

수리계획 모형을 이용한 최적의 작은 네트워크 찾기

최병주 · 이희상[†]

성균관대학교 산업공학과

Finding Optimal Small Networks by Mathematical Programming Models

ByungJoo Choi · HeeSang Lee

Department of Systems Management Engineering, Sungkyunkwan University, Korea

In this paper we study the Minimum Edge Addition Problem(MEAP) to decrease the diameter of a graph. MEAP can be used for improving the serviceability of telecommunication networks with a minimum investment. MEAP is an NP-hard optimization problem. We present two mathematical programming models : One is a multi-commodity flow formulation and the other is a path partition formulation. We propose a branch-and-price algorithm to solve the path partition formulation to the optimality. We develop a polynomial time column generation sub-routine conserving the mathematical structure of a sub problem for the path partition formulation. Computational experiments show that the path partition formulation is better than the multi-commodity flow formulation. The branch-and-price algorithm can find the optimal solutions for the immediate size graphs within reasonable time.

Keyword: small world, diameter, optimization

1. 서론

자연과 문명 속에서 발생하는 정보, 자본, 그리고 질병의 전이에 관련한 많은 문제는 목적에 맞도록 노드와 에지로 표현되는 그래프로 모형을 만들어서 해결할 수 있다. 그러한 네트워크 모형에서 연결도와 지름은 매우 중요한 특성 중 하나이다.

이 논문에서 우리는 그래프 $G=(V,E)$ 의 지름을 줄이는 문제를 연구한다. 여기서 지름은 N 에 속하는 모든 노드 쌍의 최단 경로 중 가장 큰 경로의 값으로 정의한다. 이 문제는 네트워크 과학에서 많은 관심을 받고 있는 ‘작은 세상 네트워크(Small world networks)’와 관계있다. 작은 세상 네트워크는 임의의 2명의 개인이 짧은 연결 고리만을 통하여 연결 될 수 있다는 사회적 네트워크에서 출발하였다. 1960년대 심리학자 Milgram(1967)

은 처음으로 이런 현상을 실험 하였다. 실험의 목적은 미국 내의 전혀 모르는 사람을 연결하는 짧은 연결 고리를 찾아내는 것이었다. 실험을 통하여 미국 내 임의의 2명을 연결하기 위해서는 평균적으로 6단계를 거치면 된다는 것을 밝혔다.

1990년대 후반, Watts and Strogatz(1998)은 작은 세상 네트워크의 수리적인 특성을 찾아냈다[2]. 이들은 네트워크에 비교적 적은 에지를 추가하는 것만으로도, 잘 연결되지 않은 네트워크를 매우 잘 연결된 작은 세상 네트워크로 만들 수 있음을 실험적으로 보였다. 많은 연구 결과 작은 세상 네트워크의 특성은 크게 다음 3가지로 나타낼 수 있다. 특성 3가지는 i) 평균 경로 거리, ii) 차수 분포, iii) 군집 계수에 관한 것이다.

경로 거리(path length)는 노드 쌍을 연결하는 경로가 포함하는 에지의 개수이다. n 개의 노드를 갖는 그래프의 경우, 모든 노드 쌍의 개수는 $n(n-1)/2$ 개이다. 평균 경로 거리는 각각

본 연구는 2005년도 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임(KRF-2005-041-D00885).

[†]연락처 : 이희상 교수, 440-746 경기도 수원시 장안구 천천동 300 성균관대학교 시스템경영공학과, Fax : 031-290-7610,

E-mail : leehee@skku.edu

2007년 01월 접수, 1회 수정 후 2007년 08월 게재확정.

의 노드 쌍의 최단 거리를 합한 수를 $n(n-1)/2$ 로 나눈 값이다. 작은 세상 네트워크는 무작위 그래프(random graph)와 같이 낮은 평균 경로 거리를 가지며 정규 격자(regular lattice)와 같이 높은 결정 계수를 갖는다. 다음으로 노드 i 의 차수, d_i 는 노드 i 와 연결된 에지의 개수이다. 차수 분포 $P(d)$ 는 그래프에서 임의로 선택된 노드 i 의 차수에 대한 확률 분포이다. Albert and Barabasi(1999)는 작은 세상 네트워크의 차수 분포 $P(d)$ 가 척도 없음(scale-free)을 보였다. 마지막으로 노드 i 의 결정 계수 C_i 는 노드 i 와 인접한 노드들끼리 얼마나 연결되어 있는지를 나타낸다. 노드 i 의 차수가 d_i 라고 하면, 최대 $d_i(d_i-1)/2$ 개의 에지가 노드 i 와 인접한 점들을 연결할 수 있다. 실제 노드 i 와 인접한 노드들을 연결한 에지가 n_i 개 존재한다면, $C_i = 2n_i/d_i(d_i-1)$ 이다. 전체 네트워크에 대한 결정 계수 C 는 모든 점들의 결정 계수를 평균한 값이다.

작은 세상 네트워크의 예제는 물리, 생물학, 사회학, 경제학 등 다양한 분야에서 발견되고 있다. 많은 연구를 통하여 인터넷 라우터, 웹 페이지, 문헌 인용 횟수, 생명체의 먹이 사슬 등이 작은 네트워크 모형을 갖고 있음이 알려졌다.

그러나 이런 Small world 현상에 대한 연구들을 살펴보면, 대부분의 연구들이 네트워크의 수리적 또는 통계적 특성을 설명하려는 수준에 머무르고 있다. 순수 그래프 이론 분야에서는 주어진 그래프에 대하여 노드나 에지의 변화에 따라 지름이 어떻게 변하는지를 연구하였다. Erdős, Rényi, and Sós(1962)와 같은 수학자들이 그래프의 지름과 관련된 문제를 연구하기 시작했다. Chung(1984) and Schoone(1987)은 에지를 추가하거나 제거에 의한 그래프의 지름의 변화 양상을 연구하였다. Hambruch(1998) and Alon(2000)은 트리나 연결 수가 제한된 그래프와 같은 특수한 그래프에 대한 지름 변화 문제 대한 연구를 하였다. 이런 연구들은 특정한 지름을 갖기 위해 필요한 조건이나, 필요한 에지의 상한(또는 하한)값의 제시에 관심을 갖는다. 그러나 이런 연구들은 목표 지름을 갖기 위해 추가되어야 하는 에지 개수의 최적 값이나 이를 구하기 위한 구체적인 알고리즘을 제시하지는 않는다.

최근에 들어서야 작은 세상 네트워크의 응용분야로 시스템의 경영과 제어에 관련 문제들에 적용하려는 시도가 보이기 시작한다. 예를 들어 Grady(2004)는 이미지 프로세싱 시스템을 개선하기 위해 작은 세상 네트워크의 특성을 이용하였다. Elsayed(2004)는 작은 세상 네트워크에 적합한 대역폭을 보장하는 라우팅 알고리즘을 소개한다. Helmy(2003)은 작은 세상 네트워크가 무선 통신 네트워크(Ad hoc나 센서 네트워크)를 개선하는데 사용될 수 있음을 보인다.

이 논문에서 우리는 목표 지름을 갖기 위해서 네트워크에 추가해야 되는 에지의 개수를 최소화 하는 문제를 Minimum Edge Addition Problem (MEAP)로 정의하고 연구한다. 이 문제의 decision version은 NP-complete 클래스의 문제이다. 전통적인 알고리즘으로 NP-complete문제에 대해 정확한 해를 빠른 시간 내에 해결하는 것은 힘들지만, 현실적 크기의 예제에 대한 최적

화 알고리즘을 개발하는 것은 가능하기도 하고 가치도 있다. 이 논문에서는 MEAP에 대해 최적화 알고리즘을 개발하고 알고리즘을 이용하여 현실적 크기의 예제에 대한 전산실험을 수행하였다.

이 논문의 나머지 부분은 다음과 같이 구성된다. 제 2장에서, 우리는 MEAP를 해결하기 위한 두 가지 수리 모형을 소개한다. 제 3장에서, 우리는 두 개의 모형을 해결하기 위한 각각의 알고리즘을 기술한다. 또한 그래프의 수리 구조적인 특성을 이용한 유효 절단 부등식을 소개한다. 제안된 알고리즘의 성능을 평가하기 위한 전산 실험이 제 4장에서 이루어진다. 마지막으로 제 5장에서 논문의 결과를 정리하고 향후 연구 과제를 소개한다.

2. 정수계획 모형

Minimum Edge Addition Problem(MEAP)는 모든 노드 쌍의 최단 거리가 목표 지름 D^* 를 넘지 않도록 제한하는 최소 개수의 에지 집합을 찾는 문제이다. MEAP를 해결하기 위해서는 최단 거리가 D^* 보다 긴 노드 쌍의 거리를 D^* 이하로 만들어야 한다. 우리는 MEAP를 해결하기 위해 두 가지 수리 모형을 소개한다.

N 는 노드의 집합이고 E 는 에지의 집합이다. $G=(V, E)$ 는 단절된 노드가 없고, 방향이 없는 단순(루프와 멀티 에지가 없는) 그래프이다. 모든 에지의 비용은 동일하다.

먼저 우리는 다품종 모형을 기반으로 한 정수계획법을 소개한다. 다음은 MEAP를 다품종 모형으로 정형화하기 위해 필요한 기호이다.

• 기호

D^* : 목표 지름

E^+ : 추가 가능한 에지의 집합, (E 의 여집합)

K : 최단거리가 D^* 보다 큰 노드의 쌍의 집합

$N^-(i) : \{n \in N : (n, i) \in E\}$

$N^+(i) : \{n \in N : (i, n) \in E\}$

x_{ij}^k : 노드 쌍 k 에 대한 에지 (i, j) 의 흐름

y_{ij} : 에지 (i, j) 를 추가하면 1, 아니면 0

$b^k : k$ 에 따른 r.h.s $\begin{cases} i=s & 1 \\ i=t & -1 \\ other & 0 \end{cases}$

• 다품종 모형

$$\min \sum_{(i,j) \in E^+} y_{ij} \quad (1)$$

$$s.t. \sum_{j \in N^+(i)} x_{ij}^k - \sum_{j \in N^-(i)} x_{ij}^k = b^k, \quad \forall k \in K \quad (2)$$

$$\sum_{(i,j) \in (EU E^+)} x_{ij}^k \leq D^*, \quad \forall k \in K \quad (3)$$

$$x_{ij}^k \leq y_{ij}, (i, j) \in E^+, \quad \forall k \in K \quad (4)$$

$$\begin{aligned} x_{ij}^k &\leq y_{ij}, (i, j) \in E^+, \quad \forall k \in K & (5) \\ x &\in R^{|E^+| \cdot |K|}, y \in B^{|E^+|} \end{aligned}$$

제약식 (1)은 추가되는 에지 개수를 최소화 한다. 제약식 (2)는 최단 거리가 목표 지름 보다 큰 노드 쌍 k 의 새로운 경로를 찾으려 하는 제약식이다. 본래 최단 경로를 찾는 선형계획 모형은 그래프에 존재하는 에지 $(i, j) \in E$ 들만 사용한다. 그러나 네트워크에 존재하는 에지들만으로는 목표 지름보다 더 짧은 길을 찾을 수 없기 때문에, 추가 가능한 에지 $(i, j) \in E^+$ 들까지 포함하여 새로운 최단 경로를 찾는다. 그러나 새로운 최단 경로에 사용되는 에지 중 그래프에 추가되는 에지는 제약식 (4)에 의해 제약을 받고 목적식에 추가된다. 제약식 (3)은 각각의 노드 쌍 k 의 거리가 D^* 를 넘지 않도록 제한한다. 제약식 (2)를 이용하여 새로운 최단 경로를 찾으면 최단 경로가 포함하는 모든 에지들의 총합이 노드 쌍 k 의 최단거리가 된다. 제약식 (4)와 제약식 (5)는 에지 (i, j) 를 추가하였을 경우에만 최단 경로를 구하기 위해 에지 (i, j) 를 사용할 수 있도록 제한한다. 즉 그래프의 지름을 줄이기 위해 필요한지 에지만 최단 경로를 찾는 제약식 (2)에 사용된다. 그리고 MEAP는 무방향 그래프를 가정하므로, y_{ij} 가 x_{ij}^k 와 x_{ji}^k 를 모두 제한하도록 하여 이전 결정 변수의 개수를 줄일 수 있다. 결정 변수 y_{ij} 는 정수 조건이고 결정 변수 x_{ij}^k 는 실수 조건이다.

다품종 모형은 $O(|K||E \cup E^+|)$ 변수 ($|E^+|$ 개의 이진 정수 변수를 포함한)와 $O(|K||E^+|)$ 제약식을 갖는다. branch-and-bound 알고리즘을 이용하여 다품종 모형의 정수 최적해를 찾을 수 있을 것이다. 우리는 모형을 개선하기 위해 다품종 모형의 수리 구조적인 특성을 이용하여 유효 부등식을 추가할 수 있을 것이다. 그러나 이러한 유효부등식을 넣기 전 기본적인 모형을 다음에 나오는 경로 분할 모형과 비교하면 계산학적 약점을 가진다.

대조적으로 경로 분할 모형은 다품종 모형 보다 적은 제약식을 갖지만 매우 많은 변수를 갖는다. D^*, E^+, K 는 이전 모형과 똑같이 정의되고 추가로 필요한 기호와 모형은 다음과 같다.

• 기호

- P^k : 거리가 D^* 이하이고 노드 쌍 k 를 연결하는 패스의 집합
- P_{ij}^k : 에지 (i, j) 를 포함하는 패스 집합, $p \in P^k$
- x_p^k : 패스 p 를 선택하면 1, 아니면 0
- y_{ij} : 에지 (i, j) 를 추가하면 1, 아니면 0

• 경로 분할 모형

$$\min \sum_{(i,j) \in E^+} y_{ij} \quad (6)$$

$$s.t. \quad \sum_{p \in P^k} x_p^k = 1, \quad \forall k \in K \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sum_{p \in P_{ij}^k} x_p &\leq y_{ij}, (i, j) \in E^+, \quad \forall k \in K & (8) \\ x &\in R^{|P^k|}, y \in B^{|E^+|} \end{aligned}$$

제약식 (6)은 추가되는 에지 개수를 최소화 한다. 제약식 (7)은 최단 거리가 목표 지름 보다 큰 모든 노드 쌍에 대하여 길이가 D^* 이하인 패스를 하나씩 선택하도록 한다. 제약식 (8)은 선택된 패스가 추가 가능한 에지를 포함하고 있다면, 사용된 에지를 그래프에 추가하도록 제약한다. 결정 변수 y_{ij} 는 정수 조건이고 결정 변수 x_{ij}^k 는 실수 조건이다. 제약식 (8)에서 y_{ij} 들이 정수이면 x_p 들은 자동으로 정수가 된다. 따라서 x_p 들에 대하여 실수 조건을 주어도 MEAP의 최적해를 구할 수 있다.

다품종 모형은 커다란 크기의 네트워크에 대하여 많은 수의 제약식과 변수를 포함한다. 반면에 경로 분할 모형은 수용할 만한 정도의 제약식을 포함하고 선형계획 완화법이 다품종 모형보다 강력하다. 그러나 그것은 매우 많은 수의 변수를 갖는다. 다음 장에서 우리는 이 문제를 해결하기 위한 열 생성 기법을 소개한다. 또한 그래프의 수리 구조적인 특성을 이용하여 유효 절단 부등식을 개발하여 더욱 근접한 선형계획 완화법을 얻는다.

3. 해법

3.1 Branch-and Price 방법

경로의 개수가 지수적으로 증가하기 때문에 경로 분할 모형의 변수 개수는 매우 많다. 따라서 정확한 경로 분할 모형을 얻기 위해서 그래프의 모든 경로를 생성하는 것은 불가능하다. 우리는 경로 분할 모형의 선형계획 완화법을 찾기 위해 열 생성 기법을 이용한다. 열 생성 기법의 기본적인 아이디어는 주인 문제(Master Problem)라고 불리는 제약식 행렬에 모든 열(변수)를 포함하지 않더라도 최적해를 얻을 수 있다는 것이다. 사실 모든 열 중 매우 작은 부분 집합이 최적해인 경우 다른 모든 열(nonbasic)은 무시될 수 있다. 최소화 문제에서는 양의 할인가(reduced cost)를 갖는 모든 열이 해당된다.

우리는 모든 열 중 일부만 갖는 주인 문제를 제한된 주인 문제(Restricted Mater Problem)라고 부른다. 열 생성 알고리즘은 연속적으로 제한된 주인 문제들의 선형계획 완화법을 해결함으로써, 주인 문제의 선형계획 완화법을 해결하는 것이다. MEAP가 최소화 문제이기 때문에 우리는 선형계획법의 최소 할인가가 0보다 작는지 확인한다. 최소 할인가가 0보다 크거나 같다면 다른 모든 열의 할인가 역시 0보다 크거나 같기 때문에 현재 선형계획의 해는 본래 주인 문제의 최적해와 같다. 그러나 최소 할인가가 0보다 작다면 최소 할인가를 갖는 열을 추가하고 이런 과정을 반복한다.

MEAP에 대한 경로 분할 모형의 열 생성 절차는 다음과 같

다. 어떤 제한된 주인 문제에 대하여 $-\pi_{ij}$ 는 경로 분할 문제의 제약식 (7)와 관련된 비음의 듀얼 값이다. σ_k 는 제약식 (8)과 관련된 듀얼 값이다. 우리는 경로와 관련된 결정 변수 x_p 의 추가 여부를 결정하려 한다. 목적식에 추가 가능한 에지의 추가 여부를 결정하는 y_{ij} 만 존재하기 때문에, x_p 의 목적식 계수 c_j 는 0이다. 따라서 노드 쌍 k 에 대한 열 p 의 할인가, \bar{c}_p^k 는 다음과 같다.

$$\bar{c}_p^k = \sum_{(i,j) \in (EU \cup E^+)} \pi_{ij}^k - \sigma^k, \quad \forall p \in P^k, \forall k \in K$$

각각의 제한된 주인 문제에 대하여, 평가 문제(pricing problem)를 효율적으로 해결할 수 있다. 각각의 에지 $(i, j) \in (EU \cup E^+)$ 의 값이 $c_{ij}^k + \pi_{ij}^k$ 인 그래프 상에서, 노드 쌍 k 의 시작점과 도착점에 대한 “최대 D^* 에지” 최단 경로 문제를 해결함으로써 할인가가 가장 작은 열을 선택한다.

“최대 D^* 에지” 최단 경로 문제를 해결하기 위한 알고리즘과 열 생성 알고리즘의 절차는 다음과 같다.

```

While ( $t < D^*$ )
  For each node  $i$ 

     $d(t, i) = \min [d(t-1, i), \min_{j \in N} \{d(t-1, j) + \pi_{ij}^k\}]$ 
  
```

Figure 1. 열 생성을 위한 동적 알고리즘

$c_{p^*}^k$ 는 어떤 노드 쌍 k 에 대한 최단 경로 p^* 의 값이다. 만약 목표 지름보다 긴 모든 노드 쌍에 대하여, $c_{p^*}^k - \sigma \geq 0$ 이라면, 현재 제한된 주인 문제는 주인 문제의 최적해와 동일하다. 만약 $c_{p^*}^k - \sigma < 0$ 인 노드 쌍 k 가 존재한다면, 경로 $p^* \in P^k$ 를 제한된 주인 문제에 추가한다.

Figure 2. 열 생성 절차

제한된 열 생성 기법에 의해 해결된 주인 문제의 선형계획 완화법은 정수해를 보장하지 않는다. 따라서 우리는 선형계획 완화법의 최적해가 정수해가 아니면 branch-and-bound 절차를 적용하는 branch-and-price 알고리즘을 사용한다. branch-and-price 알고리즘의 어려움은 branch-and-bound 과정 중 변수를 고정시키는 것이 평가 문제의 구조를 파괴할 수 있다는 것이다 (Johnson, 1989). 그러나 MEAP를 해결하기 위한 경로 분할 모형에서는 추가되는 열이 정수 변수 y 가 아니라 실수 변수 x_p 이므로 branch-and-bound 과정 중 평가 문제의 구조가 파괴되지 않는다.

3.2 유효 절단 부등식 (Valid Inequality)

우리는 그래프의 수리구조적인 특성을 연구하여 $D^* = 2$ 인

문제에 대한 유효절단 부등식을 개발하였다. 유효 절단 부등식을 정의하기 위해 필요한 기호이다.

• 기호

N_1 : 노드 n 과 직접 연결된 노드 집합

R_{st} : 노드 쌍 k 의 출발 노드 s 와 도착 노드 t 모두에게 직접 연결되지 않은 노드 집합

$E_{st} = (s, t) \cup \{(s_1, t) : s_1 \in S_1\} \cup \{(s, t_1) : t_1 \in T_1\}$

where (s, t) 는 노드 s 와 t 를 직접 연결하는 에지, $\{S_1, T_1\}$ 는 노드 s 의 인접 노드와 노드 t 를 연결하는 에지 집합,

$\{s, T_1\}$ 는 노드 s 와 노드 t 의 인접 노드를 연결하는 에지 집합

MEAP의 제약 조건은 모든 노드 쌍이 D^* 보다 짧은 경로를 가져야 한다는 것이다. 최단 거리가 D^* 보다 큰 노드 쌍의 길이를 줄이기 위해서는 하나 이상의 에지를 추가해야 한다. 이때, 현재 수리 모형들은 추가 가능한 모든 에지 집합을 고려한다. 우리는 네트워크의 수리 구조적인 특성을 연구하여, 특정 노드 쌍을 줄이기 위해 필요한 한정된 에지 집합이 있음을 찾았다.

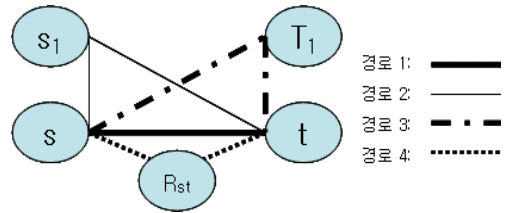


Figure 3. 길이가 2인 경로의 4가지 종류

D^* 보다 긴 노드 쌍 k (s 는 출발 노드, t 는 도착 노드)의 길이를 줄이기 위해 에지를 추가하는 경우, 크게 다음 2가지 경우로 나눌 수 있다. 첫 번째는 추가 가능한 에지 중 한 에지만 사용하여 목표 지름보다 거리가 작은 새로운 경로는 만드는 경우로 1) 에지 (s, t) 를 추가하면 노드 s 와 t 를 직접 연결, 2) 다음으로 출발 노드 s 에 인접한 노드들 중 하나와 도착 노드 t 를 연결, 3) 도착 노드 t 에 인접한 노드들 중 하나와 출발 노드 s 를 연결하는 3가지 방법이 있다. 다른 방법은 4) 추가 가능한 에지들 중 2개의 에지를 추가하여 경로를 생성하는 것이다. 즉, 출발 노드와 도착 노드에 연결되지 않은 노드 $r \in R_{st}$ 을 출발 노드 s 와 도착 노드 t 모두에 연결하는 것이다. <그림 3>은 위에서 언급한 4가지 형태의 경로들이다. 1), 2), 3)은 에지 $(i, j) \in E_{st}$ 가 필요하고, 4)는 에지 $(i, j) \in \{(s, r) : r \in R_{st}\}$ 가 필요하다. 따라서 다음과 같은 유효 절단 부등식이 존재한다.

$$\sum_{(i,j) \in E_{st}} y_{ij} + \sum_{(i,j) \in \{(s,r) : r \in R_{st}\}} y_{ij} \geq 1 \quad (9)$$

D^* 보다 긴 노드 쌍 3개(각각의 출발 노드와 도착 노드는 s

와 t, t 와 u, s 와 u)의 길이를 줄이기 위해 에지를 추가하는 경우, 크게 다음 3가지 경우로 나눌 수 있다. 1) 각각의 노드 쌍에 대하여 에지 하나를 추가하여 각각 길이를 줄이는 경우, 2) 다른 노드 쌍에 추가된 에지를 이용하여 길이를 줄이는 경우, 3) R_{stu} 의 노드 또는 노드들과 연결하는 에지를 추가해 줄이는 경우이다. <그림 4>는 3가지 경우의 에지들이다. 1)은 에지 $(i, j) \in E_{st}$ 와 $(i, j) \in E_{su}$ 를, 2)는 에지 $(i, j) \in E_{st}$ 와 $(i, j) \in E_{tu}$ 를 추가해야 한다. 그리고 3)은 에지 $(i, j) \in \{(t, r) : r \in R_{stu}\}$ 와 $(i, j) \in \{(u, r) : r \in R_{stu}\}$ 를 추가하면 된다. 따라서 다음과 같은 유효 절단 부등식이 존재한다.

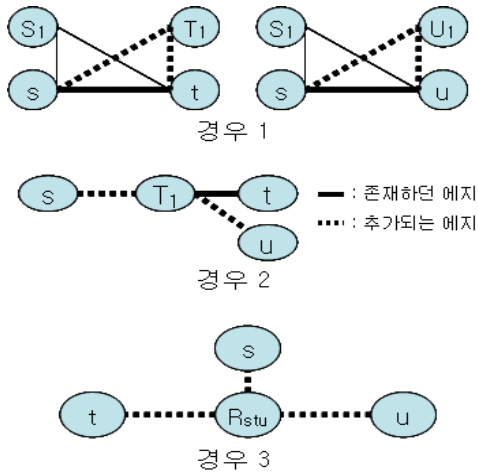


Figure 4. 두 노드 쌍을 줄이는 3가지 경우

$$\sum_{(i,j) \in E_{st}} y_{ij} + \sum_{(i,j) \in E_{sv}} y_{ij} + \sum_{(i,j) \in E_v} y_{ij} + \sum_{(i,j) \in \{(t, R_{stu})\}} y_{ij} + \sum_{(i,j) \in \{(u, R_{stu})\}} y_{ij} \geq 2 \quad (10)$$

4. 실험과 결과

우리는 Xpress-MP 1.16의 라이브러리를 사용하여 Xeon(TM) 3.00GHz 서버 상에서 전산 실험을 수행하였다. 에지의 개수에 따른 3가지 클래스의 네트워크에 대한 실험을 수행하였다. 클래스 1은 $|N|=20$ 이고 $|E|=60$ 을 갖는다. 모든 예제 네트워크의 지름이 3이기 때문에 우리는 $D^*=2$ 인 문제에 대한 실험을 하였다. 클래스 2는 $|N|=20$ 이고 $|E|=45$ 을 갖는다. 모든 예제 네트워크의 지름이 4였지만, $|K|$ 가 매우 작아 쉬운 $D^*=3$ 인 문제는 제외하고 $D^*=2$ 인 문제에 대한 실험만 하였다. 클래스 3은 $|N|=20$ 이고 $|E|=30$ 을 갖는다. 우리는 3가지 실험 세트($D^*=2, 3, 4$ 인 문제)를 설정하였다. <표 1>은 다섯 가지 실험 세트에 대한 입력 매개 변수를 정리한 것이다. <표 1>에서 $|N|$ 은 노드의 개수, $|E|$ 는 에지의 개수, D 와 D^* 는 현재 지름과 목표 지름을 나타낸다.

Table 1. 문제 세트

| set | Class | $ N $ | $ E $ | D | D^* |
|-----|-------|-------|-------|-----|-------|
| 1 | 1 | 20 | 60 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 20 | 45 | 4 | 2 |
| 3 | 3 | 20 | 30 | 5 | 2 |
| 4 | 3 | 20 | 30 | 5 | 3 |
| 5 | 3 | 20 | 30 | 5 | 4 |

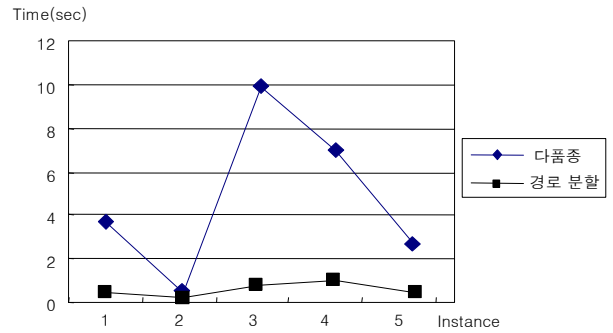


Figure 5. 다품종 모형과 경로 분할 모형 비교

먼저 우리는 다품종 모형과 경로 분할 모형의 기본 모형들을 비교하였다. 우리는 경로 분할 모형의 최적해를 얻기 위해 branch-and-price 알고리즘을, 다품종 모형을 풀기 위해서는 branch-and-bound 알고리즘을 적용하였다. <그림 5>는 실험 세트 1에 대하여 다품종 모형과 경로 분할 모형의 실험 결과를 비교한 그래프이다. 그래프에서 볼 수 있듯이, 경로 분할 모형이 언제나 다품종 모형보다 빨리 최적해를 찾아내는 것을 알 수 있다. 이는 경로 분할 모형의 선형계획 완화법이 최적해에 더욱 근접하고, 하한 경계의 개선 속도가 빠르기 때문이다. 실험 세트 1의 가장 쉬운(제약식과 변수의 개수가 가장 적은) 실험 세트였다. 문제가 어려워질수록 다품종 모형과 경로 분할 모형의 시간 격차는 더욱 드러났다.

우리는 다품종 모형의 성능을 개선하기 위해서 앞 장에서 찾은 유효 절단 부등식을 사용하였다. <그림 6>과 <그림 7>은 각각 실험 세트 2와 3에 대하여 단순 다품종 모형, 식 (9)를 추가한 다품종 모형(VI-1), 그리고 식 (10)을 추가한 다품종 모형(VI-2)에 대한 선형계획 완화법의 최적 값을 비교한 그래프이다. MEAP는 최소화 문제이므로 선형계획 완화법의 최적 값이 클수록 하한 경계가 높다는 것을 의미한다. <그림 6>과 <그림 7>에서 볼 수 있듯이, 실험 세트 2와 3 모두에 대하여 단순 다품종 모형 보다는 유효 절단 부등식 1을 추가한 모형이, 유효 절단 부등식 1보다는 유효 절단 부등식 2를 추가한 모형이 선형계획 완화법의 최적 값이 더 높다는 것을 알 수 있다. 그러나 원래 모형에 많은 제약식이 추가됨에 따라 branch-and-bound 트리의 노드 문제를 해결하는 시간이 길어지기 때문에, 정수 최적해를 찾기 위한 시간에 대한 커다란 개선은 나타나

지 않았다. 또한 에지 개수가 많은 그래프에서는 유효 절단 부등식의 효과가 감소하였다(이것은 기본적으로 추가 가능한 에지 개수가 적기 때문에 유효 절단 부등식에 의해 한정되는 에지 집합과 큰 차이가 나지 않기 때문인 것으로 보인다).

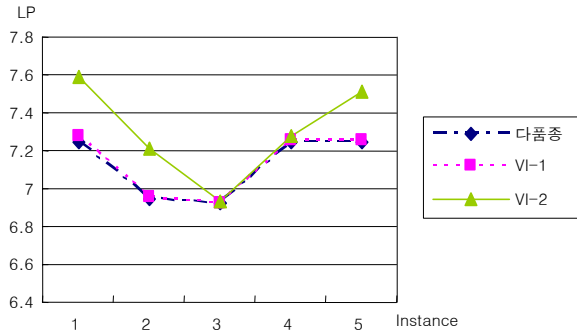


Figure 6. set 2에 대한 다품종 실험 결과

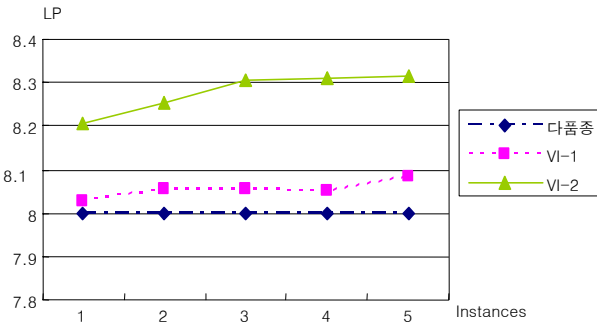


Figure 7. set 3에 대한 다품종 실험 결과

경로 분할 모형에도 똑같은 유효 절단 부등식을 추가할 수 있다. 부등식을 추가하면, 더 높은 선형계획 완화법의 최적 값을 찾는다. 그러나 다품종 모형과 마찬가지로 정수 최적해를 얻기 위한 시간을 특별히 줄이지는 못했다. 많은 유효 절단 부등식 중 꼭 필요한 제약식만 추가하여 선형계획 완화법의 최적 값은 높이고, 문제의 어려움은 최소화하도록 적절한 부등식을 선택하는 것이 필요하다. 즉, branch-and-price-and-cut 알고리즘이 필요하다. 그러나 아직 유효 절단 부등식에 대한 연구가 충분하지 않아 경로 분할 모형은 열 생성 기법만 적용하였다. <표 2>는 branch-and-price 알고리즘을 적용한 경로 분할 모형의 다양한 실험 결과이다. 표에서 LP는 선형계획 완화법의 목적 값, IP는 제안된 알고리즘을 적용해서 네트워크에 추가되어야 하는 에지의 최소 개수이다. B&B는 최종 정수 최적해를 얻기까지 branch-and-bound 트리의 노드 개수이다. 제안된 branch-and-price 알고리즘은 예제 3~4를 제외한 대부분의 예제에 대해서 1시간 안에 최적해를 찾을 수 있었다.

<표 2>로부터 우리는 실험 세트 1, 2, 그리고 3에 대한 다음 그림들과 같은 결과를 얻을 수 있었다. 실험 세트 1, 2, 그리고 3은 각각 60, 45, 30개의 에지를 갖는다. <그림 5>에서 볼 수 있

듯이 에지 개수가 적을수록(즉, 네트워크가 성길 때), 우리는 목표 지름을 만족하기 위해 필요한 최적의 에지들을 찾기 힘들었다. 이것은 일반적으로 에지 개수가 적을수록, 목표 지름보다 긴 노드 쌍의 개수와 추가 가능한 에지의 개수가 커지기 때문이다. 따라서 경로 분할 모형의 제약식과 변수가 많아지게 되고 문제를 최적으로 해결하기 위한 시간이 길어진다.

Table 2. Branch-and-Price 알고리즘의 성능

| Instance | D^* | LP | IP | B&B | time |
|----------|-------|---------|----|-------|-------|
| set 1-1 | 2 | 4.78571 | 5 | 6 | 0.5 |
| set 1-2 | 2 | 3.64286 | 4 | 5 | 0.2 |
| set 1-3 | 2 | 5.37836 | 6 | 14 | 0.8 |
| set 1-4 | 2 | 5.37836 | 6 | 10 | 1 |
| set 1-5 | 2 | 4.28261 | 5 | 16 | 0.5 |
| set 2-1 | 2 | 7.63158 | 12 | 10592 | 1,099 |
| set 2-2 | 2 | 7.44444 | 11 | 1171 | 84.6 |
| set 2-3 | 2 | 7.33333 | 11 | 2580 | 149.4 |
| set 2-4 | 2 | 7.63158 | 10 | 2429 | 256 |
| set 2-5 | 2 | 7.63158 | 11 | 3772 | 260.9 |
| set 3-1 | 2 | 8.42105 | 13 | 2382 | 2,384 |
| set 3-2 | 2 | 8.42105 | 12 | 591 | 377.1 |
| set 3-3 | 2 | 8.42105 | 11 | 76 | 65.6 |
| set 3-4 | 2 | 8.42105 | 14 | 8104 | 5,412 |
| set 3-5 | 2 | 8.42105 | 14 | 6029 | 3,051 |
| set 4-1 | 3 | 5.4532 | 6 | 21 | 1.7 |
| set 4-2 | 3 | 4.76667 | 5 | 30 | 1.2 |
| set 4-3 | 3 | 4.30765 | 5 | 20 | 0.5 |
| set 4-4 | 3 | 4.45385 | 5 | 54 | 4.2 |
| set 4-5 | 3 | 4.76667 | 5 | 27 | 2 |
| set 5-1 | 4 | 2.5 | 3 | 1 | 0 |
| set 5-2 | 4 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| set 5-3 | 4 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| set 5-4 | 4 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| set 5-5 | 4 | 1.5 | 2 | 1 | 0 |

우리는 실험 세트 3, 4, 그리고 5에 대한 비교를 통하여 목표 지름의 변화에 따라 문제가 얼마나 어려워지는지 관찰하였다. 실험 세트 3, 4, 그리고 5는 모두 20개의 노드와 30개의 에지를 갖는다. 그러나 실험 세트에 따라서 네트워크의 지름을 2, 3, 그리고 4로 만들기 위해 필요한 에지들을 찾는다. <표 2>는 실험 세트 3이 실험 세트 4보다 어렵고 실험 세트 4가 실험 세트 5보다 어렵다는 것을 보여 주고 있다. 일반적으로 D^* 가 작을수록 추가해야 되는 에지의 개수가 많아진다. 즉, 더 작은 네트워크를 만들기 위해서는 더 많은 에지가 필요한 것이다.

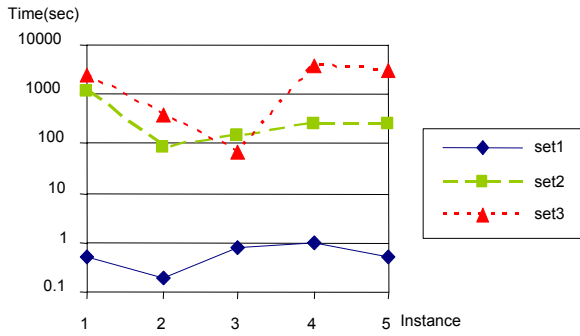


Figure 8. 에지 개수 변화에 따른 비교

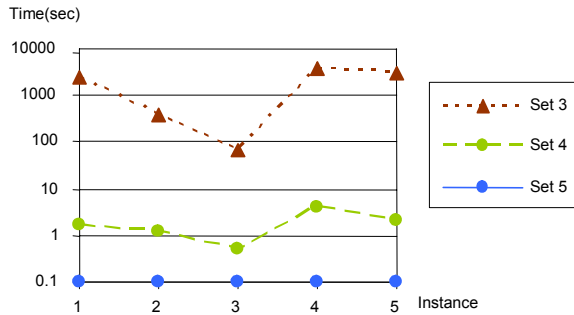


Figure 9. D^* 의 변화에 따른 비교

5. 결론

본 연구에서는 네트워크의 지름을 추가 에지의 최소화 문제에 대한 2가지 수리 모형(다품종 모형과 경로 분할 모형)을 제시하였다. 경로 분할 모형을 해결하기 위해서 우리는 branch-and-price 알고리즘과 branch-and-cut 알고리즘을 제안하였다. 전산 실험은 패스 분할 모형의 성능이 다품종 모형보다 뛰어난을 보였다. 경로 분할 모형에 대한 branch-and-price 알고리즘은 적당한 시간 안에 중형 네트워크의 많은 예제에 대하여 최적해를 찾을 수 있었다.

작은 네트워크 찾기에 관련하여 추후 연구할 만한 가치가 있는 많은 주제가 있다. 에지 변수 y 에 대한 더욱 일반적인 유효 절단 부등식을 개발한다면, 절단면(cutting plane) 알고리즘을 우리의 branch-and-price 알고리즘과 혼합할 수 있다. 따라서 우리의 향후 연구주제는 더 커다란 네트워크에 대한 MEAP를 해결하기 위한 branch-and-price-and-cut 알고리즘을 개발하는 것이다.

참고문헌

Milgram, S. (1967), The small world problem, *Psych Today*, 2, 60-67.
 Watts, D.J. and Strogatz, S.H. (1998), Collective Dynamics of small-world networks, *Nature*, 393, 440-2.
 Albert, R and Barabasi, A. L. (1999), Emergence of scaling in random networks, *Science*, 286, 509-12.
 Johnson, E. L. (1989), Modeling and Strong Linear Programs for Mixed Integer Programming, Algorithms and Model Formulations in Mathematical Programming, *NATO ASI Series*, 51, 1-41.
 Erdős, P. and Rényi, A. (1962), On a problem in the theory of graphs, *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.*, 7, 623-641.
 Erdős, P., Rényi, A., and Sós, V. T. (1962), On a problem of graph theory, *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.*, 7, 623-641.
 Chung, F. R. K. and Garey, M. R. (1984), Diameter Bounds for Altered Graphs, *Journal of Graph Theory*, 8, 511-534.
 Schoone, A. A., Bodlaender, H. L., and van Leeuwen, J. (1987), Diameter Increase caused by Edge Deletion, *Journal of Graph Theory*, 11, 409-427.
 Hambrusch, Susanne E. and Hyeong-Seok Lim (1998), Minimizing the Diameter in Tree Networks under Edge Reductions, *Parallel Processing Letters*, 9(3), 361-371.
 Alon, Noga, András Gyárfás, and Miklós Ruszinkó (2000), Decreasing the Diameter of Bounded Degree Graphs, *Journal of Graph Theory*, 161-172.
 Helmy and Ahmed (2003), Small World in Wireless Networks, *IEEE Comm. Lett.*, 7(10), 490-492.
 Elsayed and Khaled M. F. (2004), HCASP : A Hop-Constrained Adaptive Shortest-Path Algorithm for Routing Bandwidth-Guaranteed Tunnels in MPLS Networks, *Proc. 9th IEEE Symp. Computers and Communications*.
 Grady, Leo and Eric Schwartz (2004), Faster Graph-theoretic image processing via small-world and quadtree topologies, *Proc. 2004 IEEE Conf. on Comp. Vis. & Patt. Rec.*, 2, 360-365.



최병주

성균관대학교 산업공학과 학사
 성균관대학교 산업공학과 석사
 현재: Cyberlogitec 재직
 관심분야: Combinatorial Optimization, 복잡계 시스템 모델링



이희상

서울대학교 산업공학과 학사
 서울대학교 산업공학과 석사
 Georgia Institute of Technology OR 박사
 현재: 성균관대학교 시스템경영공학부 교수
 관심분야: 통신 네트워크, Combinatorial Optimization, 복잡계 시스템 모델링