 CEB(1997)에서 제시하였다. 그런데 실제 대부분의 철근콘크리트 부재는 2축 휨과 축력을 동시에 받고 있다. 따라서 2축 휨과 축력을 동시에 받는 철근콘크리트 부재 단면에서 콘크리트의 크리프와 건조수축을 고려하여 해석해야 한다. 그러나 그 방법에 관한 연구가 이루어지지 않아 이에 대한 연구가 필요한 실정이다.

본 연구에서는 수정유효탄성계수법(age-adjusted effective modulus method)에 근거하여 2축 휨과 축력을 동시에 받는 경우에 콘크리트의 크리프와 건조수축의 영향을 고려한 철근콘크리트 부재의 효율적이고 합리적인 단면해석 방법을 제안하고자 한다.

## 2. 단면해석 알고리즘의 유도

본 연구에서는 그림 1(a)와 같이 축력과 2축 휨을 받는 철근콘크리트 단면에 대하여 균열이 발생하였을 때 크리프와 건조수축을 고려한 단면해석 알고리즘을 제안하고자 한다. 균열단면에서 시간이 경과함에 따라 콘크리트의 크리프와 건조수축에 의하여 응력 및 변형도는 계속적으로 변화한다. 시간에 따른 응력 및 변형도의 주요 변화는 첫째, 압축연단에서 변형도가 증가하며, 둘째 콘크리트의 최대 압축응력이 감소하는 것이다.

본 연구에서는 변형전의 평면인 단면은 변형 후에도 평면을 유지하며, 철근과 콘크리트 사이에는 완전한 부착이 이루어져 철근 위치에서 철근과 콘크리트의 변형도가 일치하는 것으로 가정하였다. 콘크리트는 점탄성 재료로 간주하고 콘크리트의 인장강도를 무시하였으며, 일반적으로 단면 내에서 건조수축량은 부등 분포를 보이지만 해석을 단순화하기 위하여 등분포로 가정하였다.

그림 1의 (b) 및 (c)는 각각 하중이 작용하는 시점  $t'$ 과 임의의 재령  $t$ 에서 변형도와 응력의 분포를 나타낸 것이다. 임의의 재령  $t$ 에서의 평형조건식은 식(1), 식(2), 식(3)과 같다.

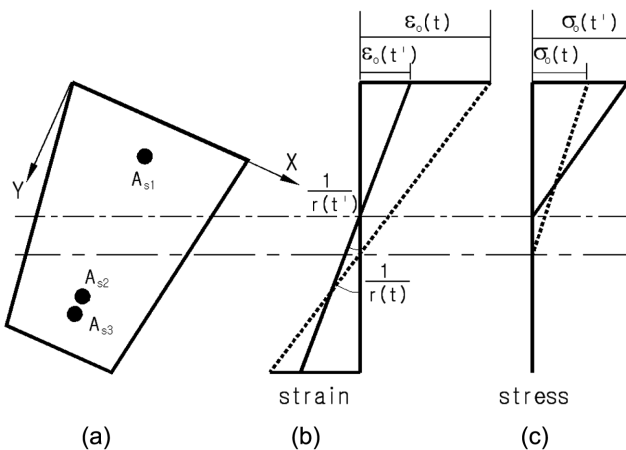


그림 1. 변형도와 응력의 변화

$$\int_A [\sigma(t) - \sigma(t')] dA = 0 \quad (1)$$

$$\int_A [\sigma(t) - \sigma(t')] x dA = 0 \quad (2)$$

$$\int_A [\sigma(t) - \sigma(t')] y dA = 0 \quad (3)$$

하중이 작용하는 시점  $t'$ 과 임의의 재령  $t$ 에서의 콘크리트의 응력은 각각 식(4)과 식(5)와 같다.

$$\sigma_c(t') = \sigma_o(t') \left( 1 - \frac{x}{x_n(t')} - \frac{y}{y_n(t')} \right) = \sigma_o(t') C_{xy}(t') \quad (4)$$

$$\sigma_c(t) = \sigma_o(t) \left( 1 - \frac{x}{x_n(t)} - \frac{y}{y_n(t)} \right) = \sigma_o(t) C_{xy}(t) \quad (5)$$

수정유효탄성계수법에 의하면 재령  $t$ 에서 콘크리트의 변형도는 식(6)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_c(t) = & \frac{\sigma_c(t')}{E_c(t')} [1 + \phi(t, t')] + \frac{\sigma_c(t) - \sigma_c(t')}{E_c(t')} \\ & \times [1 + \chi(t, t') \phi(t, t')] + \varepsilon_{sh}(t, t') \end{aligned} \quad (6)$$

식(4)와 식(5)를 식(6)에 대입하여 정리하면 재령  $t$ 에서 콘크리트의 변형도를 식(7)과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_c(t) = & \varepsilon_c(t') + \frac{\sigma_o(t')}{E_c(t')} C_{xy}(t') \phi(t, t') \\ & + \frac{1 + \chi(t, t') \phi(t, t')}{E_c(t')} \{ \sigma_o(t) C_{xy}(t) - \sigma_o(t') C_{xy}(t') \} + \varepsilon_{sh}(t, t') \end{aligned} \quad (7)$$

식(7)로부터 재령  $t$ 에서의 철근의 응력은 식(8)과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{si}(t) = & \sigma_{si}(t') + n_o \sigma_o(t') C_{sxy}(t') \phi(t, t') \\ & + n_o [1 + \chi(t, t') \phi(t, t')] \\ & \times \{ \sigma_o(t) C_{sxy}(t) - \sigma_o(t') C_{sxy}(t') \} + E_s \varepsilon_{sh}(t, t') \end{aligned} \quad (8)$$

여기서,  $C_{sxy}(t') = 1 - \frac{x_{si}}{x_n(t')} - \frac{y_{si}}{y_n(t')}$

$$C_{sxy}(t) = 1 - \frac{x_{si}}{x_n(t)} - \frac{y_{si}}{y_n(t)}$$

식(4), 식(5), 식(8)을 식(1), 식(2), 식(3)에 대입하여 정리하면 식(9)를 얻을 수 있다.

$$\sigma_o(t) \begin{bmatrix} A(t) & -Q_y(t) & -Q_x(t) \\ Q_y(t) & -I_{yy}(t) & -I_{xy}(t) \\ Q_x(t) & -I_{xy}(t) & -I_{xx}(t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{x_n(t)} \\ \frac{1}{y_n(t)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ M_x \end{Bmatrix} \quad (9)$$

여기서,

$$A(t) = \bar{A}(t) + n \sum_{i=1}^n A_{si}$$

$$Q_x(t) = \bar{Q}_x(t) + n \sum_{i=1}^n A_{si} x_{si}$$

$$Q_y(t) = \bar{Q}_y(t) + n \sum_{i=1}^n A_{si} y_{si}$$

$$I_{xx}(t) = \bar{I}_{xx}(t) + n \sum_{i=1}^n A_{si} x_{si}^2$$

$$I_{xy}(t) = \bar{I}_{xy}(t) + n \sum_{i=1}^n A_{si} x_{si} y_{si}$$

$$I_{yy}(t) = \bar{I}_{yy}(t) + n^* \sum_{i=1}^n A_{si} y_{si}^2$$

$\bar{A}(t)$  : 재령  $t$ 에서의 콘크리트 면적

$\bar{Q}_x(t)$  : 재령  $t$ 에서의 콘크리트의  $y$ 축에 대한 단면1차모멘트

$\bar{Q}_y(t)$  : 재령  $t$ 에서의 콘크리트의  $x$ 축에 대한 단면1차모멘트

$\bar{I}_{xx}(t)$  : 재령  $t$ 에서의 콘크리트의  $y$ 축에 대한 단면2차모멘트

$\bar{I}_{xy}(t)$  : 재령  $t$ 에서의 콘크리트의 단면상승모멘트

$\bar{I}_{yy}(t)$  : 재령  $t$ 에서의 콘크리트의  $x$ 축에 대한 단면2차모멘트

$$N = \sigma_o(t) \left[ A(t) - \frac{Q_x(t')}{x_n(t')} - \frac{Q_y(t')}{y_n(t')} \right] - E_s \varepsilon_{sh}(t, t') \sum_{i=1}^n A_{si}$$

$$M_x = \sigma_o(t) \left[ Q_y(t') - \frac{I_{xy}(t')}{x_n(t')} - \frac{I_{yy}(t')}{y_n(t')} \right] - E_s \varepsilon_{sh}(t, t') \sum_{i=1}^n A_{si} y_{si}$$

$$M_y = \sigma_o(t) \left[ Q_x(t') - \frac{I_{xx}(t')}{x_n(t')} - \frac{I_{xy}(t')}{y_n(t')} \right] - E_s \varepsilon_{sh}(t, t') \sum_{i=1}^n A_{si} x_{si}$$

$$A(t') = \bar{A}(t') + (n^* - n_0) \phi(t, t') \sum_{i=1}^n A_{si}$$

$$Q_x(t') = \bar{Q}_x(t') + (n^* - n_0) \phi(t, t') \sum_{i=1}^n A_{si} x_{si}$$

$$Q_y(t') = \bar{Q}_y(t') + (n^* - n_0) \phi(t, t') \sum_{i=1}^n A_{si} y_{si}$$

$$I_{xx}(t') = \bar{I}_{xx}(t') + (n^* - n_0) \phi(t, t') \sum_{i=1}^n A_{si} x_{si}^2$$

$$I_{xy}(t') = \bar{I}_{xy}(t') + (n^* - n_0) \phi(t, t') \sum_{i=1}^n A_{si} x_{si} y_{si}$$

$$I_{yy}(t') = \bar{I}_{yy}(t') + (n^* - n_0) \phi(t, t') \sum_{i=1}^n A_{si} y_{si}^2$$

$$n^* = n_0 [1 + \chi(t, t') \phi(t, t')]$$

식(9)에서  $\sigma_o(t)$ 는 식(10)과 같이 표현된다.

$$\sigma_o(t) = \frac{N}{A(t) - \frac{Q_x(t)}{x_n(t)} - \frac{Q_y(t)}{y_n(t)}} \quad (10)$$

식(10)을 식(9)에 대입하여 정리하면 식(11)을 얻을 수 있다.

$$\left[ \begin{array}{cc} M_y Q_x(t) - N I_{xx}(t) & M_y Q_y(t) - N I_{xy}(t) \\ M_x Q_x(t) - N I_{xy}(t) & M_x Q_y(t) - N I_{yy}(t) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{x_n(t)} \\ \frac{1}{y_n(t)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} M_y A(t) - N Q_x(t) \\ M_x A(t) - N Q_y(t) \end{array} \right\} \quad (11)$$

### 3. 단면 성질 계산

본 연구에서 사용되는 단면의 성질을 계산하기 위해서 임의의 모양에서도 간단하게 계산할 수 있는 Marin(1980)의 방법을 사용하였다. 사용된 방법을 사용할 때는 그림 2에서와 같이 절점 번호는 단면의 바깥 면에서는 반시계 방향으로

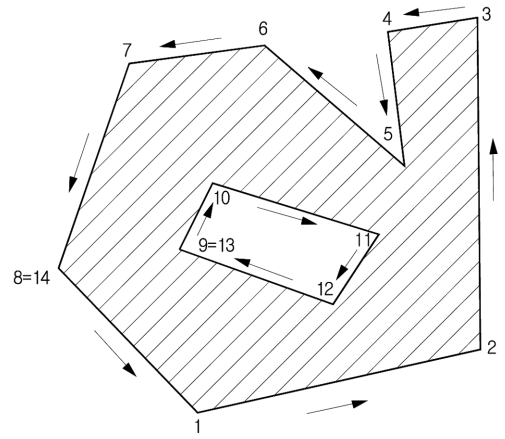


그림 1. 단면 성질 계산 방법

로, 안쪽이 비어 있는 중공 단면의 안쪽 면에서는 시계 방향으로 순서가 주어질 수 있도록 하여야 한다. 계산 방법은 다음과 같다.

$$w_i = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i \quad (12)$$

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i \quad (13)$$

$$Q_x = \int_A x dA = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n w_i (x_i + x_{i+1}) \quad (14)$$

$$Q_y = \int_A y dA = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n w_i (y_i + y_{i+1}) \quad (15)$$

$$I_{xx} = \int_A x^2 dA = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n w_i [(x_i + x_{i+1})^2 - x_i x_{i+1}] \quad (16)$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^n w_i [(x_i + x_{i+1})(y_i + y_{i+1}) + x_i y_i + x_{i+1} y_{i+1}] \quad (17)$$

$$I_{yy} = \int_A y^2 dA = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n w_i [(y_i + y_{i+1})^2 - y_i y_{i+1}] \quad (18)$$

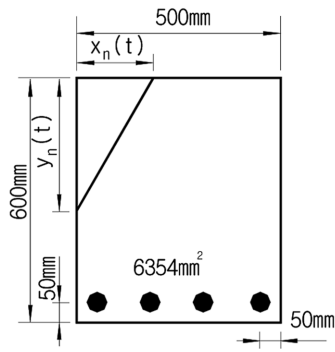
### 4. 해석과정

임의의 시간  $t$ 에서의 균열 및 크리프와 건조수축을 고려한 단면해석 과정은 다음과 같다.

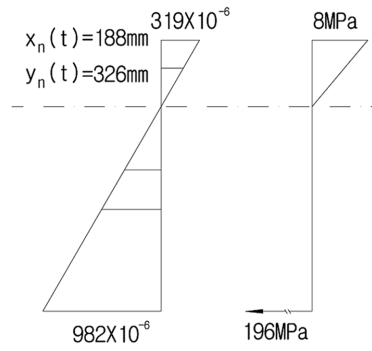
- 1)  $x_n(t)$ 를  $x_n(t')$ 으로,  $y_n(t)$ 를  $y_n(t')$ 으로 가정
- 2)  $N$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  계산
- 3)  $A(t)$ ,  $Q_x(t)$ ,  $Q_y(t)$ ,  $I_{xx}(t)$ ,  $I_{xy}(t)$ ,  $I_{yy}(t)$ 를 계산
- 4)  $x_n(t)$ ,  $y_n(t)$ 를 계산
- 5)  $x_n^i(t)$ ,  $y_n^i(t)$ 와  $x_n^{i-1}(t)$ ,  $y_n^{i-1}(t)$ 와 비교하여 다음의 값이 허용범위 내에 있으면 단계6)으로 가고, 허용범위 내에 있지 않으면 단계1)로 가서 다시 계산

$$\sqrt{[x_n^i(t) - x_n^{i-1}(t)]^2 + [y_n^i(t) - y_n^{i-1}(t)]^2}$$

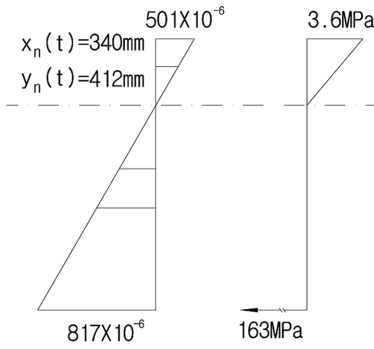
- 6) 식(10)으로부터  $\sigma_o(t)$  계산
- 7) 식(5)로부터 콘크리트 응력  $\sigma_c(t)$  계산



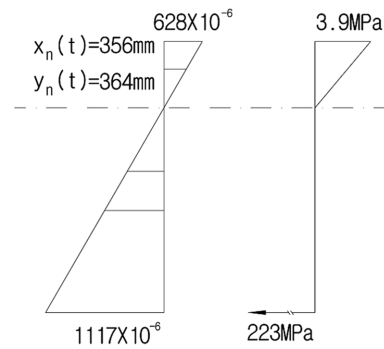
(a) cross section



(b) at  $t'$

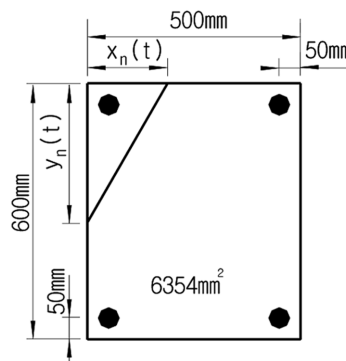


(c) at  $t$ , creep only

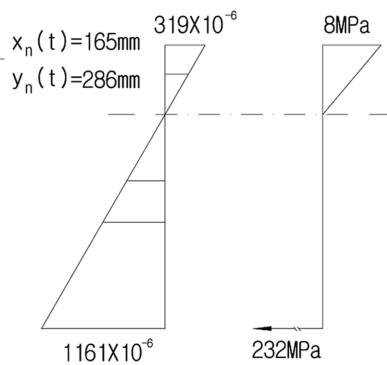


(d) at  $t$ , creep and shrinkage

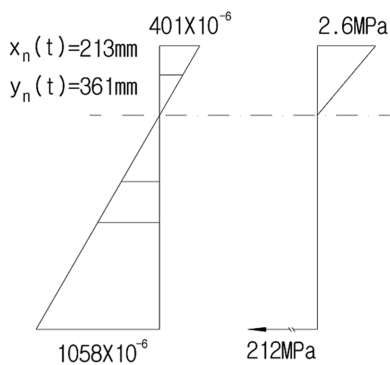
그림 3. 단철근 보에서의 변형도와 응력의 변화



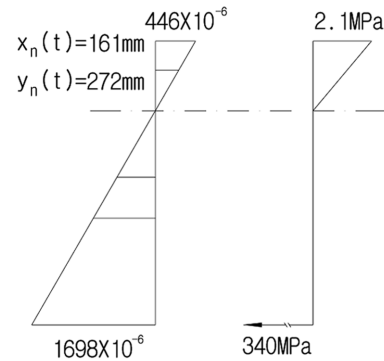
(a) cross section



(b) at  $t'$



(c) at  $t$ , creep only



(d) at  $t$ , creep and shrinkage

그림 4. 복철근 보에서의 변형도와 응력의 변화

- 8) 식(7)로부터 콘크리트 변형도  $\epsilon_c(t)$  계산
- 9) 식(8)로부터 철근 응력  $\sigma_{st}(t)$  계산

## 5. 예제해석

그림 3과 그림 4는 각각 단철근 직사각형 보와 복철근 직사각형 보에 대하여 크리프와 건조수축을 고려한 해석결과이다. 콘크리트의 압축강도는 28 MPa이고 크리프계수와 건조수축량은 각각 2.0과  $100 \times 10^{-6}$ 으로 가정하였다. 또한 재령계수  $\lambda$ 는 0.8로 가정하였다.

그림 3(b)와 그림 4(b)는 하중이 가해진 직후의 변형도 및 응력의 분포를 나타낸 것이다. 그림 3(c)와 그림 4(c)는 크리프만을 고려한 경우에 재령  $t$ 에서의 결과이다. 두 경우 모두 중립축의 위치가 인장 측으로 이동하였으며 회전하였음을 알 수 있다. 압축연단에서 콘크리트 응력의 변화는 복철근 보에서 더 크게 발생하였다. 이는 복철근 보의 경우에는 콘크리트 응력이 압축철근으로 재분배되었기 때문이다. 그리고 인장철근의 응력변화는 단철근 보가 복철근 보에 비하여 크게 발생하였다. 이는 단철근 보의 경우가 복철근 보의 경우에 비하여 중립축이 인장철근 쪽으로 더 많이 이동하였기 때문이다.

그림 3(d)와 그림 4(d)는 크리프와 건조수축을 모두 고려한 경우의 해석결과이다. 압축연단에서 콘크리트 응력의 변화는 복철근 보에서 더 크게 발생하였다. 단철근 보에서의 콘크리트 응력 감소는 크리프만을 고려한 경우에 비하여 작게 발생하였으나 복철근 보에서는 콘크리트 응력이 크리프만을 고려한 경우에 비하여 많이 감소하여 압축응력을 압축철근이 상당히 부담하고 있음을 알 수 있다.

## 6. 결 론

1. 수정유효탄성계수법에 근거하여 2축 휨과 축력을 동시에 받는 경우에 콘크리트의 크리프와 건조수축의 영향을 고려한 철근콘크리트 부재의 합리적인 단면해석 알고리즘을 유도하여 제안하였다.
2. 균열단면에서 크리프와 건조수축에 의해 압축연단에서 변형도가 증가하고 콘크리트의 압축응력이 감소하였다.
3. 단철근 보와 복철근 보에서 크리프만의 영향에 의해 모두 중립축의 위치가 인장 측으로 이동하였으며 회전하였다. 복철근 보의 경우에는 콘크리트 응력이 압축철근으로 재분배되기 때문에 압축연단에서 콘크리트 응력의 변화가 복철근 보에서 더 크게 발생하였다. 그리고 단철근 보의 경우에는 복철근 보의 경우에 비하여 중립축이 인장철근 쪽으로 더 많이 이동하기 때문에 인장철근의 응력변화는 단철근 보에서 복철근 보에 비하여 크게 발생

하였다.

4. 크리프와 건조수축을 모두 고려한 경우에는 압축연단에서 콘크리트 응력의 변화는 단철근 보에서 보다 복철근 보에서 더 크게 발생하였다. 단철근 보에서의 콘크리트 응력 감소는 크리프만을 고려한 경우에 비하여 작게 발생하였으나 복철근 보에서는 콘크리트 응력이 크리프만을 고려한 경우에 비하여 많이 감소하여 압축응력을 압축철근이 상당히 부담하고 있음을 알 수 있었다.

## 감사의 글

본 연구는 청운대학교 교내연구비 지원으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

## 참고문헌

- 곽효경(1994) 철근 콘크리트와 프리스트레스트 콘크리트 보의 시간 의존적 거동해석, **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제14권, 제1호, pp. 1-12.
- 김진근, 이상순, 양주경(1999) 철근콘크리트 균열단면의 장기거동해석, **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제19권, 제-2호, pp. 185-194.
- Bazant, Z.P. (1972) Prediction of concrete creep effects using age adjusted effective modulus methods, *ACI Journal*, Proceedings, Vol. 69, No. 4, pp. 212-217.
- CEB Task Group 2.4 (1997) Behavior and modeling in serviceability limit states including repeated and sustained loads, *Progress report*, 264p.
- Jevtic, D. (1982) Algebraic equations for determination of loss of stress in prestressed structures and diagrams for evaluation, *Designing for creep and shrinkage in concrete structures*, ACI SP-76, Detroit, pp. 463-481.
- Marin, J. (1980) Computing unidimensional normal stress resultants, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 106, No. 1, pp. 233-245.
- Moustafa, S.E. (1986) Non-linear analysis of reinforced and prestressed concrete members, *PCI Journal*, Vol. 31, No. 5, pp. 126-147.
- Neville, A.M., Dilger, W.H., and Brooks, J.J. (1983) *Creep of plain and structural concrete*, Construction Press, England, pp. 264-303.
- Pretorius, P.C. (1985) Deflections of reinforced concrete members : A simple approach, *ACI Journal*, Vol. 82, No. 6, Nov.-DEC., pp. 805-812.
- Rasada Rao, A.S. and Jayaraman, R. (1989) Creep and shrinkage analysis of partially prestressed concrete members, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 115, No. 5, pp.1169-1189.
- Samra, R.M. (1997) Renewed assessment of creep and shrinkage effects in reinforced concrete beams, *ACI Structural Journal*, Vol. 94, No. 6, Nov.-DEC., pp. 745-751.

(접수일: 2008.2.11/심사일: 2008.2.15/심사완료일: 2008.2.15)