

순환 관계에 의한 파랑분산식의 양해

Explicit Solution of Wave Dispersion Equation Using Recursive Relation

이창훈* · 장호철**

Lee, Changhoon · Jang, Hochul

Abstract

Explicit solutions of the wave dispersion equation are developed using the recursive relation in terms of the relative water depth. We use the solutions of Eckart (1951), Hunt (1979), and the deep-water and shallow-water solutions for initial values of the solution. All the recursive solutions converge to the exact one except that with the initial value of deep-water solution. The solution with the initial value by Hunt converged much faster than the others. The recursive solutions may be obtained quickly and simply by a hand calculator. For the transformation of linear water waves in whole water depth, the use of the recursive solutions will yield more accurate analytical solutions than use of previously developed explicit solutions.

Keywords : linear wave theory; dispersion equation; explicit solution; recursive relations

요 지

파랑의 분산관계식에서 상대수심이 반복적으로 표현되는 순환 관계를 이용하여 파랑분산식의 양해를 개발하였다. 순환 관계를 이용한 해의 초기값으로 Eckart(1951), Hunt(1979)의 해와 심해와 천해에서의 해를 사용했다. 순환해 가운데 심해에서의 해를 초기값으로 사용한 해를 제외하고는 모두 참값으로 수렴하였다. 특히, Hunt의 해를 초기값으로 사용한 해는 다른 해보다 더 빠르게 수렴했다. 순환해는 휴대용 계산기를 사용하여 손 쉽고 빠르게 구할 수 있는 장점이 있다. 선형파의 변형을 예측하기 위하여 해석 해를 사용할 경우 파랑분산식의 양해를 사용해야 하는 데 본 연구에서 개발한 순환해를 사용하면 기존의 양해를 사용한 것보다 더 정확한 해석 해를 도출할 것이다.

핵심용어 : 선형파 이론, 파랑분산식, 양해, 순환해

1. 서 론

수면과 가운데 진행파 성분의 파수는 수심과 각속도가 주어졌을 때 다음과 같은 선형파 분산식을 사용하여 구할 수 있다.

$$\omega^2 = gh \tanh(kh) \quad (1)$$

파수는 수심과 각속도를 독립변수로 한 음함수(implicit function)이다. 분산식을 사용하여 파수를 구하기 위하여 대개 분산관계식의 양해(explicit solution)를 초기값으로 하여 Newton-Raphson 방법을 사용한다. 분산식의 양해 가운데 Eckart(1951)의 해는 다음과 같다.

$$kh = v\sqrt{\coth(v)} \quad (2)$$

여기에서 $v = \omega^2 h/g$ 는 심해에서의 상대수심이다. 또한, Hunt(1979)의 해는 다음과 같다.

$$kh = \sqrt{v^2 + \frac{v}{P(v)}} \quad (3)$$

여기에서 $P(v)$ 는 다항식으로 다음과 같이 주어진다.

$$P(v) = 1 + \sum_{j=1}^6 D_j v^j \quad (4)$$

여기에서, $D_1=0.6666666666$, $D_2=0.3555555555$, $D_3=0.1608465608$, $D_4=0.0632098765$, $D_5=0.0217540484$, $D_6=0.0065407983$ 이다. 그 외에도 여러 개의 다른 양해도 있다. 최근 You(2003)는 여러 개의 파랑분산식의 양해(Hunt, 1979; Nielsen, 1982; Fenton과 McKee, 1990; Guo, 2002; Nielsen, 2002; You, 2003)을 비교하였다. 그는 Hunt의 해가 $v \leq \pi$ 의 수심범위에서 가장 정확하다는 것을 밝혀 내었다. 그러나 Hunt의 해는 여전히 최대 0.19%의 오차가 있다. 백분율 오차는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{percent error} = \frac{k_a - k_e}{k_e} \times 100\% \quad (5)$$

여기서 아래첨자 a 와 e 는 각각 파수의 근사해(approximate solution)와 정확해(exact solution)를 의미한다.

컴퓨터의 개발 이후로 수 많은 연구자들은 수학적인 지배

*정회원 · 교신저자 · 세종대학교 토목환경공학과 부교수 (E-mail : cleee@sejong.ac.kr)

**정회원 · 세종대학교 토목환경공학과 석사과정 (E-mail : text-jang@hanmail.net)

방정식을 풀기 위해 유한차분법, 유한요소법, 또는 다른 여러 방법을 사용하여 수치실험을 수행하였다. 그러나 수치실험에 의한 해는 경계조건이 적절하게 적용되지 않을 때 오차가 발생한다. 또한 수치해석 시 격자간격이 충분히 크지 못하면 오차가 축적되는 문제점이 있다. 반면 해석 해는 경계조건의 영향을 받지 않고 격자간격에 따른 오차도 발생하지 않아 정확한 값을 제시해 준다. 따라서, 해석 해는 수리 모형실험 결과와 대등하게 수치 해를 증명하는데 사용된다. 대부분의 해석 해는 컴퓨터가 널리 쓰이기 전에 개발되었다. 컴퓨터의 개발 이후에도 새로운 파랑방정식이 개발되고 있기 때문에 해석 해는 현재까지도 새로이 개발되고 있다. 파랑방정식 가운데 환경사 방정식은 Berkhoff(1972)가 타원형 형태로, Smith and Sprinks(1975)가 쌍곡선 형태로, Radder (1979)가 포물선 형태로 개발하였었다. 최근에는 고차의 중심 변화 효과가 고려된 소위 확장형 또는 수정 환경사 방정식이 개발되었었다(Massel, 1993; Chamberlain과 Porter, 1995; Suh 등, 1997; Lee 등, 1998; Lee 등, 2003).

파랑변형의 해석 해를 구하기 위해서는 음해가 아닌 양해 형태의 파랑분산식의 해를 사용해야 한다. 그런데, 천해에서만 파수가 $k = \omega / \sqrt{gh}$ 로 정확하게 표현할 수 있기 때문에 지금까지 개발된 거의 대부분의 해석 해는 천해의 경우에만 적용되는 것이었다(Homma, 1950; Zhang과 Zhu, 1994; Zhu와 Zhang, 1996). 그러나, 최근 Liu 등(2004)은 천해 뿐만 아니라 심해에도 적용 가능한 환경사 방정식의 해석 해를 개발하였다. 그러나 그들의 해석해는 파수의 최대 오차가 0.19%까지 발생하는 Hunt의 파랑분산식을 사용하였기 때문에 중간 수심에서 오차가 눈에 띄는 정도로 크게 발생한다. 환경사 방정식의 해석해가 Liu 등의 것보다 더 정확하기 위해서는 Hunt의 해보다 더 정확한 파랑분산식의 양해가 필요하다.

최근 Svendsen(2006)은 kh 가 반복적으로 표현되는 관계식을 사용하여 심해에서의 상대수심 $v = \omega^2 h / g$ 를 초기값으로 하여 순환해를 구할 것을 제안하였다. 그리고, 모든 수심에서 순환해가 빠르게 수렴한다고 주장하였다. 본 연구에서는 kh 의 순환 관계를 사용하여 현존하는 파랑분산식의 양해보다 더 정확한 분산 방정식의 양해를 개발하였다. 제2절에서 흐름이 없는 파랑의 경우 파랑 분산 방정식의 해를 개발하였고, Svendsen의 주장을 포함하여 이 해들의 정확성을 논하였다. 그리고, 제3절에서는 결론을 내렸다.

2. 파수의 순환해

파랑분산식 (1)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$kh = v \coth(kh) \quad (6)$$

위 식은 상대수심 kh 가 반복적으로 표현되는 순환 관계가 있는데 초기값이 주어지면 다음과 같이 해를 반복하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} kh &= f_1(v) = v \coth(f_0(v)) \\ kh &= f_2(v) = v \coth(f_1(v)) = v \coth(v \coth(f_0(v))) \\ &\vdots \\ kh &= f_n(v) = v \coth(f_{n-1}(v)) = v \coth(v \coth(v \coth(\dots(v \coth(f_0(v)))))) \end{aligned} \quad (7)$$

kh 의 초기값으로 다음과 같은 양해를 사용하였다.

$$\begin{aligned} kh &= f_0(v) = v \sqrt{\coth(v)}, & \text{Eckart's(1951) solution} \\ &= \sqrt{v^2 + \frac{v}{P(v)}}, & \text{Hunt's (1979) solution} \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)의 초기값에서의 순환해가 심해와 천해 두 경우 다 정확해로 수렴하는지 확인하였다. 심해에서 v 가 큰 경우 Eckart의 해와 Hunt의 해를 초기값으로 사용한 순환해는 각각 다음과 같이 수렴하였다.

$$kh = f_n(v) = v \coth(v \coth(v \coth(\dots(v \coth(v \sqrt{\coth(v)})))) = v \quad (9)$$

$$kh = f_n(v) = v \coth(v \coth(v \coth(\dots(v \coth(\sqrt{v^2 + \frac{v}{P(v)}})))) = v \quad (10)$$

천해에서 v 가 0에 가까운 경우 Eckart의 해와 Hunt의 해를 초기값으로 사용한 순환해는 각각 다음과 같이 수렴하였다.

$$kh = f_n(v) = v \coth(v \coth(v \coth(\dots(v \coth(v \sqrt{\coth(v)})))) = \sqrt{v} \quad (11)$$

$$kh = f_n(v) = v \coth(v \coth(v \coth(\dots(v \coth(\sqrt{v^2 + \frac{v}{P(v)}})))) = \sqrt{v} \quad (12)$$

따라서, Eckart의 해와 Hunt의 해를 초기값으로 사용한 순환해는 모두 다 천해와 심해에서 정확해로 수렴한다.

그림 1에 Eckart 해를 초기값으로 사용한 파수의 순환해에 대한 백분율 오차를 도시하였다. 초기 해의 오차는 최대 2.98% 발생하였다. 그리고 첫 번째, 두 번째, 세 번째 순환해의 경우 오차 범위가 각각 3.43%, 2.43%, 1.97%로 감소하였다.

그림 2에 Hunt의 해를 초기값을 사용한 파수의 순환해에 대한 백분율 오차를 도시하였다. 초기 해의 오차는 최대 0.186% 발생하였다. 그리고 첫 번째, 두 번째, 세 번째 순환해의 경우 오차 범위가 각각 0.022%, 0.005%, 0.002%까지 감소하였다. Hunt의 해를 초기값으로 사용한 순환해는 Eckart의 해를 초기값으로 사용한 순환해보다 더 빠르게 수렴하였다.

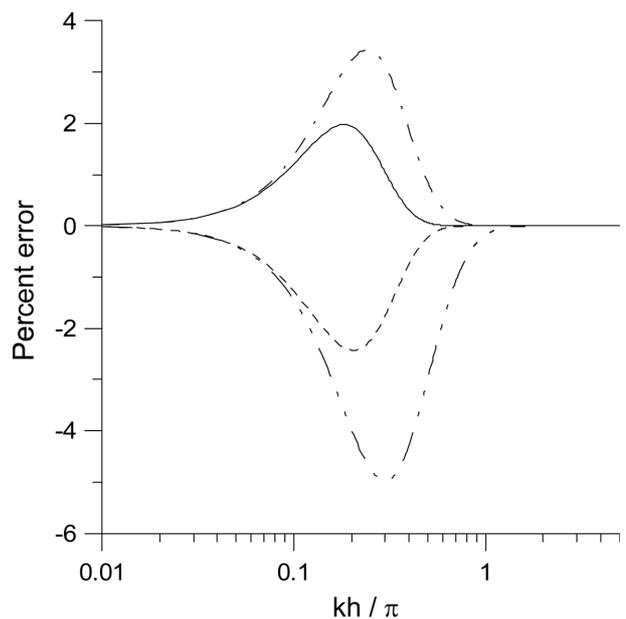


그림 1. Eckart(1951)의 해를 초기값으로 하여 구한 파수의 순환해에 대한 백분율 오차; 이점쇄선=초기 해, 일점쇄선=첫 번째 순환해, 파선=두 번째 순환해, 실선=세 번째 순환해

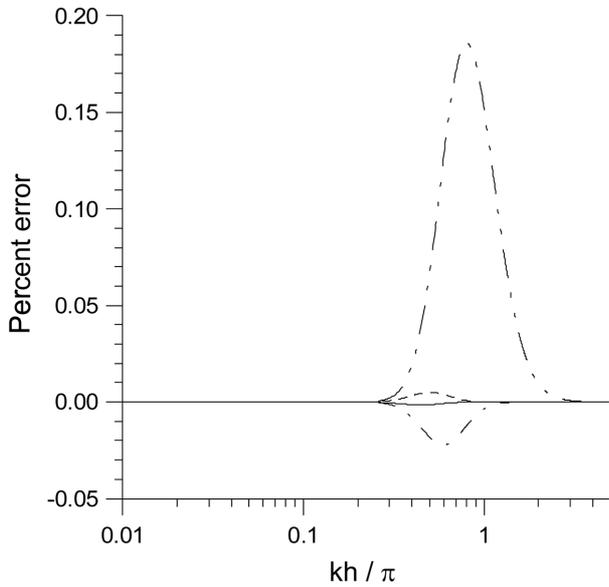


그림 2. Hunt(1979)의 해를 초기값으로 하여 구한 파수의 순환해에 대한 백분율 오차; 이점쇄선=초기 해, 일점쇄선=첫 번째 순환해, 파선=두 번째 순환해, 실선=세 번째 순환해

또한, 순환해의 초기값으로 다음과 같이 심해와 천해에서의 상대수심을 사용하였다.

$$\begin{aligned} kh = f_0(\nu) &= \nu, & \text{deep water solution} \\ &= \sqrt{\nu}, & \text{shallow water solution} \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)의 초기값을 사용한 순환해가 심해와 천해에서 정확하게 수렴하는지 확인하였다. 심해에서 ν 가 큰 경우 심해와 천해의 해를 초기값으로 사용한 순환해는 각각 다음과 같다.

$$kh = f_n(\nu) = \nu \coth(\nu \coth(\nu \coth(\dots(\nu \coth(\nu)))))) = \nu \quad (14)$$

$$kh = f_n(\nu) = \nu \coth(\nu \coth(\nu \coth(\dots(\nu \coth(\sqrt{\nu})))))) = \nu \quad (15)$$

ν 가 천해에서 0에 접근한 경우 심해의 해를 초기값으로 사용한 순환해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} kh = f_n(\nu) &= \nu \coth(\nu \coth(\nu \coth(\dots(\nu \coth(\nu)))))) \\ &= \tanh_{i-1}(1), & \text{for } n = 2i - 1 \\ &= \nu \coth(\tanh_{i-1}(1)), & \text{for } n = 2i \end{aligned} \quad (16)$$

여기에서 \tanh 에 있는 아래첨자 i 는 i 번째 반복 횟수를 의미하고 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \tanh_0(1) &= 1 \\ \tanh_1(1) &= \tanh(1) \\ \tanh_2(1) &= \tanh(\tanh(1)) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (17)$$

그리고, ν 가 천해에서 0에 접근한 경우 천해의 해를 초기값으로 사용한 순환해는 다음과 같다.

$$kh = f_n(\nu) = \nu \coth(\nu \coth(\nu \coth(\dots(\nu \coth(\sqrt{\nu})))))) = \sqrt{\nu} \quad (18)$$

따라서, 심해에서 해를 초기값으로 사용한 순환해는 심해에서 정확하게 수렴하지만 천해에서는 수렴하지 않았다. 이는 순환해가 모든 수심에서 수렴한다는 Svendsen(2006)의 주장과 다르다. 반면 천해에서의 해를 초기값으로 사용한 순환해

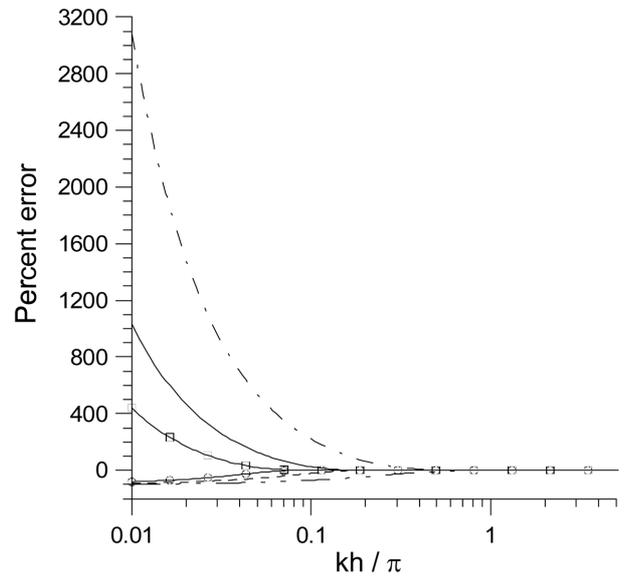


그림 3. 심해에서의 해를 초기값으로 하여 구한 파수의 순환해에 대한 백분율 오차; 이점쇄선=초기 해, 일점쇄선=첫 번째 순환해, 파선=20번째 순환해, 실선=21번째 순환해, 실선과 원=100번째 순환해, 실선과 사각형=101번째 순환해

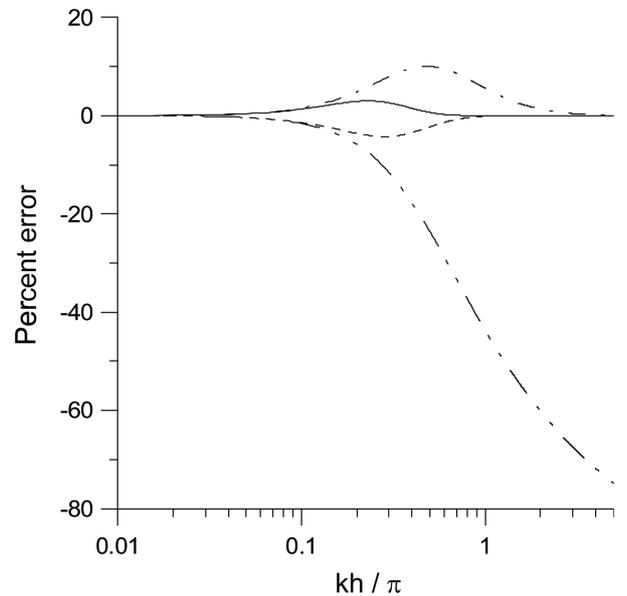


그림 4. 천해에서의 해를 초기값으로 하여 구한 파수의 순환해에 대한 백분율 오차; 이점쇄선=초기 해, 일점쇄선=첫 번째 순환해, 파선=두 번째 순환해, 실선=세 번째 순환해

는 심해와 천해에서 정확하게 수렴하였다.

그림 3에 심해의 해를 초기값으로 사용한 파수의 순환해에 대한 백분율 오차를 도시하였다. 심해에서는 심해의 해를 초기값으로 사용하였기 때문에 정확해와 똑같다. 그러나 식 (16)에서 예상되듯이 천해에서는 순환해가 홀수 번째의 경우 매우 느리게 수렴하고 심지어는 짝수 번째 경우 발산하였다.

그림 4에 천해의 해를 초기값으로 사용한 파수의 순환해에 대한 백분율 오차를 도시하였다. 첫 번째, 두 번째, 세 번째 순환해의 오차 범위는 각각 10.02%, 4.24%, 3.01%로 감소하였다.

3. 결 론

상대수심이 반복적으로 나타나는 순환관계를 이용하여 파

랑분산식의 양해를 개발하였다. Eckart(1951)의 해, Hunt (1979)의 해, 심해에서의 해, 천해에서의 해를 초기 값으로 사용하였다. 심해에서의 해를 초기값으로 사용한 순환해는 천해에서 발산하였다. 그러나 다른 해는 정확해로 수렴하였다. Hunt의 해를 초기값으로 사용한 해가 다른 해에 비해서 가장 빠르게 수렴하기 때문에 이 해를 사용할 것을 추천한다. 순환해는 휴대용 계산기를 사용하여 손 쉽고 빠르게 구할 수 있는 장점이 있다. 선형파의 변형을 예측하기 위하여 해석 해를 사용할 경우 파랑분산식의 양해를 사용해야 하는데 본 연구에서 개발한 순환해를 사용하면 기존의 양해를 사용한 것보다 더 정확한 해석 해를 도출할 것이다.

감사의 글

본 논문은 중소기업청의 “산학연 공동기술개발 컨소시엄사업(공동연구: (주)세광종합기술단)”의 지원을 받았다.

참고문헌

Berkhoff, J.C.W. (1972) Computation of combined refraction-diffraction, *Proc. 13th Coastal Engineering Conference*, ASCE, pp. 471-490.

Chamberlain, P.G. and Porter, D. (1995) The modified mild-slope equation, *J. Fluid Mechanics*, Vol. 291, pp. 393-407.

Eckart, C. (1951) Surface waves on water of variable depth, *Scripps Institute of Oceanography*, University of California, La Jolla.

Fenton, J. and McKee, W.D. (1990) On the calculating lengths of water waves, *Coastal Engineering*, Vol. 14, pp. 499-513.

Guo, J. (2002) Simple and explicit solution of wave dispersion equation, *Coastal Engineering*, Vol. 45, pp. 71-74.

Homma, S. (1950) On the behaviour of seismic sea waves around circular island, *Geophys. Mag.*, Vol. 21, pp. 199-208.

Hunt, J.N. (1979) Direct solution of wave dispersion equation, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, Vol. 105, pp.

457-459.

Lee, C., Kim, G., and Suh, K.D. (2003) Extended mild-slope equation for random waves, *Coastal Engineering*, Vol. 48, pp. 277-287.

Lee, C., Park, W.S., Cho, Y.-S., and Suh, K.D. (1998) Hyperbolic mild-slope equations extended to account for rapidly varying topography, *Coastal Engineering*, Vol. 34, pp. 243-257.

Liu, H.-W., Lin, P., and Shankar, N.J. (2004) An analytical solution of the mild-slope equation for waves around a circular island on a paraboloidal shoal, *Coastal Engineering*, Vol. 51, pp. 421-437.

Massel, S.R. (1993) Extended refraction-diffraction equation for surface waves, *Coastal Engineering*, Vol. 19, pp. 97-126.

Nielsen, P. (1982) Explicit formulae for practical wave calculations, *Coastal Engineering*, Vol. 6, pp. 389-398.

Nielsen, P. (2002) *Teaching Notes on Coastal and Estuarine Processes*, Department of Civil Engineering, University of Queensland, Australia.

Radder, A.C. (1979) On the parabolic equation method for water-wave propagation, *J. Fluid Mechanics*, Vol. 95, pp. 159-176.

Smith, R. and Sprinks, T. (1975) Scattering of surface waves by a conical island, *J. Fluid Mechanics*, Vol. 72, pp. 373-384.

Suh, K.D., Lee, C., and Park, W.S. (1997) Time-dependent equations for wave propagation on rapidly varying topography, *Coastal Engineering*, Vol. 32, pp. 91-117.

Svendsen, I.A. (2006) *Introduction to Nearshore Hydrodynamics*, World Scientific.

You, Z.-J. (2003) Discussion of “Simple and explicit solution to the wave dispersion equation” [*Coastal Engineering* 45 (2002) 71-74], *Coastal Engineering*, Vol. 48, pp. 133-135.

Zhang, Y.L. and Zhu, S.-P. (1994) New solutions for the propagation of long water waves over variable depth, *J. Fluid Mechanics*, Vol. 278, pp. 391-406.

Zhu, S.-P. and Zhang, Y.L. (1996) Scattering of long waves around a circular island mounted on a conical shoal, *Wave Motion*, Vol. 23, pp. 353-362.

(접수일: 2007.8.29/심사일: 2007.10.10/심사완료일: 2007.11.13)