

Elastica형 아치의 자유진동

Free Vibrations of Elastica Shaped Arches

이병구* · 오상진** · 이태은*** · 김권식****
Lee, Byoung Koo · Oh, Sang Jin · Lee, Tae Eun · Kim, Gwon Sik

Abstract

This paper deals with the free vibrations of elastica shaped arches. The elastica shaped arches are formed by the post-buckled column whose arc length is always constant. The equations governing free, planar vibration of general arch in open literature are modified for applying the free vibrations of elastica shaped arch and solved numerically to obtain frequencies and mode shapes for hinged-hinged, clamped-hinged and clamped-clamped end constraints. The effects of rotatory inertia, rise ratio and slenderness ratio on natural frequencies are presented. The frequencies of elastica shaped arches are greater than those of parabolic shaped ones. Also, typical mode shapes are presented in figures.

Keywords : *Elastica shaped arch, constant arc length, buckled column, free vibration, mode shape, natural frequency*

요 지

이 논문은 elastica형 아치의 자유진동에 관한 연구이다. Elastica형 아치의 선형은 항상 일정한 곡선길이를 갖는 후좌굴 기둥의 정확탄성곡선을 이용하였다. 이 Elastica형 아치의 곡률항을 일반아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식에 적용하여 고유진동수 및 진동형을 산출하였다. 수치해석 예에서는 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정의 지점조건을 고려하였다. 회전관성이 고유진동수에 미치는 영향을 분석하고, 아치의 높이비 및 세장비와 고유진동수와의 관계를 그림에 나타내었다. Elastica형 아치와 포물선형 아치의 고유진동수를 비교한 결과, elastica형 아치의 고유진동수가 포물선 아치의 고유진동수보다 매우 크게 나타나는 동적 특성을 보였다. 진동형의 전형적인 예를 그림에 나타내었다.

핵심용어 : Elastica형 아치, 일정곡선길이, 후좌굴 기둥, 자유진동, 진동형, 고유진동수

1. 서 론

아치는 미관이 아름답고 구조적으로 안정하기 때문에 보, 기둥, 평판 등과 더불어 구조공학분야에서 뼈대구조로 널리 이용되고 있다(Leontovich, 1984). 그동안 아치 구조의 정·동적 해석에 관한 많은 연구들이 진행되었다. 이러한 연구들에서는 전통적으로 원호형(Tufekci and Ozdemir, 2006), 포물선형(Lee et al., 2003; Moon et al., 2008), 정현형(이, 1987; Lee and Wilson, 1990), 타원형(Nieh et al., 2003), 현수형(BeGole, 1981), 파선형(이 등, 1991) 등과 같은 매우 다양한 선형을 연구의 대상으로 하고 있다.

최근에 재료공학의 발달로 세장한 구조를 인위적으로 좌굴 시킨 후에 이렇게 형성된 정확탄성곡선(elastica)을 뼈대구조로 이용하는 구조형식이 등장하고 있다(Falzon and Aliabadi, 2008). 이러한 전형적인 구조물 중에 하나가 elastica 아치(elastica arch)이다(Lee et al., 2005). Elastica 아치는 축하

중에 최적으로 저항할 수 있도록 자연이 선정(natural selection)하여준 선형이므로 다른 선형과 비교하여 외부의 작용하중에 대해서 우수하게 저항할 수 있을 것으로 기대된다. Elastica 아치는 일정곡선길이(constant arc length)로 다양한 높이비(rise ratio)를 갖는 아치를 제작할 수 있는 기하학적인 장점이 있다.

Elastica 아치에는 직선 기둥의 좌굴로 인하여 발생하는 합응력(stress resultant)이 작용하게 된다. Elastica 아치의 정·동적 해석에 관한 연구는 합응력의 영향을 고려하는 경우와 고려하지 않는 경우로 구분할 수 있다. 이 연구에서 용어의 정의를 위하여 합응력의 영향을 고려하는 아치를 “elastica 아치”, 합응력의 영향을 고려하지 않는 아치를 “elastica형 아치”라고 부르기로 한다. 즉, 기둥의 좌굴된 형상인 정확탄성곡선의 선형을 미리 계산하고 이 선형으로 아치를 제작함으로써 합응력은 작용하지 않고 오로지 정확탄성곡선의 형상만을 유지하는 아치를 “elastica형 아치”로 정의한다. 이와 같이 이 논문의

*정회원 · 교신저자 · 원광대학교 토목환경공학과 교수 (E-mail : bklee@wku.ac.kr)

**전남도립대학 토목환경과 교수 (E-mail : sjoh@dorip.ac.kr)

***원광대학교 토목환경공학과 겸임교수 (E-mail : telee@wku.ac.kr)

****정회원 · 원광대학교 대학원 토목환경공학과 박사과정 (E-mail : gskim@wku.ac.kr)

제목에서 “형(shaped)”의 의미는 앞에서 예로 든 아치의 선형인 원호“형”, 포물선“형” 등과 같이 “아치의 선형이 정확탄성곡선일 뿐이고 정확탄성곡선을 발생시키기 위한 합응력의 영향은 고려하지 않은”이라는 의미로 사용하였다.

합응력의 영향을 고려하는 Elastica 아치의 자유진동에 관한 연구로는 Perkins(1990)와 Lee *et al.*(1994)의 논문을 들 수 있지만, “elastica형 아치”의 정·동적 해석에 관한 연구는 문헌조사에서 찾아 볼 수 없었다.

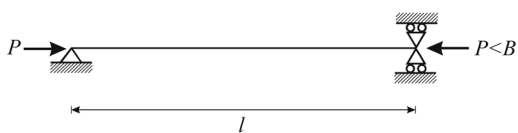
이 연구는 elastica형 아치의 자유진동에 관한 연구이다. 먼저 elastica형 아치의 선형을 문헌(Lee *et al.*, 2005)의 방법을 이용하여 산정하였다. 다음에 이 elastica형 아치의 자유진동과 관련된 곡률항(curvature term)을 새로 유도하였다. 마지막으로 이 곡률항을 이용하여 아치의 자유진동을 지배하는 문헌(Lee and Wilson, 1990)의 미분방정식에 적용할 수 있도록 하였다. 이 미분방정식을 수치해석하여 elastica형 아치의 고유진동수와 진동형(mode shape)을 계산하였다. 아치의 지점조건은 회전-회전, 고정-회전, 고정-고정을 고려하였다. 수치해석의 결과로 회전관성, 높이비, 세장비 등이 고유진동수에 미치는 영향을 분석하였다. 문헌의 결과(Lee *et al.*, 2003)를 이용하여 포물선형 아치의 고유진동수를 산정하고 이 연구의 고유진동수와 비교하여 elastica형 아치의 동적 안정의 우수성을 보였다.

2. Elastica형 아치의 선형

Elastica형 아치의 선형을 지배하는 미분방정식의 유도과정은 문헌(Lee *et al.*, 2005)에 자세하게 기술되어 있다. 여기서는 이 논문에 필요한 elastica형 아치의 선형 산정을 위하여 그 결과만을 인용한다.

그림 1(a)는 길이가 l 이고 좌측단이 회전지점, 우측단이 이동지점으로 지지된 등단면 기둥을 나타낸다. 그림 1(b)는 이 기둥에 좌굴하중 B 보다 큰 압축하중 P 가 작용하여 좌굴된 형상인 elastica 아치의 선형을 나타낸다. 아치의 임의점은 직교좌표계 (x, y) 에서 정의되며, 임의점까지의 곡선길이는 s 이다. 전좌굴 기둥의 길이는 l 이기 때문에 정확탄성곡선의 우측지점에서 $s=l$ 이다. 이 그림에서 Δ 는 좌굴로 인하여 우측지점이 이동한 후좌굴 기둥의 수평처짐을 나타낸다. 따라

(a) Straight column before buckling



(b) Elastica of post-buckled column

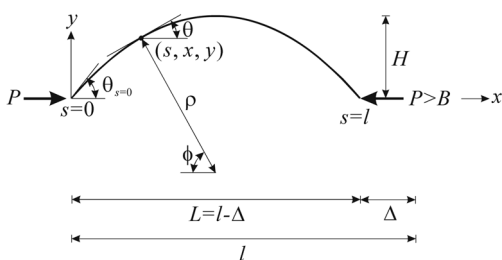


그림 1. (a) 전좌굴 기둥 (b) 후좌굴 기둥의 정확탄성곡선

서 elastica형 아치의 지간길이는 $L=l-\Delta$ 이 된다. 아치높이 H 는 아치축의 중앙점 ($s=l/2$)에서 $y_{s=l/2}$ 이다.

이 그림 1(b)에서 elastica 아치의 임의점 (s, x, y) 에서 곡률반경, 접선각도, 곡률반경과 수평축이 이루는 경사각도는 각각 (ρ, θ, ϕ) 이다. 후좌굴 기둥의 정확탄성곡선을 지배하는 미분방정식을 무차원 미분방정식으로 유도하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수를 도입한다.

$$\lambda = s/l \quad (1)$$

$$\xi = x/l \quad (2)$$

$$\eta = y/l \quad (3)$$

$$\delta = \Delta/l \quad (4)$$

$$f = H/L = \eta_{\lambda=0.5}/(1-\delta) \quad (5)$$

$$p = Pl^2/(EI) \quad (6)$$

위에서 길이차원의 변수 (s, x, y, Δ) 는 일정곡선길이 l 로 정규화하였고 f 는 높이비이다. p 는 기둥의 좌굴을 발생시키는 무차원 하중이고, 전좌굴 기둥에 작용하는 압축하중 p 가 정확탄성곡선을 형성하기 위해서는 무차원 좌굴하중 $b(=Bl^2/EI)$ 보다는 커야 한다. 여기서 EI 는 휨 강성이다.

3차이론(Chen and Atsuta, 1977)과 식 (1)~(6)을 이용하면 정확탄성곡선을 지배하는 비선형 미분방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$d\xi/d\lambda = \cos\theta \quad (7)$$

$$d\eta/d\lambda = \sin\theta \quad (8)$$

$$d\theta/d\lambda = -p\eta \quad (9)$$

이 미분방정식들은 $0 \leq \lambda \leq 1$ 에서 유효하며, 지점에서 경계조건들은 다음과 같다.

$$\xi = 0, \lambda = 0 \text{ 에서} \quad (10)$$

$$\eta = 0, \lambda = 0 \text{ 에서} \quad (11)$$

$$\eta = 0, \lambda = 1 \text{ 에서} \quad (12)$$

위의 미분방정식에서 무차원 압축하중 p 값에 대하여 정확탄성곡선의 미지수인 좌측지점 ($\lambda=0$)에서 회전각 $\theta_{\lambda=0}$ 및 $(\xi, \eta, \rho, \theta, \phi)$ 를 찾아내는 것이 정확탄성곡선을 해석하는 문제이다. 이 비선형 미분방정식의 해석방법에 대해서는 문헌들(Lee and Oh, 2000; Lee *et al.*, 2005)을 참고할 수 있다.

표 1. 정확탄성곡선의 평형경로

f	p	$\theta_{\lambda=0}$	$\eta_{\lambda=0.5}$	δ
0.	π^{2*}	0.	0.	0.
0.1	9.989	0.309	0.0974	0.0238
0.2	10.32	0.595	0.1825	0.0869
0.3	10.80	0.842	0.2487	0.1708
0.4	11.37	1.047	0.2966	0.2589
0.5	11.96	1.213	0.3297	0.3408

* $b = \pi^2$: 무차원 좌굴하중

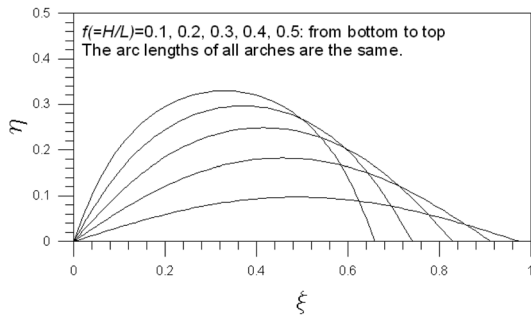


그림 2. Elastica형 아치의 선형 예

표 1은 압축하중 p 와 정확탄성곡선의 거동 f , $\theta_{\lambda=0}$, $\eta_{\lambda=0.5}$, δ 사이의 관계인 평형경로를 나타낸다. 이 표에서는 $f=0.1\sim 0.5$ 를 기준으로 이에 대응되는 p , $\theta_{\lambda=0}$, $\eta_{\lambda=0.5}$, δ 를 수록하여 elastica형 아치의 선형을 이해하는데 도움이 되도록 하였다. 이들 사이의 관계는 강한 비선형을 보이고 있다.

이후에 아치의 자유진동 해석에서 필요한 변수인 (ρ, ϕ) 의 산정에 대해서는 제3장에서 기술한다.

그림 2는 이 논문에서 연구대상으로 하는 elastica형 아치의 형상을 예로 든 것이다. 이 그림으로부터 높이비 ($f=0.1\sim 0.5$)에 대응하는 표 1의 $\theta_{\lambda=0}$, $\eta_{\lambda=0.5}$, δ 값을 확인할 수 있다. 이 그림에서 모든 아치의 곡선길이는 동일하며, 이 그림 및 표 1로부터 δ 가 증가하면 f 도 증가하는 것을 알 수 있다. 일반적으로 높이비 f 가 0.5이상이면 황좌굴에 취약하므로 $f \leq 0.5$ 인 아치로 제한하여 수치해석 예를 보였다.

3. 지배미분방정식

3.1 지배미분방정식

그림 3(a)는 제2장에서 정의된 elastica형 아치를 나타낸다.

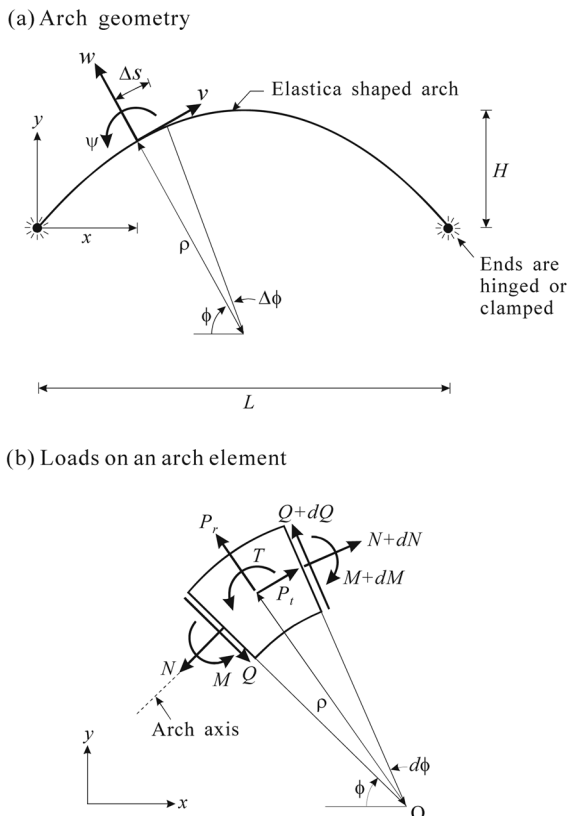


그림 3. (a) 아치의 형상 (b) 아치 미소요소에 작용하는 힘

이 아치는 합응력을 무시하고 선형만 이용하는 것이므로 지점은 회전 및 고정이 모두 가능하다. 아치의 곡선길이는 l 이고, 지간길이 L , 높이 H 및 (x, y, θ) 는 제2장에서 이미 산정되었다. (ρ, ϕ) 는 곡률반경 및 경사각도이다. w, v, Ψ 는 아치의 곡률중심방향 변위, 접선방향 변위 및 휨에 의한 단면 회전각을 나타낸다. 그림 3(b)는 아치 미소 요소에 작용하는 힘들을 나타내며, 변위에 의한 합응력 즉, 축방향력 N , 전단력 Q , 휨 모멘트 M 이 작용한다. 또한 질량을 갖는 미소요소에는 자유진동으로 인하여 발생하는 곡률방향 관성력 P_r , 접선방향 관성력 P_t , 회전관성 우력 T 가 작용한다.

아치의 미소요소에 작용하는 힘들의 동적 평형방정식들은 다음과 같다.

$$dN/d\phi + Q + \rho P_t = 0 \quad (13)$$

$$dQ/d\phi - N + \rho P_r = 0 \quad (14)$$

$$dM/d\phi - \rho Q - \rho T = 0 \quad (15)$$

아치의 단면에 발생하는 합응력 N, M 과 단면 회전각 Ψ 는 다음과 같이 변위 w, v 의 항으로 표현할 수 있다.

$$N = (EA/\rho)[v' + w + (r/\rho)^2(w'' + w)] \quad (16)$$

$$M = -(EI/\rho^2)(w'' + w) \quad (17)$$

$$\Psi = (1/\rho)(w' - v) \quad (18)$$

위에서 $(\cdot) = d/d\phi$, E 는 탄성계수, A 는 단면적, I 는 단면2차모멘트, $r(\rho = \sqrt{I/A})$ 은 단면회전반경이다.

아치의 자유진동을 조화진동으로 가정하면 관성력 P_r, P_t, T 는 다음과 같다.

$$P_r = \gamma A \omega_i^2 w \quad (19)$$

$$P_t = \gamma A \omega_i^2 v \quad (20)$$

$$T = R \gamma I \omega_i^2 \Psi = R(\gamma I \omega_i^2 / \rho)(w' - v) \quad (21)$$

위에서 γ 는 질량밀도, ω_i 는 고유각진동수, $i(=1, 2, 3, 4, \dots)$ 는 모드번호이다. 식 (21)에서 R 은 회전관성지표이다. $R=0$ 이면 자유진동 해석에서 회전관성을 고려하지 않는 경우이고, $R=1$ 이면 회전관성을 고려하는 경우이다.

아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 무차원 변수들을 다음과 같이 도입한다. 먼저 무차원 고유진동수 C_i 는 다음과 같다.

$$C_i = \omega_i l^2 \sqrt{\gamma A / EI}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (22)$$

아치의 세장비 κ 는 다음과 같다.

$$\kappa = l/r \quad (23)$$

길이차원 변수들인 (w, v, ρ) 를 다음과 같이 일점곡선길이 l 로 정규화한다.

$$\bar{w} = w/l \quad (24)$$

$$\bar{v} = v/l \quad (25)$$

$$\bar{\zeta} = \rho/l \quad (26)$$

이상에서 무차원 변수식 (22)~(26)과 기존의 문헌과의 차별성은 무차원 변수들을 지간길이 L 로 정규화하지 않고 일정곡선길이 l 로 정규화한 점이다. Elastica형 아치의 지간길이는 높이비에 따라서 변화하기 때문에 아치의 변수들을 길이가 일정한 아치의 현길이(arc length) l 로 무차원화함으로써 elastica형 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도할 수 있다.

위의 합응력과 관성력의 식 (16)~(21)을 동적 평형방정식 (13)~(15)에 대입하고 무차원 변수식 (22)~(26)을 이용하면 elastica형 아치의 자유진동을 지배하는 무차원 미분방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{w}'''' &= 5a_1\bar{w}'''' + (a_2 - R\kappa^{-2}a_3C_i^2)\bar{w}'' + a_1(1 + R\kappa^{-2}a_3C_i^2)\bar{w}' \\ &\quad + (1 + a_2 - \kappa^2a_3 + a_3^2C_i^2)\bar{w} + \kappa^2a_3(R\kappa^{-4}C_i^2 - 1)\bar{v}' \\ &\quad - R\kappa^{-2}a_1a_3C_i^2\bar{v} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}'' &= \kappa^{-2}a_1a_3^{-1}\bar{w}'' + (R\kappa^{-4}C_i^2 - 1)\bar{w}' + a_1(1 + \kappa^{-2}a_3^{-1})\bar{w} + a_1\bar{v}' \\ &\quad - \kappa^{-4}(R + \kappa^2a_3)C_i^2\bar{v} \end{aligned} \quad (28)$$

위에서 미분방정식의 계수 $a_1 \sim a_3$ 는 다음 식같이 elastica형 아치의 곡률항 ζ, ζ', ζ'' 들로 구성된 식들이다.

$$a_1 = \zeta'/\zeta \quad (29.1)$$

$$a_2 = 2\zeta''/\zeta - 8(\zeta'/\zeta)^2 - 2 \quad (29.2)$$

$$a_3 = \zeta^2 \quad (29.3)$$

위에서 유도한 미분방정식들은 문헌(Lee and Wilson, 1990)의 결과를 elastica형 아치에 적용할 수 있도록 수정한 미분방정식들이다.

3.2 경계조건

위에서 유도한 미분방정식의 수치적분 문제는 초기치문제이므로 지점의 경계조건이 필요하다. 먼저, 회전지점에서 $w = v = M = 0$ 이므로 다음의 무차원 경계조건들을 얻는다.

$$\bar{w} = 0 \quad (30)$$

$$\bar{v} = 0 \quad (31)$$

$$\bar{w}'' = 0 \quad (32)$$

고정지점에서 $w = v = \psi = 0$ 이므로 다음의 무차원 경계조건들을 얻는다.

$$\bar{w} = 0 \quad (33)$$

$$\bar{v} = 0 \quad (34)$$

$$\bar{w}' = 0 \quad (35)$$

3.3 곡률항

3.1절에서 유도한 미분방정식은 경사각도 ϕ 에 관한 미분방정식이므로 임의좌표 (ξ, η) 에서 ϕ 가 정의되어야 한다.

그림 1(b)에서 $\phi + \theta = \pi/2$ 이므로 ϕ 는 식 (36)과 같고, 이 식을 미분하여 식 (37)을 얻는다. 여기서 θ 는 제2장에서 이미 산정된 값이다.

$$\phi = \pi/2 - \theta \quad (36)$$

$$\frac{d\theta}{d\phi} = -1 \quad (37)$$

식 (27), (28)의 미분방정식에는 $a_1 \sim a_3$ 에서 보는 바와 같이 곡률항 ζ, ζ', ζ'' 를 갖고 있다. 따라서 제2장에서 이미 계산된 (ξ, η, θ) 을 이용하여 elastica형 아치의 곡률반경 $\zeta (= \rho/l)$ 를 먼저 구하고 이로부터 ζ 의 미분항 ζ', ζ'' 를 다음과 같이 산정한다.

그림 1(b)에서 무차원 곡률 $1/\zeta$ 는 기하학적 조건에 의하여 다음 식 (38)과 같다.

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{1}{\zeta} \quad (38)$$

식 (1), (37), (38)로부터 곡률반경 ζ 를 다음과 같이 p, η 의 항으로 나타낼 수 있다.

$$\zeta = \frac{1}{p\eta} \quad (39)$$

정의에 의하여 $\zeta' = d\zeta/d\phi, \zeta'' = d^2\zeta/d\phi^2$ 이므로 식 (8), (9), (37), (39)를 이용하면 ζ 의 미분항 ζ', ζ'' 를 다음과 같이 (p, η, θ) 의 항들로 표시할 수 있다.

$$\zeta' = -\frac{\sin\theta}{p^2\eta^3} \quad (40)$$

$$\zeta'' = \frac{1}{p^2\eta^3} \left(\frac{3\sin^2\theta}{p\eta^2} + \cos\theta \right) \quad (41)$$

이상에서 산정한 식 (39)~(41)의 곡률항은 제2장에서 이미 산정된 (η, θ) 로 구성되고 p 는 입력변수이므로 미분방정식의 계수 $a_1 \sim a_3$ 를 모두 계산할 수 있다. 따라서 elastica형 아치의 자유진동 문제를 식 (27), (28)의 미분방정식에 적용할 수 있게 되었다.

4. 수치해석 예 및 토의

제2장의 정확탄성곡선 이론과 제3장의 자유진동 이론을 조합하여 elastica형 아치의 자유진동을 해석하는 알고리즘을 개발하였다. 제2, 3장의 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법을 이용하였고, 제2장에서 미지수인 초기조건 $\theta_{\lambda=0}$, 제3장에서 미지수인 고유치 C_i 는 비선형방정식의 해법인 Regula-Falsi법을 이용하였다(Lee, et al, 2008).

이상의 알고리즘을 이용하여 무차원 압축하중 $p (> b = \pi^2)$, 세장비 k 및 지점조건을 입력하면 무차원 고유진동수 C_i 및 진동형 (\bar{w}, \bar{v}) 를 산정할 수 있는 FORTRAN 프로그램을 작성하였다. 수치해석 예에서 C_i 는 최저차 4개 모드를 계산하고, 회전-회전, 고정-회전, 고정-고정의 지점조건을 고려하였다. 높은 정밀성을 요구하는 두 개의 알고리즘이 결합된 프로그램임에도 불구하고 이 프로그램은 안정적으로 수치해를 산출해 주었다.

수치해석 예를 보이기 전에 먼저 수렴해석을 실시하였다. 그림 4는 C_i 에 대한 단계길이(step size) $\Delta\lambda$ 의 수렴해석 결과를 나타낸다. 참고로 서로 상이한 두 단계길이 $\Delta\lambda (\lambda = s/l)$ 와 $\Delta\phi$ 의 관계가 그림 3(a)에 표현되어 있다. 수치해석에 사용한 해석조건을 그림 상단에 표시하였고, 아치선형의 기하학적 설명변수는 무차원 압축하중 p 보다는 높이비 f 로 표기하였다(표 1 참조). $\Delta\lambda = 1/100$ 의 C_i 는 $\Delta\lambda = 1/200$ 의 C_i 에 유효숫자

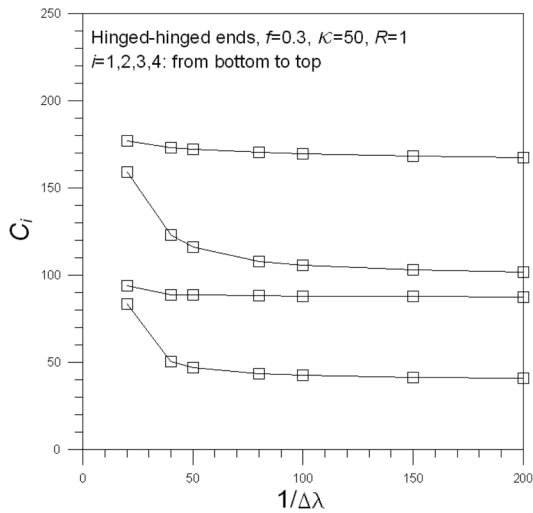


그림 4. 수렴해석

표 2. 회전관성(R)이 C_i 에 미치는 영향

지점 조건	R	무차원 고유진동수, C_i			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
회전-회전	0	42.82	88.51	107.2	170.8
	1	42.58	88.14	105.7	169.6
	차이	-0.56	-0.42	-1.42	-0.71
고정-회전	0	46.21	88.55	112.1	170.9
	1	45.85	88.21	110.6	169.9
	차이	-0.79	-0.39	-1.36	-0.59
고정-고정	0	50.21	88.60	118.9	171.0
	1	49.91	88.29	117.0	170.1
	차이	-0.60	-0.35	-1.62	-0.53

* $f=0.3$, $\kappa=50$

$R=0$: 회전관성 미고려; $R=1$: 고려

차이(%) = $(1 - C_{i,R=0}/C_{i,R=1}) \times 100$

3자리의 정도로 수렴하였다. 일반아치의 경우(Lee et al, 2003)에서는 $\Delta\lambda=1/50 \sim 1/20$ 에서 수렴되는 것과 비교하면 elastica형 아치에서는 그 수렴성이 매우 둔화되었다. 이는 매우 높은 정밀성을 요구하는 두 가지 수치해석의 알고리즘이 결합된 때문으로 판단된다.

표 2는 회전관성(R)이 C_i 에 미치는 영향을 분석한 표이다. 해석조건은 표 하단에 기술되어 있다. 회전관성은 C_i 를 감소시키며 그 영향력은 0.35%~1.62% 수준이다. 이 결과는 구조물의 자유진동 해석에서 회전관성을 고려하면 변위의 증가를 초래하여 고유진동수를 감소시키는 일반적 경향을 잘 반영하고 있다. 제3모드($i=3$)의 경우에는 다른 모드($i=1, 2, 4$)와 비교하여 상대적으로 높은 약 1.5% 정도의 감소율을 보인다. 회전관성은 휨 진동(flexural vibration)과 관련된 관성항이므로 제3모드는 휨 진동 즉 곡률중심방향 변위 w 에 의하여 지배되는 모드로 판단된다.

표 3은 동일한 높이비 $f=0.3$ 을 갖는 elastica형 아치와 포물선형 아치의 고유진동수를 비교한 표이다. 포물선형 아치의 고유진동수 산정은 문헌(Lee et al, 2003)의 수치해석 방법을 따랐다. 이 문헌에서 κ , C_i 의 정규화는 본 논문과는 다르기 때문에 C_i 를 직접 비교할 수는 없다. 따라서 두 아

표 3. Elastica형 아치와 포물선형 아치의 고 유진동수 비교*

지점 조건	구분	고유진동수, F_i (Hz)			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
회전-회전	E	487	1160	2081	3228
	P	387	966	1754	2741
	비율	1.25	1.20	1.18	1.18
고정-회전	E	527	1211	2139	3277
	P	478	1113	1964	2992
	비율	1.10	1.09	1.09	1.10
고정-고정	E	573	1279	2243	3403
	P	570	1276	2190	3241
	비율	1.01	1.00	1.02	1.05

*해석조건은 본문 참조

E: Elastica형 아치; P: 포물선형 아치

비율 = $C_{i,E}/C_{i,P}$

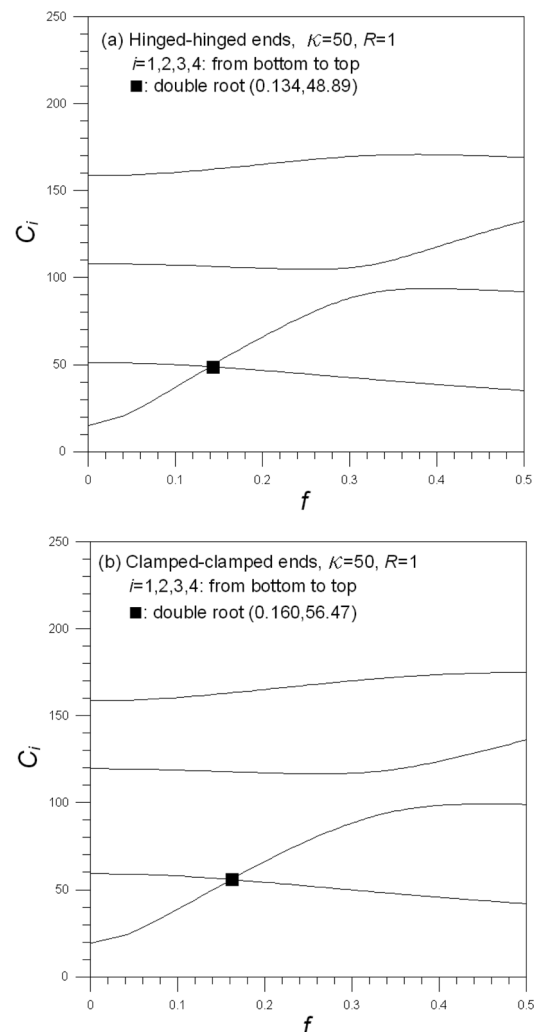


그림 5. C_i - f 곡선: (a) 회전-회전 (b) 고정-고정

치의 고유진동수 F_i (Hz)를 실차원으로 산정하여 서로 비교하였다. 여기에 사용한 아치의 해석조건은 다음과 같다.

- Elastica형 및 포물선형 아치의 제원
 $L=0.3$ m, $H=0.09$ m($f=0.3$)
- 단면 제원
0.0254 m \times 0.00635 m의 직사각형 단면

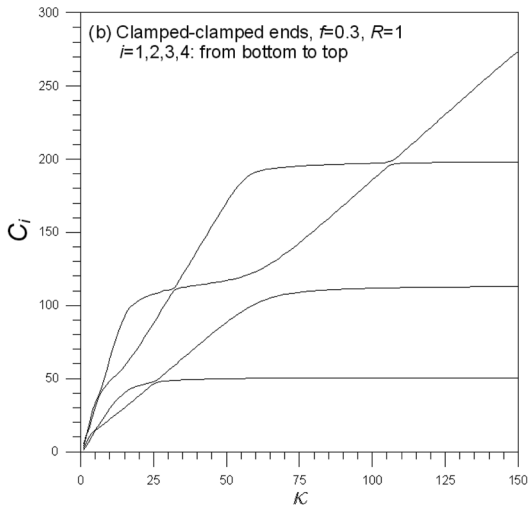
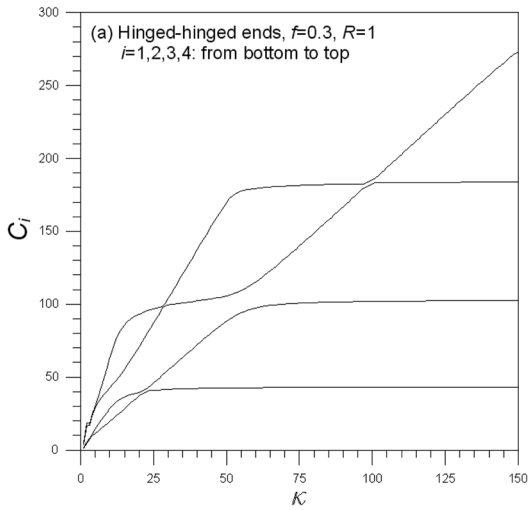


그림 6. C_i - K 곡선: (a) 회전-회전 (b) 고정-고정

• 재료의 기계적 성질

$$\gamma = 2680 \text{ kg/m}^3, E = 6.89 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

이 표와 같이 elastica형 아치의 고유진동수는 포물선형 아치의 고유진동수보다 크게 나타났다. 회전-회전의 경우 20.3%, 고정-회전의 경우 9.5%, 고정-고정의 경우에 2.0%의 증가를 보여 평균 10.6%의 증가를 보였다. 원호형, 포물선형, 정현형 등 전통적인 선형의 아치에서는 상호 간에 약 1~3%의 차이를 보이는 것(Lee and Wilson, 1990)과는 대조적으로 매우 높은 고유진동수의 증가를 보였다. 따라서 elastica형 아치의 선형은 동적 거동에 대하여 매우 강인하며 동하중을 받는 아치는 elastica형 아치로 설계하는 것이 바람직하다고 생각된다.

그림 5는 elastica형 아치의 C_i - f 관계곡선을 나타낸다. 높이비 f 가 증가함에 따라서 C_i 는 증가하는 영역과 감소하는 영역이 있다. 증가하는 영역의 변화율은 감소하는 영역의 변화율보다 상대적으로 더 크다. ■로 표시한 제원에서 두 곡선이 서로 교차하고 있어 한 제원의 아치에서 두 개의 서로 다른 진동형이 존재한다.

그림 6은 elastica형 아치의 C_i - K 관계곡선을 나타낸다. 세장비 K 가 증가함에 따라서 C_i 도 증가하며 이 곡선들은 수평선에 수렴하는 경향이 있다. 예로서 제1모드($i=1$)인 경우에는 $K=25$ 에서 고유진동수 곡선이 수평선에 수렴하고 있어 K 값

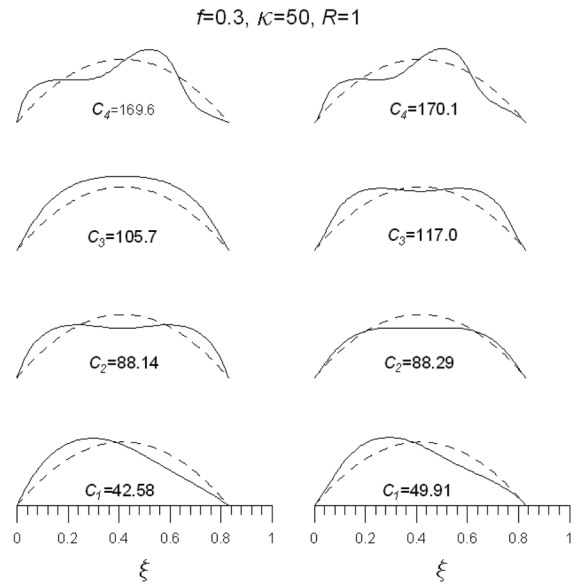


그림 7. 진동형의 예: (a) 회전-회전 (b) 고정-고정

이 150으로 크게 증가하여도 C_i 값에는 거의 변화가 없다.

그림 7은 elastica형 아치의 진동형의 예를 나타낸다. 진동형은 곡률방향 변위 w 와 접선방향 변위 v 로 구분하여 독립적으로 산정되나 이 그림에서는 두 개의 변위를 하나로 조합하여 진동형을 나타내었다. 회전-회전 및 고정-고정의 아치는 선형 및 지점조건의 기하학적 대칭성으로 인하여 진동형은 대칭 진동형과 역대칭 진동형으로 구분되어 나타났다. 즉, 이 그림의 진동형들로부터 제2, 3모드($i=2, 3$)는 대칭 진동형이고, 제1, 4모드($i=1, 4$)는 역대칭 진동형임을 알 수 있다. 이러한 진동형들로부터 진폭의 크기 및 무변위 위치를 알 수 있으므로 아치의 동적 설계에 유용한 자료를 제공할 수 있다.

5. 결 론

이 논문은 elastica형 아치의 자유진동에 관한 연구이다. 대상아치의 선형을 후좌굴 기둥의 정확탄성곡선으로 선정하고, elastica형 아치의 곡률항을 유도하였다. 유도된 elastica형 아치의 곡률항을 일반아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식에 적용하여 무차원 고유진동수 및 진동형을 산출하였다. 이 연구로부터 얻어진 결론은 다음과 같다.

1. Elastica형 아치에서 수치해의 수렴성은 다른 선형의 아치에 비하여 현저히 떨어졌다. 이는 아치의 선형해석이 자유진동 해석에 추가된 때문으로 생각된다.
2. 회전관성은 고유진동수를 감소시키는 요인이며, 휨 진동에서 그 영향력이 더 크다.
3. 세장비(K)가 증가하면 무차원 고유진동수는 증가한다.
4. 동일한 고유진동수에 대하여 동일한 진동형을 나타내는 중복근을 갖는 아치의 제원이 존재한다.
5. Elastica형 아치는 동일한 높이비(f)를 갖는 포물선형 아치에 비하여 약 10.6%의 고유진동수의 증가를 보였다.

Elastica형 아치는 제5항의 결론에서 보인 바와 같이 포물선형 아치의 고유진동수보다 매우 큰 고유진동수를 보이므로 다른 선형의 아치와 비교하여 동적 안정성이 매우 우수

하다. 따라서 기존의 전통적인 아치의 선형과 더불어 elastic 형 아치의 선형도 아치 구조물 설계에 실용적인 선형으로 보급되기를 기대한다.

Elastica형 아치의 정적 안정성 검토에 대한 후속 연구도 계속되어야 한다.

감사의 글

이 논문은 2007년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음 (KRF-2007-521-D00477).

참고문헌

이병구(1987) 양단힌지 정현아치의 자유 진동에 관한 연구. **대한 토목학회논문집**, 대한토목학회, 제7권, 제3호, pp. 101-109.
이병구, 오상진, 최규도(1991) 파선부재의 면내 자유진동 해석. **한국강구조학회논문집**, 한국강구조학회, 제3권, 제1호, pp. 163-172.
BeGole, B.E. (1981) A computer program of dental arch from using catenary curve. *Computer Program in Biomedicine*, Vol. 13, No. 1-2, pp. 93-99.
Chen, W.F. and Atsuta, T. (1977) Theory of beam-columns. *McGraw-Hill Book Co.*, USA.
Falzon, B.G. and Aliabadi M.H. (2008) Buckling and post-buckling structures. *Imperial College Press*, London, UK.
Lee, B.K., Carr, A.J., Lee, T.E., and Ahn, D.S. (2005) Elastics and buckling loads of shear deformable tapered columns. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 5, No. 3, pp. 317-335.

Lee, B.K. and Oh, S.J. (2000) Elastica and buckling load of simple tapered columns with constant volume. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, Issue 18, pp. 2507-2518.
Lee, B.K., Oh, S.J., Li, G., and Choi, K.M. (2003) Free vibration analysis of parabolic arches in cartesian coordinates. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 3, No. 3, pp. 377-390.
Lee, B.K., Oh, S.J., Mo, J.M., and Lee, T.E. (2008) Out-of-plane free vibration of curved beams with variable curvature. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 318, Issues 1-2, pp. 227-246.
Lee, B.K., Park, K.K., Oh, S.J., and Mo, J.M. (1994) Free vibrations of elastica arches. *Journal of Korean Society of Steel Construction*, Vol. 6, No. 4, pp. 149-160.
Lee, B.K. and Wilson, J.F. (1990) Free vibrations of arches with variable curvature. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 136, No. 1, pp. 75-89.
Leontovich, V. (1984) Frames and Arches. McGraw-Hill Book Co., USA.
Moon, J.H., Yoon, K.Y., Lee, T.H., and Lee, H.E. (2007) In-plane elastic buckling of pin-ended shallow parabolic arches. *Engineering Structures*, Vol. 29, No. 10, pp. 2611-2617.
Nieh, K.Y., Huang C.S., and Tseng, Y.P. (2003) An analytical solution for in-plane free vibration and stability of loaded elliptic arches. *Computer & Structures*, Vol. 81, No. 13, pp. 1311-1327.
Perkins, N.C. (1990) Planar vibration of an elastica arch. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 112, pp. 374-379.
Tufekci, E. and Ozdemirci, O. (2006) Exact solution of free in-plane vibration of a stepped circular arch. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 295, pp. 725-738.

(접수일: 2008.7.10/심사일: 2008.8.25/심사완료일: 2008.8.25)