

# 아스팔트 콘크리트 포장의 선형 점탄성 유한요소해석

## ViscoElastic Continuum Damage (VECD) Finite Element (FE) Analysis on Asphalt Pavements

서영국\* · 백철민\*\* · 김영수\*\*\* · 임정혁\*\*\*\*

Seo, Youngguk · Bak, Chul-Min · Kim, Y. Richard · Im, Jeong-Hyuk

### Abstract

This paper deals with the development of ViscoElastic Continuum Damage Finite Element Program (VECD-FEP++) and its verification with the results from both field and laboratory accelerated pavement tests. Damage characteristics of asphalt concrete mixture have been defined by Schapery's work potential theory, and uniaxial constant crosshead rate tests were carried out to be used for damage model implementation. VECD-FEP++ predictions were compared with strain responses (longitudinal and transverse strains) under moving wheel loads running at different constant speeds. To this end, an asphalt pavement section (A5) of Korea Expressway Corporation Test Road (KECTR) instrumented with strain gauges were loaded with a dump truck. Also, a series of accelerated pavement fatigue tests have been conducted at pavement sections surfaced with four asphalt concrete mixtures (Dense-graded, SBS, Terpolymer, CR-TB). Planar strain responses were in good agreement with field measurements at base layers, whereas strains at both surface and intermediate layers were found different from simulation results due to the complexity of tire-road contact pressures. Finally, fatigue characteristics of four asphalt mixtures were reasonably described with VECD-FEP++.

Keywords : viscoelastic, asphalt, strain, test road, accelerated pavement test

### 요 지

이동하중에 의한 아스팔트 포장의 변형률과 피로수명을 예측할 수 있는 유한요소해석 프로그램을 개발하고 그 성능을 현장 및 가속시험의 계측결과로 검증하였다. 본 논문에서는 아스팔트 혼합물의 점탄성 연속체 손상(ViscoElastic Continuum Damage, VECD)모형을 유한요소해석 프로그램인 VECD-FEP++(Finite Element Program in C++)로 구현하는 과정을 다루고 있다. 아스팔트 혼합물의 피로손상은 열역학 이론에 근거한 Schapery의 일 포텐셜 이론(work potential theory)과 일 축 단일 변형률 인장 시험으로 정의하고 이를 VECD 모형의 입력변수로 사용하였다. 실제 포장의 동적 변형률을 예측하기 위하여 한국도로공사 시험도로에서 이동하중 시험을 실시하고 그 결과를 비교하였다. 또한 4가지 서로 다른 아스팔트 혼합물(일반밀입도, SBS, Terpolymer, CR-TB)을 사용한 포장가속시험을 실시하고 각각의 피로 특성을 유한요소해석으로 예측하였다. 아스팔트 기층상부와 기층하부에서의 횡방향 변형률은 계측과 수치해석결과가 잘 일치하였다. 반면에, 표층과 중간층에서의 응답은 차량접지하중의 복잡한 영향으로 인하여 이를 반영할 수 없는 현재의 유한요소해석모델의 예측결과와는 다소 차이가 있었다. 포장가속시험결과 SBS 혼합물의 피로저항능력이 가장 우수한 것으로 평가 되었으나 VECD-FEP++에 의한 수명은 이와는 다르게 Terpolymer가 가장 우수한 것으로 예측되었다.

핵심용어 : 점탄성, 아스팔트, 변형률, 시험도로, 포장가속시험

### 1. 서 론

아스팔트 콘크리트 포장(이하 아스팔트 포장)은 각 층을 구성하는 재료와 교통 및 기후와 같은 외부환경에 따라 복잡한 응답 특성을 보인다. 일반적으로 아스팔트 포장의 공용층 성능은 주로 균열이나 소성변형과 같은 손상과 밀접한 관련이 있으며 각각의 손상은 아스팔트 혼합물의 재료적 성

질인 점탄성(viscoelasticity)에 많은 영향을 받는다. 아스팔트 혼합물 및 아스팔트 포장의 모형 개발 및 검증을 위한 연구는 주로 소규모 실내실험, 구조해석 그리고 가속시험과 시험 도로를 이용한 대규모 현장시험을 중심으로 수행되어 왔다. 최근 들어 실내시험과 구조해석이 갖는 근본적인 한계(환경 모사, 차량하중 재하, 등)에 대한 인식이 보편화되면서 포장 가속시험과 시험도로를 활용한 연구의 중요성이 크게 부각

\*정회원 · 교신저자 · 한국도로공사 도로교통연구원 도로연구팀 책임연구원 · 공학박사 (E-mail : seoyg89@hotmail.com)

\*\*정회원 · North Carolina State University, USA 박사과정

\*\*\*North Carolina State University, USA 도록환경공학과 교수 · 공학박사 (E-mail : kim@ncsu.edu)

\*\*\*\*한국도로공사 도로교통연구원 연구원

되고 있다. 한국도로공사 시험도로는 국내유일의 실규모 도로시험 시설로 1997년부터 지금까지 고속도로 포장의 설계 및 시공과 더불어 응답 및 공용성 분석에 이르기 까지 폭 넓은 연구가 진행되어 왔다.

본 논문의 전반부에서는 아스팔트 혼합물의 점탄성 손상 모형(Lee et al., 1998)의 개발과 이를 유한요소해석으로 구현하는 과정을 소개하고 있다. 그리고 후반부에서는 시험도로에서 측정한 변형률에 대하여 해석모형을 검증하고 검증된 모형으로 포장가속시험에 의한 아스팔트 혼합물의 피로 수명을 예측하였다. 점탄성 손상 모형은 Schapery(Schapery 1981, 1984, 1990)의 점탄성 연속체 손상 이론(Viscoelastic Continuum Damage, VECD)에 기반을 두고 있으며 거동 초기에 손상이 발생하지 않은 상태에서는 모든 재료를 등방성으로 가정하였다.

## 2. 아스팔트 혼합물의 점탄성 손상 모형

### 2.1 구성방정식

아스팔트 혼합물의 응답은 주요 구성 재료인 아스팔트 바인더의 점탄(소)성 때문에 시간과 온도에 복합적인 영향을 받는다. 골재와 같은 탄성 재료의 경우 현재의 응답이 현재의 하중조건에 의해서만 결정되는 반면, 아스팔트 혼합물과 같은 점탄성 재료의 응답은 현재의 하중조건뿐만 아니라 과거에 받았던 하중 이력에도 영향을 받는다. 이러한 점탄성 재료의 일반적인 구성방정식(응력-변형률 관계식)은 아래의 식 (1)이나 (2)와 같다.

$$\sigma = \int_0^t E(t-\tau) \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau \quad (1)$$

$$\varepsilon = \int_0^t D(t-\tau) \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau \quad (2)$$

여기서,  $E(t)$ : 리랙세이션 계수(relaxation modulus),  $D(t)$ : 크리프 컴플라이언스(creep compliance)이며 정확한 값은 복소수계수 시험(complex modulus test)을 통한 동탄성계수를 수학적으로 변환하여 결정한다(Chehab, 2002). 탄성재료에 대한 Schapery의 일-포텐셜 이론(work potential theory)과 점탄성 파괴 역학(viscoelastic fracture mechanics), 그리고 대응원리(correspondence principle)를 바탕으로, 선형 점탄성 재료의 유사변형률 에너지 밀도 함수(pseudo strain energy density function)  $W^R$ 를 정의하면 다음과 같다.

$$W^R = \frac{1}{2} [A_{11}e_V^R + A_{22}e_d^R + 2A_{12}e_d e_V + A_{44}((\gamma_{13}^R)^2 + (\gamma_{23}^R)^2) + A_{66}((\gamma_{12}^R)^2 + e_S^R)] \quad (3)$$

여기서,  $e_V^R = \varepsilon_{11}^R + \varepsilon_{22}^R + \varepsilon_{33}^R$ ,  $e_S^R = \varepsilon_{22}^R - \varepsilon_{11}^R$ ,  $e_d^R = \varepsilon_{33}^R - \varepsilon_V^R/3$  이고  $\varepsilon_{11}^R$ ,  $\varepsilon_{22}^R$  과  $\varepsilon_{33}^R$  은 유사변형률의 각 축방향 성분이 다. 만약 각 변형률 성분의 방향이 주응력과 동일하면, 식 (3)에서 모든 전단성분이 없어지게 되므로  $W^R$ 은 다음과 같다.

$$W^R = \frac{1}{2} [A_{11}(e_V^R)^2 + A_{22}(e_d^R)^2 + 2A_{12}e_d^R e_V^R + A_{66}(e_S^R)^2] \quad (4)$$

전체 좌표축(global axis)에 대한 유사변형률은 아래의 합성적분(convolution integral)으로 표현할 수 있다.

$$\varepsilon_{kl}^R(t) = \frac{1}{E_{R0}} \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \tau} d\tau \quad (5)$$

여기서,  $E_{R0}$ 은 기준값(reference modulus)으로 임의의 값을 사용할 수 있지만 보통 1을 적용한다. 식 (5)를 이용한 점탄성 재료의 유사변형률은 측정 데이터의 분량이 많은 경우 해석에 장시간이 소요된다. 왜냐하면, 특정시간에서의 재료의 거동을 알기 위해서는 이전 시간에서의 거동(즉, 거동이력)을 모두 고려해야 하기 때문이다. 이러한 단점을 극복하기 위하여 수치해석에서 주로 사용하는 상태변수법(state variable method)을 적용하였다. 상태변수법은 식 (6)의 리랙세이션 계수를 표현하는 프로니 시리즈(Prony series)에서 각각의 맥스웰(Maxwell) 요소에 하나의 변수를 대응시키는 개념으로 이를 이용하면 하중을 받고 있는 동안 각 맥스웰 요소의 거동과 상태를 쉽게 추적할 수 있으며, 식 (5)의 적분을 비교적 간단한 대수연산으로 변환할 수 있다(Simo et al., 1998).

$$E(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^m E_i e^{-\rho_i t} \quad (6)$$

여기서,  $E_i$  =  $i$ -번째 맥스웰 요소의 강성,  
 $\rho_i$  = 리랙세이션 시간

상태변수법을 적용하면 식 (5)의 유사변형률은 다음과 같다.

$$\varepsilon_{kl}^R(t_{n+1}) = \frac{1}{E_R} \left[ \eta_0(t_{n+1}) + \sum_{i=1}^M \eta_i(t_{n+1}) \right] \quad (7)$$

여기서  $\eta_0$ 와  $\eta_i$ 는  $n+1$ 번째 시간( $t_{n+1}$ )에서 각각 탄성거동과  $i$ -번째 맥스웰 요소의 내부 상태 변수(internal state variable)를 의미하여 식 (8)과 (9)와 같다.

$$\eta_0(t_{n+1}) = E_\infty(\varepsilon_{kl}(t_{n+1}) - \varepsilon_{kl}(t_0)) \quad (8)$$

$$\eta_i(t_{n+1}) = e^{-\rho_i \Delta t} \eta_i(t_n) + E_i e^{-2\rho_i \Delta t} (\varepsilon_{kl}(t_{n+1}) - \varepsilon_{kl}(t_n)) \quad (9)$$

그러면 전체 좌표축에서 유사변형률은 다음과 같다.

$$\varepsilon_{kl}^R(t_{n+1}) = \frac{1}{E_R} \left( E_\infty \varepsilon_{kl}(t_{n+1}) + \sum_{i=1}^M E_i \varepsilon_{kl}^i(t_{n+1}) \right)$$

$$\varepsilon_{kl}^i(t_{n+1}) = e^{-\rho_i \Delta t} \varepsilon_{kl}^i(t_n) + e^{-\frac{\Delta t}{2\rho_i}} \Delta \varepsilon_{kl}(t_{n+1})$$

$$\Delta \varepsilon_{kl}(t_{n+1}) = \varepsilon_{kl}(t_{n+1}) - \varepsilon_{kl}(t_n)$$

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n \quad (10)$$

식 (3)에서  $A_{11}$ ,  $A_{22}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{44}$ ,  $A_{66}$ 은 다음과 같다(Ha 2001).

$$A_{11} = \frac{1}{9} \left[ C(S) + E_R \cdot \frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)} \right]$$

$$A_{22} = C(S) + E_R \cdot \frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)}$$

$$A_{12} = \frac{1}{3}[C(S) - E_R]$$

$$A_{12} = A_{66} = \frac{E_R}{2(1+\nu)} \quad (11)$$

식 (11)에서  $\nu$ 는 포아송비, 그리고  $S$ 는 재료의 손상변수이다. 주응력은  $W^R$ 로부터 식 (12)와 같이 결정할 수 있다.

$$\sigma_{ii} = \frac{\partial W^R}{\partial \varepsilon_{ii}^R} \quad (i=1, 2, 3) \quad (12)$$

따라서 아스팔트 혼합물의 점탄성 구성방정식은 식 (13)과 같다.

$$\sigma_{11} = \left(A_{11} - \frac{1}{3}A_{12}\right)e_V^R + \left(A_{12} - \frac{1}{3}A_{22}\right)e_d^R - A_{66}e_S^R$$

$$\sigma_{22} = \left(A_{11} - \frac{1}{3}A_{12}\right)e_V^R + \left(A_{12} - \frac{1}{3}A_{22}\right)e_d^R + A_{66}e_S^R$$

$$\sigma_{33} = \left(A_{11} + \frac{2}{3}A_{12}\right)e_V^R + \left(A_{12} + \frac{2}{3}A_{22}\right)e_d^R. \quad (13)$$

## 2.2 손상모형

Schapery의 일-포텐셜 이론은 재료의 손상을 정량화하기 위하여 손상변수  $S$ 를 사용하고 손상의 진전(증가)은 점탄성 파괴 역학(Schapery, 1984)을 미세균열에 적용하여 묘사하고 있다. 본 연구에서는 Schapery가 제안한 식 (14)를 아스팔트 혼합물의 점탄성 손상 모형의 개발에 적용하였다.

$$\frac{dS}{dt} = \left(-\frac{\partial W^R}{\partial S}\right)^\alpha \quad (14)$$

여기서,  $\alpha$ 는 재료상수이고  $\partial W^R/\partial S$ 는 식 (15)와 같이 국지 좌표축에서 유사변형률의 함수로 표현이 가능하다.

$$\frac{\partial W^R}{\partial S} = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial S} \left( \frac{1}{9}(e_V^R)^2 + \frac{2}{3}e_d^R e_V^R + (e_d^R)^2 \right) \quad (15)$$

여기서, 손상함수는 식 (16)의 형태로 가정하고 재료에 대한 시험결과를 이용하여 변수  $a$ 와  $b$ 를 결정한다.

$$C(S) = \exp(-aS^b) \quad (16)$$

## 2.3 유한요소모형의 개발

식 (16)을 수치해석으로 해결하기 위하여 재료의 접선 강성 행렬(tangent stiffness matrix)을 전체 좌표축에서 구성하고 Newton-Raphson 방법을 적용하였다. 여기서, 재료의 접선 강성 행렬  $[C]$ 는 다음과 같다.

$$[C] = \frac{\partial \{\sigma\}}{\partial \{\varepsilon\}} = \frac{\partial \{\sigma\}}{\partial \{\varepsilon^R\}} \frac{\partial \{\varepsilon^R\}}{\partial \{\varepsilon\}} \quad (17)$$

식 (17)에서 응력 및 변형률은 국지 좌표축에서 구한 각각의 성분을 축 변환하여 구한다. 국지 좌표축에서의 접선 강성행렬을  $[C_L]$ 라 하고 식 (18)과 같다.

$$[C_L] = \frac{\partial \{\sigma_L\}}{\partial \{\varepsilon_L^R\}} = \begin{bmatrix} \left(A_{11} - \frac{2}{3}A_{12} + \frac{1}{9}A_{22} + A_{66}\right) & \left(A_{11} - \frac{2}{3}A_{12} + \frac{1}{9}A_{22} - A_{66}\right) & \left(A_{11} + \frac{1}{3}A_{12} - \frac{2}{9}A_{22}\right) & 0 & 0 & 0 \\ \left(A_{11} - \frac{2}{3}A_{12} + \frac{1}{9}A_{22} - A_{66}\right) & \left(A_{11} - \frac{2}{3}A_{12} + \frac{1}{9}A_{22} + A_{66}\right) & \left(A_{11} + \frac{1}{3}A_{12} - \frac{2}{9}A_{22}\right) & 0 & 0 & 0 \\ \left(A_{11} + \frac{1}{3}A_{12} - \frac{2}{9}A_{22}\right) & \left(A_{11} + \frac{1}{3}A_{12} - \frac{2}{9}A_{22}\right) & \left(A_{11} + \frac{4}{3}A_{12} + \frac{4}{9}A_{22}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \quad (18)$$

비록 유사변형률의 전단성분은 국지 좌표축에서 존재하지 않지만, 이에 대응하는 강성행렬의 요소는 0이 아님에 주의해야 한다. 전체 좌표축에 대한 재료의 접선 강성 행렬은 다음의 좌표변환 식을 이용하여 구할 수 있다.

$$C = [T_R]^{-1} [C_L] [T_R] \quad (19)$$

여기서,  $[T_R]$ 은 임의지점에서의 응력 또는 변형률 성분을 x-y 공간에서 일정한 각 만큼 회전시키는 행렬로 식 (20)과 같다.

$$[T_R] = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\theta) \\ -\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) & \frac{1}{2}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \end{bmatrix} \quad (20)$$

식 (14)와 (15)의 비선형 미분 방정식의 해를 찾는 과정은 유한요소해석에서 많은 시간을 차지한다. 그래서 본 연구에서는 식 (21)을 이용하여 현재 손상계수  $S^n$ 과 그 바로 다음 시간단계에서의 유사변형률 벡터로부터 바로 다음 시간단계에서의 손상계수  $S^{n+1}$ 을 빠르게 구하는 알고리즘을 적용하였다.

$$S^{n+1} = S^n + S(\{\varepsilon_L^R\}^{n+1}, S^n)\Delta t \quad (21)$$

식 (21)에서 시간단계의 간격을 작게 할수록 해석시간은 많이 소요되지만 실제 비선형방정식의 정해에 가까운 결과를 얻을 수 있다.

## 2.4 유한요소해석 모형의 검증

본 연구에서 개발한 점탄성 유한요소해석 모형을 검증하기 위하여 일반밀입도 아스팔트 혼합물에 대하여 5°C에서 일축 단일 변형률 인장시험을 수행하였다. 높이 150mm, 폭 75mm의 원주형 시편은 단일 4변형(single quadrilateral, Q4) 유한요소로 모델링 하였으며, 상부에 등분포 축대칭 하중을 수직으로 재하 하였다. 측정된 실제 응력을 입력변수로 사용하고 유한요소해석 결과를 시험결과와 비교하였다. 수평방향 변위는 요소의 대칭축을 따라 구속하였으며, 하부의 수직방향 변형률도 구속하였다. 식 (16)의  $a$ ,  $b$ 는 각각 0.0001, 0.5737로 검증에 사용하지 않은 다른 밀입도 혼합물을 이용하여 결정하였다. 그림 1은 수치해석에 의한 예측이 거의 모든 시간과 온도 영역에서 시험결과와 잘 일치하고 있는 것을 보여주고 있다.

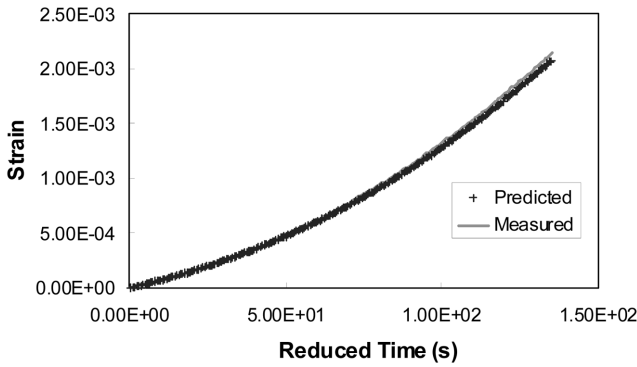


그림 1. 일축 단일 변형을 인장시험 결과(measured)와 유한요소해석(predicted)의 비교

### 3. 아스팔트 혼합물의 피로 손상 모사

피로해석은 재료의 강도(strength)보다 작은 수준의 하중을 반복적으로 재하하여 구조물이 완전히 파괴될 때까지 수행한다. 그래서 포장과 같이 대상 구조물이 클수록 해석시간은 기하급수적으로 늘어난다. 그러나 구조물에 가해지는 하중을 효과적으로 정의하고 주파수영역(frequency domain)에서 푸리에 해석을 실시하면 비교적 신속하게 그 결과를 얻을 수도 있다. 초기 공용층의 아스팔트 포장에서는 수많은 차량의 반복하중에도 불구하고 손상(균열)의 진전이 거의 없다. 이에 착안하여 본 연구에서는 수많은 반복하중을 몇 개의 그룹으로 묶고 각각의 하중그룹에 대해서만 해석을 실시하였다. 그리고, 손상의 진전특성을 각 하중그룹의 맨 마지막 단계에서만 번씩만 정의하였다.

우선 푸리에 해석에 기반을 둔 구조해석 프로그램의 기본 모듈들을 수정하였다. 수많은 반복하중으로 구성된 각 하중그룹내에서는 피로 손상의 진전은 없는 것으로 가정하고, 각 하중그룹의 맨 마지막 단계에서 손상에 대한 정보를 업데이트 하였다. 따라서, 해석은 각 하중그룹 당 하나의 하중에 대해서만 수행하였다. 하중그룹을 구성하는 반복하중의 수는 실제 문제에 따라 결정하기로 하였다. 실제 시험결과에 따르면 일반적인 아스팔트 혼합물에서는 피로 손상이 일정 수준에 이르기 시작하면서부터는 각 하중그룹 당 약 1,000번째 하중이 재하된 시점에서 손상이 증가하는 것을 확인하였다. 각 손상 단계에서 재료의 특성은 등방성(transversely isotropic)으로 가정하였다. 식 (22)는 해석에 적용한 구성방정식이다.

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (22)$$

여기서,  $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$ ,  $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}$ , 그리고  $[D]$ 는 시퀀트 강성 행렬로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$[D] = [T_R]^T [A] [T_R], \quad (23)$$

여기서,  $[A]$ =포이송비와 손상의 비등방성의 효과를 고려하기 위한 행렬

$$[A] = E^* \begin{bmatrix} A_{11} + \frac{4}{3}A_{12} + \frac{4}{9}A_{22} & A_{11} + \frac{1}{3}A_{12} - \frac{2}{9}A_{22} & 0 \\ A_{11} + \frac{1}{3}A_{12} - \frac{2}{9}A_{22} & A_{11} - \frac{2}{3}A_{12} + \frac{1}{9}A_{22} + A_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 2A_{66} \end{bmatrix} \quad (24)$$

여기서,  $E^*$ 는 아스팔트 혼합물의 복소수계수이다.

앞서 설명한 바와 같이 재료의 피로손상은 각 하중 하중 그룹의 맨 마지막에서만 고려하며 손상의 증가량은 아래의 식과 같다.

$$\Delta S = N \int_0^{t_p} \left( -\frac{\partial W^R}{\partial S} \right)^\alpha dt \quad (25)$$

여기서,  $t_p$ 는 각 하중그룹 내에서의 하중지속시간이며  $N$ 은 하중그룹을 구성하는 하중의 개수로  $t_p$ 동안은 손상의 변화는 없는 것으로 가정하였다.  $S$ 는 각 수치적분위치에서의  $S$ 의 증가량이다.  $N$ 은 프로그램의 사용자가 지정하는 변수이며 주어진 하중조건에서 포장 손상의 진행속도에 따라 결정된다. 이 과정은 물론 시간영역 해석에도 적용할 수도 있다. 특히, 휴지기(rest period)가 없거나 실제 포장의 경우처럼 휴지기가 매우 긴 조건에서는 시간영역 해석이 오히려 주파수영역 해석보다 경제적으로 유리한 경우도 있다.

### 4. 시험도로의 아스팔트 포장의 유한요소해석

#### 4.1 이동하중모사

본 연구에서 개발한 점탄성 유한요소해석 프로그램(VECD-FEP++)은 차량하중의 동적운동효과(pitching, rolling, yawing, bouncing 등)를 직접 고려할 수 없기 때문에 수학적으로 표현이 쉬운 충격하중을 중첩하여 이동하중을 근사적으로 모사하였다. 재하 차량의 타이어 접지면적과 접지압은 원형 등분포로 가정하였다. 이론적으로 충격하중은 무한히 작은 시간동안 무한히 큰 하중이 한 점에 작용한다. 이를 수학적으로 보면 일정 시간  $t=\tau$ 에서의 충격하중은 식 (26)의  $\delta$ 함수(dirac delta function)를 이용하여  $p(x,y)(t-\tau)$ 로 정의할 수 있다. 여기서,  $p(x,y)$ 는 충격하중의 크기이다.

$$\delta(0) = \infty$$

$$\delta(t) = 0, \text{ for all } t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (26)$$

이러한 해석의 장점은 아무리 복잡한 형태의 하중이라도 이를 일련의 충격하중의 중첩으로 충분히 구현이 가능하다는 점이다. 그러나  $\delta$ 함수를 그대로 유한요소해석에 적용할 수는 없기 때문에 각 충격하중을 이동변 삼각형으로 단순화 하고 그림 2와 같이 밑변의 폭이  $2\Delta T$ 인 삼각형 하중이  $\Delta T$  간격으로 진행하는 것으로 모사하였다.

타이어의 접지면 내의 압력(접지압)은 실제 접지 응력의 분포에 따라 다르며, 포장의 한 지점에서 본다면 이 접지압은 일반적으로 하중 진입시 증가하다가 진출하면서 그 크기가 감소한다. 이동하는 원형 등분포 하중  $P$ 가 속도  $v$ 로 진행하는 경우, 접지면 내의 어떤 특정한 지점의 접지압력은 그림 3과 같다. 여기서  $T_1$ 은 하중이 처음으로 특정지점에 작용하는 시간이며, 하중재하시간(duration)은 식 (27)과 같다 (단,  $D$ 는 원형 접지면의 직경).

$$T_{contact} = D/v \quad (27)$$

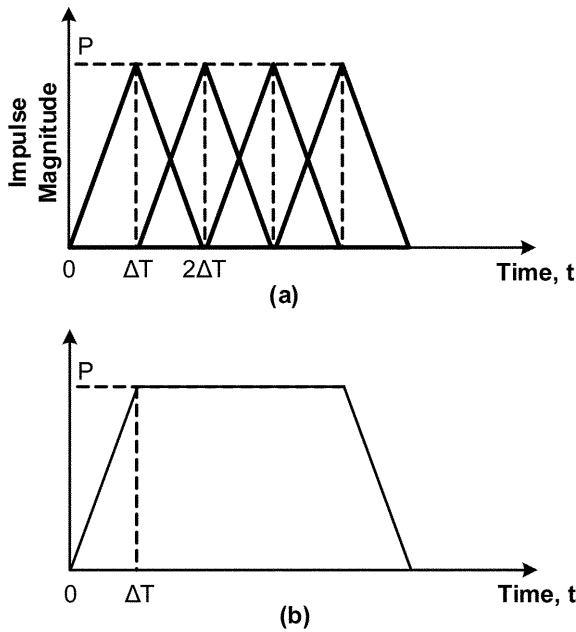


그림 2. (a) 시간공간에서 주어진 위치에서 삼각형 충격하중의 중첩, (b) 동일 지점에서의 등가 하중

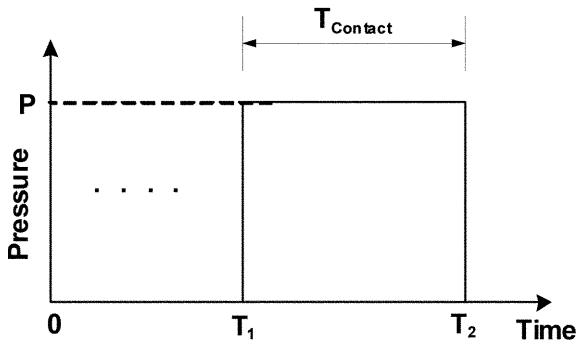


그림 3. 원형 등분포 하중에 의한 접지압력(P)과 접지시간( $T_{contact}$ )

접지면의 직경을  $D$ 로 하는 하중  $P$ 가 작용하는 시간을  $2\Delta T$ 라면 이 하중은 시간과 공간을 따라 각각  $\Delta T$ 와  $v\Delta T$  만큼 이동한다. 그림 4(a)는 충격하중으로 실제 이동하중을 시뮬레이션 하는 과정을 보여주고 있다. 영역-B와 같이 첫 번째와  $i$ 번째 삼각형 하중이 겹치는 위치는  $\Delta T$ 의 함수이다. 앞서 삼각형 하중의 중첩을 예측하는 과정과 유사하게 영역-A와 영역-B에서의 하중은 각각 그림 4(c)와 그림 4(d)와 같다. 영역-A에서는 첫 번째 하중 외에는 기여하는 성분이 없고, 영역-B에서 응답은 1번부터  $i$ 번째 하중까지 모두 영향을 미치고 있음을 알 수 있다. 차륜부를 따라 하중의 크기가 일정하게 유지되는 시간은 식 (28)과 같다.

$$T_{Contact} = \left( \text{Quotient} \left( \frac{D}{v\Delta T} \right) - 1 \right) \Delta T \quad (28)$$

$\Delta T$ 가 0에 가까워짐에 따라서  $T_{Contact} = D/v$ 로 정해가 된다.  $\Delta T$ 는 합성 시간 단계(convolution time step)로 이동하중 해석에서 중요한 변수가 된다. 이 합성 시간 단계를  $\Delta T_{Conv}$ 라 하면  $(\Delta T = \Delta T_{Conv})\Delta T_{Conv}$ 가 무한히 작을수록 충격하중에 의한 해석의 정확도는 높아진다. 그러나, 지나치게 작은  $\Delta T_{Conv}$ 는 해석시간의 급격한 증가를 초래하기 때문에 어느 정도의 해의 수렴성만 보장된다면 너무 작은  $\Delta T_{Conv}$ 의 사용은 피해야

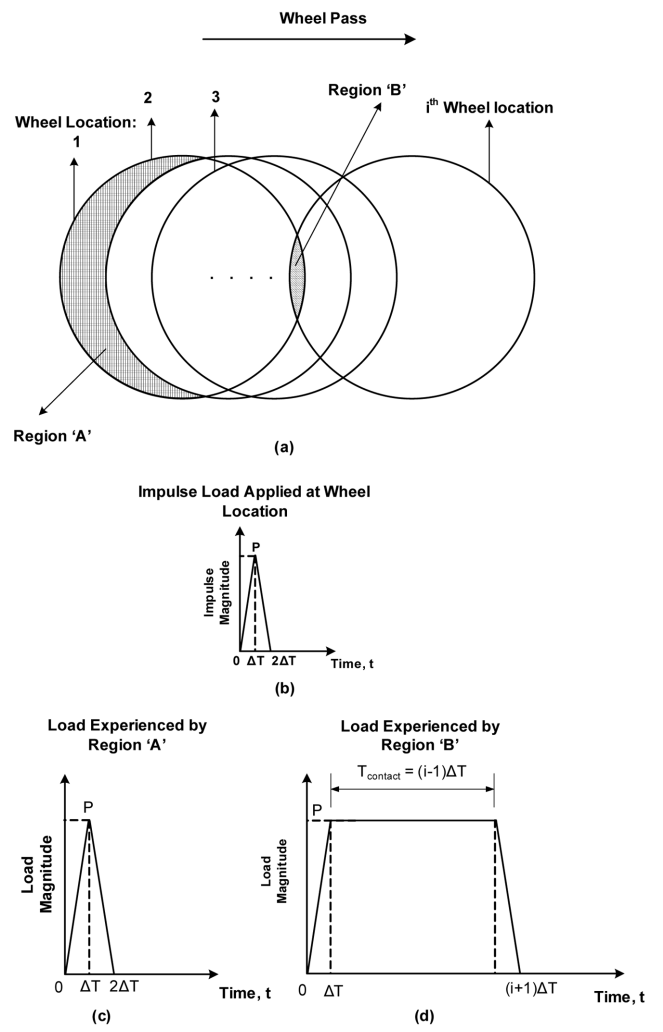


그림 4. (a) 원형 접지하중에 의한 충격하중의 이동, (b) 각 차륜 위치에서의 충격하중, (c) 영역-A의 하중이력, (d)  $i$ 번째 충격하중까지 경험한 영역-B에서의 하중이력

한다. 본 연구에서는 2축 덤프트럭(1축은 단륜 그리고 2축은 텐덤-복륜)의 전륜과 후륜을 구분하여 각 차륜을 재하시간이  $2\Delta T_{Conv}$ 인 삼각형 하중으로 모사하였다. 우선, 아스팔트 포장 위에 재하한 충격하중을 VECD FEP++로 해석하고, 이 충격하중을 시간과 공간에서 각각  $\Delta T_{Conv}$ 와  $v\Delta T_{Conv}$ 만큼씩 이동하였다. 그런 다음 특정 위치에서의 각 충격하중에 의한 정적해석결과를 중첩하였다.

$R_{imp}(R, Z, t)$ 을 출발하기 직전의 차륜하중에 대하여, 시간  $t$ 에 임의의 지점( $R, Z$ )에서의 유한요소해석 결과라 하면, 시간  $T$ 에 차륜 진행 방향의 응답은 다음과 같다.

$$R_{mv}(R, Z, T) = \sum_{i=1}^n R_{imp}((R - (i-1)v\Delta T_{Conv}), Z, (T - (i-1)\Delta T_{Conv})) \quad (29)$$

여기서  $R$ 은 차륜의 시점으로 부터의 수평이동거리이고,  $Z$ 는 표층으로부터의 응답을 알고자 하는 깊이이다. 실제 이동하중 실험에 있어 차륜이 계측기(혹은 응답을 알고자 하는 지점) 위를 바로 지나가게 하는 것은 매우 어렵기 때문에 차륜과 계측기 사이의 횡방향 이격거리를 항상 고려해야 한다. 그림 5와 같이 횡방향 이격이 존재하는 경우 수평 변형률(중방향과 횡방향)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \varepsilon_r \sin^2\theta + \varepsilon_\theta \cos^2\theta \\ \varepsilon_l &= \varepsilon_r \cos^2\theta + \varepsilon_\theta \sin^2\theta \end{aligned} \quad (30)$$

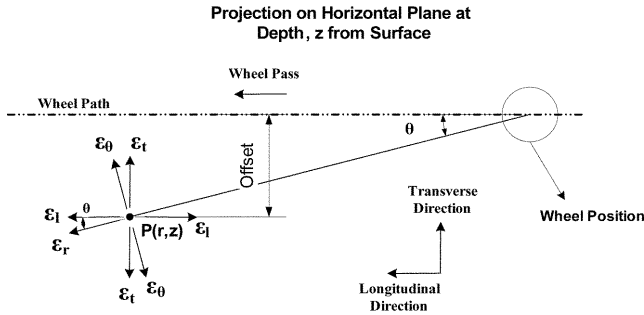


그림 5. 이격하중에 의한 깊이 z에서의 수평 변형률의 변환

#### 4.2 시험도로계측 및 해석변수

VECD-FEP++의 예측성을 검증하기 위하여 한국도로공사 시험도로의 아스팔트 단면(A5)에서 이동하중시험을 실시하고 계측된 동적 변형률을 해석결과와 비교하였다. 현장계측은 포장이 준공된 직후(2003년 11월)에 시행하여 포장내부의 손상이 거의 없고 측정 시 대기 온도가 10°C 였다. 아스팔트 혼합물과 포장하부의 골재층(unbound layer)은 선형 점탄성과 선형 탄성으로 각각 가정하였다.

검증에 사용된 시험도로 단면인 A5는 표층, 중간층 그리고 기층의 두께가 각각 5cm(ASM 19mm), 7cm(BB5), 그리고 18cm(BB3)로 다른 종류의 아스팔트 혼합물로 구성되어있다. 보조기층과 동상방지층은 각각 30cm이며, 단면 상세는 그림 6과 같다. 총 6개의 변형률 계측기가 상부 2개의 층(표층과 중간층)에 매설되어 있으며, 4개는 횡방향, 2개는

종방향으로 구성되어있다. 세 번째 아스팔트 층(기층)은 각각 6개의 변형률 계측기가 매설되어 있는 두개의 층으로 구성되어 있다. 수직응력을 측정하기 위한 토압계는 보조기층과 동상방지층의 경계에 매설되어 있다.

아스팔트 변형률계(Asphalt Stain Gauge, ASG) X01부터 X04는 운전차 측 차륜부에 매설되어 있는 반면 나머지 변형률 계측기는 차륜부에서 일정간격(50cm) 떨어져서 매설되었다. 시험차량의 주행속도는 비교적 저속인 20km/h와 40km/h를 적용하였다. 적재함에 철판을 실은 덤프트럭을 이용하여 2가지 경로를 따라 주행하였는데, 차로를 따라 진행하는 방법(차륜부 재하)과 운전석 측 차륜이 차로의 중앙을 지나가게 하는 방법(차로중간 재하)으로 각 조건에서 3회 반복 실험하였다. 차로중간 재하시험의 목적은 조수석측 차륜하중이 계측기에 미치는 영향을 검토하기 위한 것이다. 측정 결과 주어진 조건하에서 조수석측 차륜하중에 의하여 유발되는 변형률의 크기는 차륜부 하중에 의한 변형률의 약 5~15% 정도로 계측기에 미치는 영향이 크지 않는 것으로 판단되었다. 시험도로에서 계측한 각 시험의 변수는 표 1과 같다.

계측이 진행되는 동안 포장의 깊이별 온도는 표 2와 같다. 단, 표층과 중간층의 중간과 기층 상하부의 중간에서의 온도는 모든 계측자료에 대하여 2차 함수로 회귀분석하여 유추하였다.

A5단면에 사용된 모든 아스팔트 혼합물에 대하여 동탄성 계수를 구하고 각각을 수학적으로 변환하여 크리프 컴플라이언스나 리랙세이션 계수를 구하였다. 자세한 시험방법과 그 결과는 한국도로공사(2006) 연구보고서에 기술되어있다. 단, 혼합물의 설계 공극률은 4%로 실제 포장의 공극률과는 다소 차이가 있었으나 그 영향은 무시하였다. 표 3은 시험

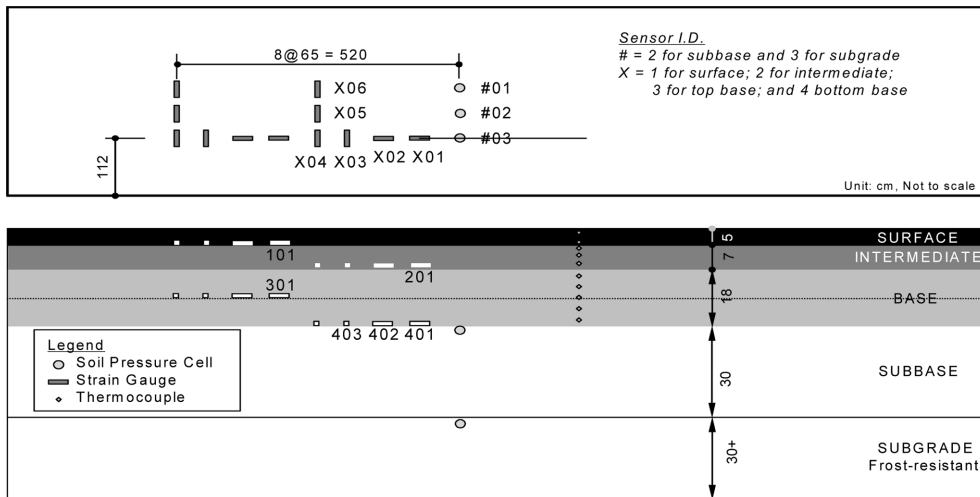


그림 6. 시험도로 A5단면과 계측기 매설현황

표 1. 유한요소해석모형의 검증시험(시험도로 A5)

목적	속도	검증용 계측기	차륜경로
속도영향검토	20, 40km/h	모든 층에서 차륜부 센서(X03/X04)	차륜부
종방향 변형률	20km/h	모든 층에서 종방향 센서(X01/X02)	차륜부

표 2. A5단면의 깊이별 온도변화

깊이(cm)	1	3.5	8.5	11	15	19	23	27
온도(°C)	7.81	7.63	7.65	7.80	8.27	8.89	9.43	10.17

표 3. 시험차량의 하중정보

차륜	차륜하중(kgf)	접지압(kPa)	접지면경(cm)
전륜(단륜)	2560	896.35	9.44
중륜(복륜)	2040	758.45	6.48
후륜(복륜)	2040	758.45	6.48

에 사용한 덤프트럭의 하중정보이다.

유한요소해석에서  $\Delta T_{Conv}$ 은 밀변 길이  $2\Delta T_{Conv}$ 인 충격하중이 시간영역에서 이동하는데 소요되는 시간으로 “5E-3”을 적용하였다.  $\Delta T_{imp}$ 은 충격하중을 VECD FEP++로 모사하기 위하여 시간 적분에 사용된 시간 단계로 “1E-4”을 적용하였다.

### 4.3 수평변형률을 이용한 유한요소해석 모형의 검증

차륜부에서 발생한 깊이별 횡방향 변형률은 ASG 103, ASG 203, ASG 303과 ASG 403에서 관측하였으며 20와 40 km/h에서 각각 측정된 결과를 유한요소해석 결과와 비교하였다. 종방향 변형률은 ASG 101, ASG 201, ASG 301, ASG 401에서 20km/h 조건에서만 관측하였다. 표 4는 각 조건에서 계측값의 최대 혹은 최소값과 유한요소해석 결과를 보여주고 있다.

전반적으로, 표층과 중간층의 변형률에 대한 유한요소예측은 그렇게 만족스럽지는 않았다. 표층(ASG 103)에서 관측한 횡방향 변형률의 최대값을 보면 후륜에는 실측과 해석이 비교적 유사하나 전륜에서는 두 주행속도에서 모두 실측보다 작게 예측되었다. 20km/h에서 표층에서의 횡방향 변형률의 실측과 예측의 차이는 최대 약 165%였다. 기층의 경우 기층의 중간위치(ASG 303)에서 관측한 횡방향 변형률은 두 속도에서 모두 좋은 예측성능을 보여주었다. 전륜에 의한 변형률의 최대오차는 40km/h에 대하여 20%이었으며, 20km/h에서는 약 10%이었다. 기층하부(ASG 403)에서 전륜에 의하여 발생하는 최대 횡방향 변형률은 20km/h에 대하여 25% 작게 예측되었으나 40km/h에서는 실측과 매우 유사한 결과를 얻었다. 그림 7은 기층하부에서 횡방향 변형률의 계측값과 수치해석결과를 비교하고 있다. 중륜과 후륜에서 최대 계측값과 해석결과와의 시간차이는 실제 차량의 주행 속도가 정확하게 측정되지 않았거나 트럭제원(예: 차축간격)과

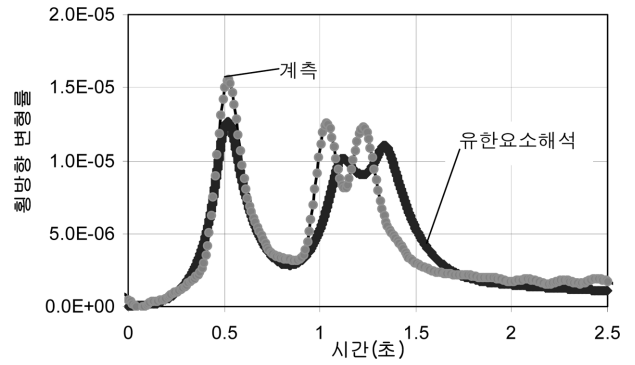


그림 7. 횡방향 변형률(ASG 403, 20km/h)

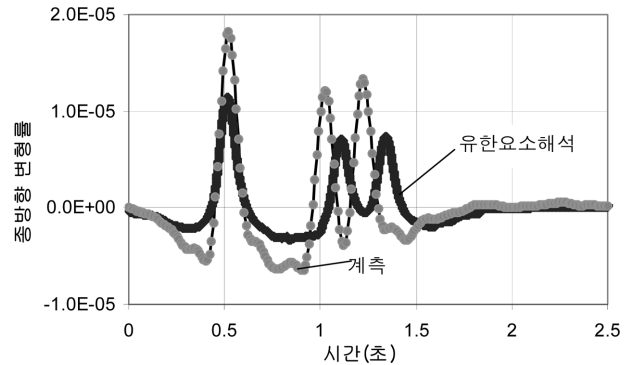


그림 8. 종방향 변형률(ASG 403, 20km/h)

실제 차량과 다르기 때문으로 추정되나 좀 더 확인이 필요하다고 판단된다. 그림 8은 20km/h 주행시 기층하부에서 측정된 종방향 변형률의 계측값과 유한요소해석 결과의 예이다.

## 5. 포장가속시험 포장의 피로손상 예측

본 장에서는 포장가속시험기(Accelerated Pavement Testing, APT)로 4가지 아스팔트 혼합물(일반밀입도, CR-TB, SBS, TerPolymer)에 대하여 피로시험을 실시하고 그 결과를 본 연구에서 개발한 VECD-FEP++로 피로수명을 예측하였다. 피로시험은 미 연방도로청의 APT를 사용하였으며 시험조건(하중 및 포장)은 한국도로공사 보고서(한국도로공사, 2006)에 자세하게 기술되어 있다. 포장가속시험에 사용된 각 혼합물에 대하여 동탄성계수를 구하고 이로부터 식 (6)의 계수들

표 4. 시험결과와 수치해석의 비교( $\times 10^6$ )

	20km/h				40km/h			
	계측값		수치해석		계측값		수치해석	
종방향 ASG	전륜	후륜	전륜	후륜	전륜	후륜	전륜	후륜
101	-19.4	-14.3	-8.42	-4.03				
201	-4.26	-2.66	-3.20	-1.52				
301	5.69	3.56	6.27	3.64				
401	18.3	13.3	11.3	7.26				
횡방향 ASG	전륜	후륜	전륜	후륜	전륜	후륜	전륜	후륜
103	-17.5	-9.73	-6.18	-10.6	-13.4	-7.50	-5.82	-9.24
203	-8.69	-11.0	0.72	5.24	-8.57	-8.36	1.472	-4.20
303	6.03	2.99	6.31	3.54	4.91	2.64	5.97	3.29
403	15.5	12.6	12.5	11.0	12.9	11.1	11.5	9.9

을 결정하였다. VECD-FEP++를 이용하여 APT에서 재하되는 하중을 모사하기위하여 0.01초 동안 작용하는 이등변 삼각형 형태의 충격파를 사용하였다. 시간간격( $\Delta T_{Com}$ )은 0.0005초를 적용하였다.

### 5.1 해석조건

해석에 사용한 하중은 최대 타이어 접지응력이 827.4kPa로 0.1초 동안 재하 되고 0.9초의 회복기를 갖는 것으로 가정하였다. 실제 가속시험기에 설치된 아스팔트 하부의 변형률의 최대값은 차륜이 진행한 후 약 0.46초 이후에 발생하는 것으로 예측되었다. 일반적으로 현장 포장에서 하중의 휴지기는 약 11.36초로 이와 같이 휴지기가 긴 경우 주파수 영역에서 푸리에 해석을 하면 많은 시간이 소요된다. 본 실험 및 해석의 목적은 4개의 혼합물의 피로 수명에 대한 순위를 결정하는 것이기 때문에 0.1초 동안 재하되고 휴지기가 0.9초인 하중을 가정하여 사용하였다. 해석에 사용된 포장 구조는 그림 9의 포장가속시험 단면과 동일하다. 아스팔트 표층은 10cm이며 기층의 두께는 56cm이며, 기층과 노상의 탄성계수는 각각 108,000kPa과 96526.6kPa를 적용하였다. 식 (14)의  $\alpha$ 는 2.1218 그리고 식 (16)의 손상함수의 변수는 각각  $a = -0.001$ ,  $b = 0.5737$ 로 가정하였다.

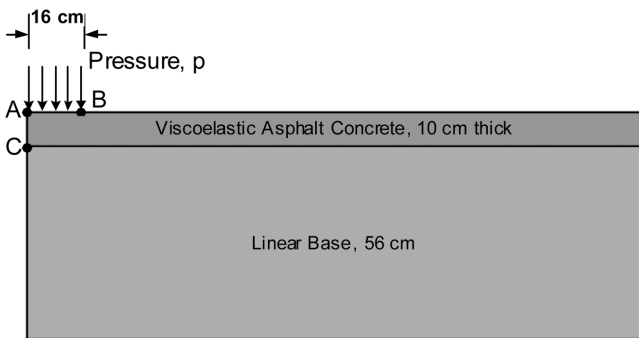


그림 9. 포장가속시험단면

### 5.2 초기해석 결과

유한요소해석에 있어 재료의 유사강성인 C의 초기값이 포장의 수명을 예측하는데 큰 영향을 미친다. 유사강성(C)과 손상변수(S)의 관계식을 보면 C가 1이면 아스팔트 혼합물의 파손이 즉시 발생하는 것으로 모사가 되는데, 이는 C가 1일 때 C와 S곡선의 경사가 0이기 때문이다. 그러나 C가 1에 가까울수록 각 하중그룹(N)당 하중수가 작아도 비교적 정확한 해를 얻을 수 있었다. 그래서 본 해석에서는 C는 0.8을 적용하였다.

평면변형률 해석(주파수 영역 해석, 0.1초 하중재하 조건)에 따르면, 포장 단면에 조기파손이 발생하는 것으로 예측되었으나 이는 실제 육안으로 관찰되는 파손의 시점과는 다소 차이가 있었다. 동일한 하중조건에서 본 해석에 사용한 포장 단면에서는 평면변형률 해석이 축대칭 해석에 비하여 내부에 큰 응력이 발생하는 것으로 모사되었다. 하중의 형태에 따른 해석결과의 차이를 분석하기 위하여 등분포 하중과 삼각형 하중에 의한 해석을 각각 실시하였다. 표 5는 포장 내부에서 예측한 최대 인장응력으로 축대칭 해석과 평면변형

률 해석결과를 비교하였다. 등분포하중의 경우, 827.4kPa의 압력이 16.85cm 반경의 원형 면적에 접지되는 것으로 가정하고, 삼각형 형태의 하중은 평균이 등분포 하중과 동일하도록 가정하였다.

표 5. 축대칭 해석과 평면변형률 해석결과

	등분포하중	삼각형하중
축대칭해석	3489.07	4542.95
평면변형률	6420.63	7675.55
비	0.5434	0.5919

표 5와 같이, 등분포하중으로 가정한 경우, 축대칭 해석에서의 최대응력은 평면변형률 조건의 약 54%이고, 삼각형 하중의 경우, 약 59%였다. 실제 포장에서의 응력이 축대칭 해석 결과와 유사하고 실제 하중조건에 의한 결과의 평균이라고 가정할 경우, 축대칭과 평면변형률 해석의 중간값 개념의 하중계수로 0.6254를 결정하였다. 따라서 가속시험단면의 손상을 예측하기 위한 평면변형률 해석에서 접지압 827.4 kPa의 62.5%를 사용하고 약 100,000회까지 반복재하 하였다. C값이 0이 될 때 해석은 자동으로 정지하도록 하였다.

### 5.3 혼합물의 피로 공용 수명

4개의 혼합물에 대한 APT 피로수명 평가는 다음의 두 가지 방법을 이용하여 결정되었다. 첫 번째는 아스팔트 층에서 C가 0.25보다 작은 영역의 면적을 계산하는 것이다(방법 1). 두 번째는 100,000회까지 해석을 실시한 후에 C의 최소값을 확인하는 것이다(방법 2). 그림 10은 일반밀입도 단면에 하중을 각각 1,000, 10,000, 50,000회 재하한 후 아스팔트 층의 C의 분포이다.

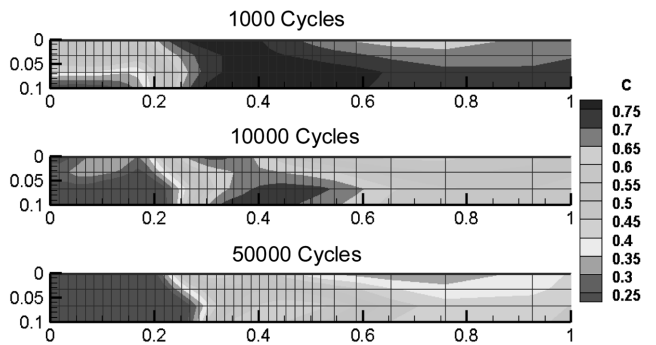


그림 10. 각 하중 단계별 일반밀입도 아스팔트 포장에서의 유사강성(C)의 분포(PG-70-22)

표 6은 위의 두 가지 방법과 실제 포장단면에서 육안관찰에 따른 피로수명의 순위이다. 방법 1에서는 CR-TB (Crumb Rubber Term. Blend)의 공용성이 가장 우수한 것으로 나타난 반면, 방법 2에서는 Terpolymer가 가장 우수한 것으로 나타났다. 그러나 방법 1과 방법 2의 결과는 육안관찰과는 상이했다. 육안관찰 결과에 따르면 SBS(Styrene Butadiene Styrene) 포장이 가장 우수한 공용성을 보였으며, Terpolymer가 두 번째인 것으로 나타났다. 방법 2는 SBS를 제외하고 육안관찰과 유사한 경향을 보였다.



표 6. 다양한 방법으로 평가한 가속시험포장의 손상 순위

순위	방법 1	방법 2(C 값)	육안조사
1	CR-TB	Terpolymer (0.0802)	SBS
2	Terpolymer	CR-TB (0.0685)	Terpolymer
3	SBS	SBS (0.0428)	CR-TB
4	Control	Control (0.0257)	Control

## 6. 결론 및 향후 연구

본 연구에서는 Schapery의 이론을 기반으로 축대칭 유한요소해석 프로그램인 VECD-FEP++를 개발하였다. 이동하중에 의한 아스팔트 포장의 변형률을 예측하기 위하여 충격하중으로 이동하중을 모사, 실제 시험도로 계측결과와 비교하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

기층상부와 기층하부에서의 수평 횡방향 변형률의 예측은 비교적 우수하였다. 그러나, 노면에 가까운 포장층에 가해진 타이어 접지하중의 복잡한 특성으로 인하여 표층과 중간층에 대한 예측 결과는 좋지 않았다. 노면과 가까운 포장층에 대한 유한요소 모델은 타이어 접지압의 비선형성, 실제 접지면적 등을 고려할 수 있어야 된다고 판단되었다. 전반적으로 예측성능은 종방향 변형률이 횡방향 변형률보다 좋았지만 종방향 변형률에서는 최대값의 시간 지연효과가 더 두드러지게 나타났다, 특히 이 효과는 전륜보다는 후륜에서 더 부각되었다. 포장가속시험결과 SBS 혼합물의 피로저항능력이 가장 우수하나 유한요소해석에 의한 수명은 Terpolymer가 가장 우수한 것으로 예측되었다. 본 연구에서는 이동하중에 의한 실제 아스팔트포장의 점탄성 응답성을 예측할 수 있는 유한요소해석 프로그램을 개발하고 이를 한국도로공사 시험도로에 적용하였다. 연구를 통하여 가능성 있는 결과를 얻었으나 다음과 같은 추가적인 연구를 통해 해석모델의 보완이 필요한 것으로 판단된다.

1. 현재 VECD모델의 일부 단점은 모델 내부에 응력상태가 고려되지 않은 것이다. 응력상태가 재료의 소성이나 점소성 특성에 중요한 영향을 미치는 것으로 알려지고 있으나, 재료의 점탄성 손상 특성에 영향을 미치는 지는 확실히 확인된 바가 없으므로 이에 대한 연구가 필요하다.
2. 유한요소해석의 정확성을 향상하기 위하여, 추가연구가 필요한 것으로 판단된다. 특히, 수치해석 오차와 차분하중의 분포 개념, 노상의 거동 예측에 사용되는 비선형 탄성 이

론 등에 대하여 더 많은 연구가 필요하다.

3. 실질적으로 손상이 발생한 도로포장을 축대칭 조건으로 가정하는 것은 이론적인 오차를 내재하므로, 기존의 유한요소 프로그램을 3차원으로 확장하는 것이 필요하다. 3차원 프로그램은 효과적으로 개발되면 포장 거동에 대한 정확하고 효과적인 해석이 가능하리라 기대한다.

## 감사의 글

본 논문은 한국도로공사 도로교통연구원에서 수행한 연구과제의 결과물이며 저자일동은 연구비 지원과 현장계측자료 생성 및 수집에 도움을 주신 시험도로 연구진에게 깊은 감사의 뜻을 전합니다.

## 참고문헌

- 한국도로공사(2006) 시험도로 아스팔트 포장의 장기공용수명 예측을 위한 점탄소성 유한요소 모델의 개발.
- Chehab, G., Kim, Y.R., Schapery, R.A., Witczack, M., and Bonaquist, R. (2002) Time-temperature superposition principle for asphalt concrete mixtures with growing damage in tension state. *Asphalt Paving Technology*, AAPT, Vol. 71, pp. 559-593.
- Ha, K. and Schapery, R.A. (2001) A three-dimension viscoelastic constitutive model for particulate composites with growing damage and its experimental validation, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, pp. 3497-3517.
- Lee, H.J. and Kim, Y.R. (1998) A uniaxial viscoelastic constitutive model for asphalt concrete under cyclic loading, *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 124, No. 1, pp. 32-40.
- Schapery, R.A. (1981) *On Viscoelastic Deformation and Failure Behavior of Composite Materials with Distributed Flaws*. Advances in Aerospace Structures and Materials, AD-01, ASME, New York, pp. 5-20.
- Schapery, R.A. (1984) Correspondence principles and a generalized J-integral for large deformation and fracture analysis of viscoelastic media. *Int. Journal of Fracture*, Vol. 25, pp. 195-223.
- Schapery, R.A. (1990) A theory of mechanical behavior of elastic media with growing damage and other changes in structure. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 38, pp. 215-253
- Schapery, R.A. (1999) Nonlinear viscoelastic and viscoplastic constitutive equations with growing damage. *Int. Journal of Fracture*, Vol. 97, pp. 33-66.
- Simo, J.C. and Hughes, T.J.R. (1998) *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag, New York

(접수일: 2008.6.20/심사일: 2008.9.23/심사완료일: 2008.10.20)