

## 영역 및 복사 경계의 완전 분할을 통한 유한요소 열전달 해석의 효율화

신의섭<sup>†</sup> · 김용언\* · 김성준\*\*

(2008년 2월 4일 접수, 2008년 7월 4일 수정, 2008년 9월 1일 심사완료)

### Efficient Finite Element Heat Transfer Analysis by Decomposing a Domain and Radiation Boundaries

Eui Sup Shin, Yong Uhn Kim and Sung Jun Kim

**Key Words :** Domain/Boundary Decomposition(영역/경계 분할), Thermal Radiation(열복사), Finite Element(유한요소), Heat Transfer(열전달)

#### Abstract

An efficient domain/boundary decomposition method is applied for heat transfer problems with non-linear thermal radiation boundaries. The whole domain of solids or structures is considered as a set of subdomains, an interface, and radiation interfaces. In a variational formulation, simple penalty functions are introduced to connect an interface or radiation interfaces with neighboring subdomains that satisfy continuity conditions. As a result, non-linear finite element computations due to the thermal radiation boundaries can be localized within a few subdomains or radiation interfaces. Therefore, by setting up suitable solution algorithms for the governing finite element equations, the computational efficiency can be improved considerably. Through a set of numerical examples, these distinguishing characteristics of the present method are investigated in detail.

#### 1. 서론

가혹한 열 환경에 놓인 구조물 또는 고체 재료는 강성과 강도의 저하, 열팽창에 의한 형상 변화 등의 특징을 보인다. 이런 현상은 구조/재료의 수명을 크게 단축시킬 수 있으므로, 일반적인 기계 장치에 대한 열 제어의 기본 개념은 주어진 열 기계학적 환경에서 모든 구성 부품을 규정 온도 범위에서 작동하게 하는 것이다. 따라서 열 제어는 기계 장치의 안전과 보호를 위한 구조 설계 과정에서 필수적인 요소이다. 이를 위해서 전체 또는

서브 시스템 차원에서 정확하고 효율적인 열 해석 및 구조 해석을 수행하여야 한다.

구조물 또는 고체의 열 해석은 에너지 보존 법칙에서 도출된 열전달(열전도) 경계치 문제를 푸는 것이다. 다양한 경계 조건을 처리하기 위해서 Taylor 급수 근사에 근거한 유한차분법이 주로 적용되며, 컴퓨터 소프트웨어로서 SINDA, TAS 등이 사용된다.<sup>(1)</sup> 또한, NASTRAN, ABAQUS 등 유한요소법에 근거한 대부분의 구조 해석 소프트웨어도 다양한 구조 또는 고체 요소에 대한 해석 기능을 갖고 있다.<sup>(2)</sup> 재료 물성치의 온도 의존성이 큰 경우, 전체 영역에 대한 비선형성을 고려한다.

그러나 열전달 문제에서 매우 중요한 접촉 또는 복사 경계 조건의 경우, 영역 기준이 아닌 경계면 기준으로 비선형성을 야기한다.<sup>(3,4)</sup> 따라서 시간 증분 또는 반복 해법 단계에서 전체 영역을 기준으로 직접 수식과 행렬을 처리하면, 자연스럽게 해석의

† 책임저자, 회원, 전북대학교 기계항공시스템공학부  
E-mail : esshin@chonbuk.ac.kr

TEL : (063)270-3995 FAX : (063)270-2472

\* 전북대학교 대학원, 현재 STX 엔파코(주)

\*\* 전북대학교 대학원

효율성이 크게 떨어지게 된다. 이와 같은 문제점을 근본적으로 해결하기 위한 개념은 비선형 경계면 또는 그 인근 영역을 나머지 영역에서 완전 분할한 후, 각종 계산을 독립적으로 수행하는 것이다.<sup>(5,6)</sup> 예를 들어, 전체 영역을 부영역(subdomain), 공유면(interface) 및 경계 공유면(boundary interface) 단위로 분할하여, 접촉 또는 복사 관련 계산을 해당 경계 공유면에 국한시키는 방식이다. 이와 같은 해석 환경이 구현되면, 계산의 효율성을 대폭 향상시킬 수 있다. 그러나 기존 문헌들의 연구 결과는 주로 구조 해석을 위한 영역 분리법에 제한되어 있다.<sup>(7-10)</sup>

본 논문에서는 영역 및 열복사 경계면의 완전 분할을 통한 유한요소 열전달 해석의 효율성 향상에 대하여 검토하였다. 영역/경계 분할 개념을 적용한 변분 정식화 과정에서 부영역과 공유면 또는 복사 공유면 결합을 위한 등식 구속 조건에 벌칙 함수를 이용하였다.<sup>(5,6)</sup> 유한요소 근사에 의하여 지배 방정식을 유도한 후, 구하는 온도 해의 순서에 따라 네 종류의 해석 알고리즘을 제시하였다. 해석 환경의 효율성을 정량적으로 비교하기 위하여, 각각의 알고리즘에 대한 실제 계산 소요량을 산출하였다. 마지막으로 기본적인 수치 예제를 해석함으로써, 본 기법의 주요 특성들을 확인하였다.

## 2. 영역/경계 분할법

### 2.1 변분 정식화 및 유한요소 근사

Fig. 1의 개념도와 같이, 전체 영역을  $N_S$ 개의 부영역  $\Omega^{(k)}$ , 공유면  $\Gamma_I$ , 복사 공유면  $\Gamma_R^{(k-)}$ 의 집합으로 생각한다.  $\Gamma_T^{(k)}$ ,  $\Gamma_H^{(k)}$ ,  $\Gamma_I^{(k+)}$ ,  $\Gamma_R^{(k+)}$ 는 각각 온도 경계면, 열유량 경계면(열복사 없음), 공유면 인접면, 복사 공유면 인접면이다. 기본 변수는 부영역 온도  $\theta_+^{(k)}$ , 공유면 온도  $\varphi_+$ , 복사 공유면 온도  $\psi_{R+}^{(k)}$ 이며, 아래 첨자 +는 초기 온도부터의 변화량을 의미한다.

고체로 구성된 부영역에서 만족하는 열전도 방정식의 미분 형태는 다음과 같다.

$$\rho^{(k)} c_v^{(k)} \dot{\theta}_+^{(k)} = (\kappa_{ij}^{(k)} \theta_{+,j}^{(k)})_i + \rho^{(k)} \bar{r}^{(k)} \quad (1)$$

여기서  $\rho$ 는 밀도,  $c_v$ 는 비열,  $\kappa_{ij}$ 는 열전도 계수,  $\bar{r}$ 는 열원 세기이다. 아래 첨자  $i, j$ 는 좌표 성분이며, 콤마(,)는 편미분을 의미한다.

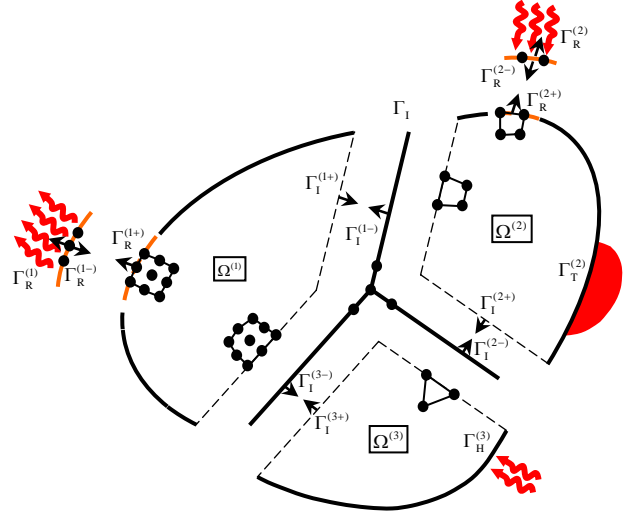


Fig. 1 Schematic of subdomain, interface, and radiation interface

공유면과 복사 공유면의 온도 변화에 대한 연속 조건을 만족하기 위한 열유량의 벌칙 함수 표현은 다음과 같다.

$$q_I^{(k+)} = -q_I^{(k-)} = \varepsilon_{II}^{(k)} (\theta_+^{(k)} - \varphi_+) \quad (2)$$

$$q_R^{(k+)} = -q_R^{(k-)} = \varepsilon_{TR}^{(k)} (\theta_+^{(k)} - \psi_{R+}^{(k)}) \quad (3)$$

여기서 아래 첨자 T는 온도, I는 공유면, R은 복사에 관련된 양을 의미하며,  $\varepsilon$ 은 벌칙 상수이다.

변분 정식화에 필요한 시험 함수로서  $\delta\theta_+^{(k)}$ ,  $\delta\varphi_+$ ,  $\delta\psi_{R+}^{(k)}$ 를 도입하면, 전체 영역에 대한 지배 방정식의 변분 형태(variational form)를 유도할 수 있다.

$$\delta\Pi_T = \sum_{k=1}^{N_S} \delta\Pi_T^{(k)} + \delta\Pi_{II} + \sum_{k=1}^{N_S} \delta\Pi_{TR}^{(k)} = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \delta\Pi_T^{(k)} = & \int_{\Omega^{(k)}} \rho^{(k)} c_v^{(k)} \dot{\theta}_+^{(k)} \delta\theta_+^{(k)} dV \\ & + \int_{\Omega^{(k)}} \kappa_{ij}^{(k)} \theta_{+,j}^{(k)} \delta\theta_{+,i}^{(k)} dV \\ & - \int_{\Omega^{(k)}} \rho \bar{r}^{(k)} \delta\theta_+^{(k)} dV \\ & + \int_{\Gamma_H^{(k)}} \bar{q}^{(k)} \delta\theta_+^{(k)} dS \\ & + \varepsilon_{II}^{(k)} \int_{\Gamma_I^{(k+)}} (\theta_+^{(k)} - \varphi_+) \delta\theta_+^{(k)} dS \\ & + \varepsilon_{TR}^{(k)} \int_{\Gamma_R^{(k+)}} (\theta_+^{(k)} - \psi_{R+}^{(k)}) \delta\theta_+^{(k)} dS \end{aligned} \quad (5)$$

$$\delta\Pi_{II} = \sum_{k=1}^{N_S} \varepsilon_{II}^{(k)} \int_{\Gamma_I^{(k-)}} (\varphi_+ - \theta_+^{(k)}) \delta\varphi_+ dS \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{TR}^{(k)} = & \varepsilon_{TR}^{(k)} \int_{\Gamma_R^{(k-)}} (\psi_{R+}^{(k)} - \theta_+^{(k)}) \delta\psi_{R+}^{(k)} dS \\ & + \int_{\Gamma_{RI}^{(k)}} h_R^{(k)} (\psi_{R+}^{(k)} - \bar{\theta}_{R+}^{(k)}) \delta\psi_{R+}^{(k)} dS \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 열복사 계수  $h_R$ 은 표면 방사율 및 형태 계수에 의존하는 상수  $\zeta$ , Stefan-Boltzmann 상수  $\sigma$ , 열원의 절대 온도  $\bar{\theta}_R$ 로 표현된다.

$$h_R^{(k)} = \zeta^{(k)} \sigma (\psi_R^{(k)2} + \bar{\theta}_R^{(k)2}) (\psi_R^{(k)} + \bar{\theta}_R^{(k)}) \quad (8)$$

유한요소법을 적용하여 온도 및 온도 구배를 공간에 대하여 이산화한 후, 변분 형태의 식 (4)~(7)를 근사하면 다음 식을 얻는다.

$$\mathbf{M}_T^{(k)} \dot{\boldsymbol{\theta}}^{(k)} + \mathbf{K}_T^{(k)} \boldsymbol{\theta}^{(k)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{r}_T^{(k)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{\text{TI}}^{(k)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{\text{TR}}^{(k)} = \mathbf{0} \quad (9)$$

$$\sum_{k=1}^{N_S} {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{\text{TI}}^{(k)} = \mathbf{0} \quad (10)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{\text{TR}}^{(k)} + {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{q}}_R^{(k)} = \mathbf{0} \quad (11)$$

여기서 왼쪽 위 첨자  $t+\Delta t$ 는 적용 시각을 의미한다. 또한,  $\boldsymbol{\theta}$ 는 부영역 온도 벡터,  $\mathbf{M}_T$ 는 열용량 행렬,  $\mathbf{K}_T$ 는 열전도 행렬,  $\mathbf{r}_T$ 는 외부 열원과 경계면을 통한 열유량 벡터이다. 또한, 공유면과 복사 공유면에 관련된 벌칙 벡터, 비선형성을 갖는 열복사 벡터는 다음과 같이 표현된다.

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{\text{TI}}^{(k+)} = \mathbf{P}_{\text{TI1}}^{(k)} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\theta}^{(k)} - \mathbf{P}_{\text{TI2}}^{(k)} \boldsymbol{\phi} \quad (12)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{\text{TI}}^{(k-)} = -\mathbf{P}_{\text{TI2}}^{(k)} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\theta}^{(k)} + \mathbf{P}_{\text{TI4}}^{(k)} \boldsymbol{\phi} \quad (13)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{\text{TR}}^{(k+)} = \mathbf{P}_{\text{TR1}}^{(k)} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\theta}^{(k)} - \mathbf{P}_{\text{TR2}}^{(k)} \boldsymbol{\psi}_R^{(k)} \quad (14)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{\text{TR}}^{(k-)} = -\mathbf{P}_{\text{TR2}}^{(k)T} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\theta}^{(k)} + \mathbf{P}_{\text{TR4}}^{(k)} \boldsymbol{\psi}_R^{(k)} \quad (15)$$

$${}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{q}}_R^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{Q}}_{R1}^{(k)} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\psi}_R^{(k)} - {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{q}}_{R2}^{(k)} \quad (16)$$

여기서  $\boldsymbol{\phi}$ 는 공유면 온도 벡터,  $\boldsymbol{\psi}_R$ 는 복사 공유면 온도 벡터이며, ( $\tilde{\cdot}$ )는 비선형 항을 의미한다.

마지막으로 온도 벡터  ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\theta}$ 를 시간 영역에 대해 이산화하고 식 (9)~(11)을 정리하면, 블록 행렬 형태의 연립 방정식이 유도된다.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_T^{(1)} & \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{\text{TI2}}^{(1)} & -\mathbf{P}_{\text{TR2}}^{(1)} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \hat{\mathbf{K}}_T^{(N_S)} & -\mathbf{P}_{\text{TI2}}^{(N_S)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{\text{TR2}}^{(N_S)} \\ -\mathbf{P}_{\text{TI2}}^{(1)T} & \cdots & -\mathbf{P}_{\text{TI2}}^{(N_S)T} & \hat{\mathbf{K}}_{\text{TI}} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{P}_{\text{TR2}}^{(1)T} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{K}}_{\text{TR}}^{(1)} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{P}_{\text{TR2}}^{(N_S)T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{K}}_{\text{TR}}^{(N_S)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\times \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\theta}^{(1)} \\ \vdots \\ {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\theta}^{(N_S)} \\ {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\phi} \\ {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\psi}_R^{(1)} \\ \vdots \\ {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\psi}_R^{(N_S)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{f}}_T^{(1)} \\ \vdots \\ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{f}}_T^{(N_S)} \\ \mathbf{0} \\ {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{q}}_{R2}^{(1)} \\ \vdots \\ {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{q}}_{R2}^{(N_S)} \end{bmatrix}$$

여기서 ( $\hat{\cdot}$ )는 비정상(unsteady) 효과 등이 포함된 유효(effective) 강성 행렬 및 하중 벡터를 뜻한다.

## 2.2 해석 알고리즘 및 총 연산 횟수

최종적으로 유도된 연립 방정식 (17)은 비선형 항을 포함하고 있으므로, Newton 반복법 등 적절한 반복 해법을 통하여 효율적인 해석 알고리즘을 설정하여야 한다. 이 과정에서 가장 유의해야 할 점은 복사 공유면에 대한  $\hat{\mathbf{K}}_{\text{TR}}^{(k)}$ ,  $\tilde{\mathbf{q}}_{R2}^{(k)}$ 에 모든 비선형성이 국한되어 있는 블록 행렬의 형태이다. 이와 같은 연립 방정식의 해를 직접 구하는 경우, 논리적으로 해석의 높은 효율성을 기대할 수 없다.

이에 대한 근본적인 해결 방안은 블록 행렬 형태의 연립 방정식을 완전 분해하는 것이다. 공유면과 복사 공유면의 구속 조건을 식 (12)~(15)의 벌칙 행렬로 처리한 결과 모든 유효 강성 행렬이 양정치(positive definite) 성질을 갖게 되며, 역행렬 등의 연산이 매우 용이하다. 따라서 블록 행렬을 적절히 분해함으로써 모든 행렬 조립과 수치 계산을 부영역, 공유면, 복사 공유면 차원에서 효율적으로 진행할 수 있다.

본 논문에서는 열복사에 관련된 비선형 행렬을 고려하여, 네 종류의 해석 알고리즘을 구성하였다. 먼저 영역과 복사 경계면을 모두 독립적으로 분할한 경우(영역/경계 분할), 구하는 해의 순서에 따라  $\boldsymbol{\psi}$ - $\boldsymbol{\phi}$ - $\boldsymbol{\theta}$ ,  $\boldsymbol{\phi}$ - $\boldsymbol{\psi}$ - $\boldsymbol{\theta}$ 라 명명하였다. 예를 들어, 해석 알고리즘  $\boldsymbol{\psi}$ - $\boldsymbol{\phi}$ - $\boldsymbol{\theta}$ 에서는 순차적으로 복사 공유면 온도  $\boldsymbol{\psi}_R$ , 공유면 온도  $\boldsymbol{\phi}$ , 부영역 온도  $\boldsymbol{\theta}$ 를 구한다. 반면, 해석 알고리즘  $\boldsymbol{\psi}$ - $\boldsymbol{\theta}$ 는 영역을 부영역으로 분할하지 않고 복사 경계면만 분할하는 경우이다(경계 분할). 마지막으로 해석 알고리즘  $\boldsymbol{\phi}$ - $\boldsymbol{\theta}$ 는 복사 경계면을 별로 분할하지 않고 영역만 분할하는 경우이다(영역 분할).

실제 해석의 효율성을 정량적으로 비교하기 위하여 각각의 해석 알고리즘에서 소요되는 총 연산 횟수 FLOPs(floating-point operations)를 Table 1에 정리하였다. FULL은 영역/경계 분할법을 적용하지 않은 경우이다. 선형화된 연립 방정식 해법으로는 가우스 소거법에 근거한 LU 분해법을 이용하였다. 따라서 일반 행렬로 저장된 연립 방정식의 연산 횟수는 삼각 분해 단계  $f_1(D)$ 와 대입 단계  $f_2(D)$ 로 구분된다. 마찬가지로 대역(banded) 행렬의 경우, 삼각 분해 단계  $f_3(D, B)$ 와 대입 단계  $f_4(D, B)$ 로 구분된다. 여기서  $D$ 는 해당 행렬의 총 자유도,  $B$ 는 대역폭의 크기를 의미한다. 또한, 비선형 해석을 위한 반복 해법에서의 총 반복 횟수를  $N_{\text{IT}}$ 로 표기하였다. FULL의 FLOPs를 예로 들면, 삼각 분해에서  $N_{\text{IT}} \times f_3(D_0, B_0)$ , 대입에서  $N_{\text{IT}} \times f_4(D_0, B_0)$ 의 많은 계산량이 소요됨을 예측할 수 있다.

**Table 1** FLOPs for solution algorithms

	$\Omega/\Gamma$	Decomposition Phase	Substitution Phase
FULL	$\Omega$	$N_{IT} \times f_3(D_0, B_0)$	$N_{IT} \times f_4(D_0, B_0)$
	$\Omega^{(k)}$	$1 \times f_5(D_0^{(k)}, B_0^{(k)})$	$(D_0^{(k)} + D_v^{(k)} + N_{IT}) \times f_4(D_0^{(k)}, B_0^{(k)})$
$\psi$ - $\varphi$ - $\theta$	$\Gamma_1$	$1 \times f_1(D_\varphi)$	$(D_\varphi^{(k)} + N_{IT}) \times f_2(D_\varphi)$
	$\Gamma_R$	$N_{IT} \times f_1(D_\varphi)$	$N_{IT} \times f_2(D_\varphi)$
	$\Omega^{(k)}$	$1 \times f_5(D_0^{(k)}, B_0^{(k)})$	$(D_0^{(k)} + D_v^{(k)} + N_{IT}) \times f_4(D_0^{(k)}, B_0^{(k)})$
$\varphi$ - $\psi$ - $\theta$	$\Gamma_1$	$N_{IT} \times f_1(D_\varphi)$	$N_{IT} \times f_2(D_\varphi)$
	$\Gamma_R^{(k)}$	$N_{IT} \times f_1(D_\varphi^{(k)})$	$(N_{IT} \times D_\varphi^{(k)} + N_{IT}) \times f_2(D_\varphi^{(k)})$
$\psi$ - $\theta$	$\Omega$	$1 \times f_3(D_0, B_0)$	$(D_\varphi^{(k)} + N_{IT}) \times f_4(D_0, B_0)$
	$\Gamma_R$	$N_{IT} \times f_1(D_\varphi)$	$N_{IT} \times f_2(D_\varphi)$
$\varphi$ - $\theta$	$\Omega^{(k)}$	$N_{IT} \times f_5(D_0^{(k)}, B_0^{(k)})$	$(N_{IT} \times D_0^{(k)} + N_{IT}) \times f_4(D_0^{(k)}, B_0^{(k)})$
	$\Gamma_1$	$N_{IT} \times f_1(D_\varphi)$	$N_{IT} \times f_2(D_\varphi)$

### 3. 해석 결과 및 고찰

영역/경계 분할법의 정확성 및 효율성을 검토하기 위하여 두 종류의 간단한 수치 예제에 대한 해석을 수행하였다.

#### 이차원 원공 모델

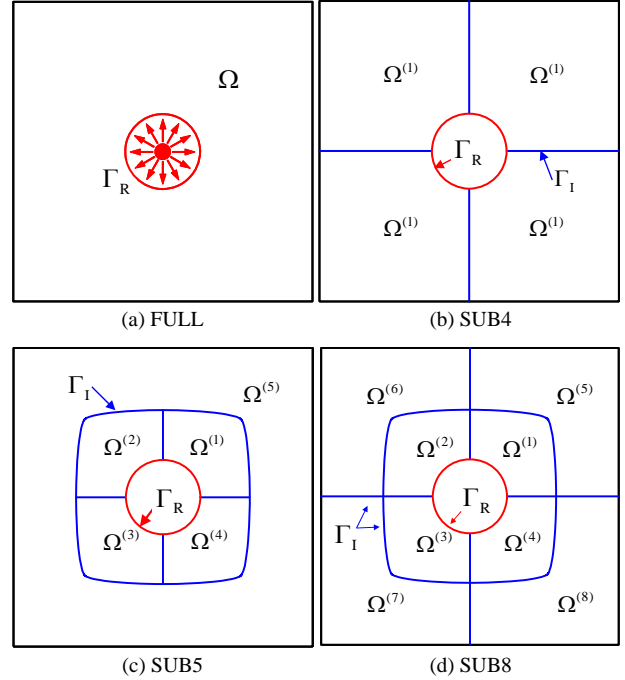
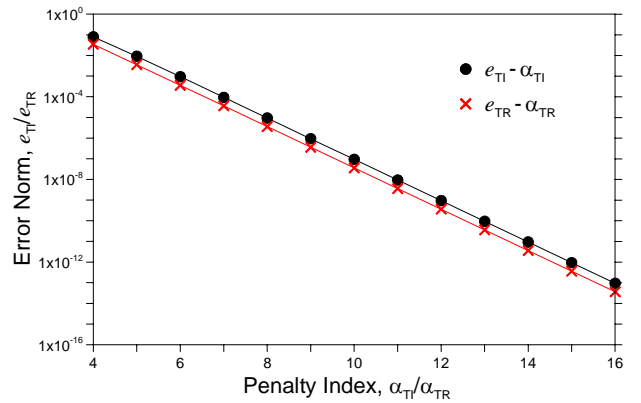
Fig. 2와 같이, 원공에서 복사 경계면을 갖는 복합재료 적층판의 열전달 문제를 해석하였다. 복합재료 물성 값은  $\rho = 1,560 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_v = 679 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ ,  $\kappa_1 = 48.1 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ ,  $\kappa_2 = 0.93 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ , 적층 순서  $[0/\pm 45/90]_S$ , 적층판 크기  $16 \times 16 \times 0.01 \text{ m}$ , 원공 반경  $2 \text{ m}$ 이다. 또한, 적층판 초기 온도는  $300 \text{ K}$ , 식 (8)의 복사 열원 온도  $\bar{\theta}_R$ 는  $400 \text{ K}$ 이다. 상하 경계면은 단열되어 있으며, 좌우 경계면의 온도는 일정하다.

영역/경계 분할 효과를 자세히 검토하기 위해서 네 종류의 유한요소 모델을 선택하였다. 기준 모델 FULL은 129,600개(반경 방향 180개, 원주 방향 720개)의 사각형 요소를 사용하였다. SUB4, SUB5, SUB8은 각각 4개, 5개, 8개의 부영역으로 전체 영역을 분할한 모델이다. SUB5, SUB8의 내부 부영역  $\Omega^{(1)} \sim \Omega^{(4)}$ 는 반경 방향으로 80개 요소를 갖는다. 모든 공유면 절점은 인접 부영역 절점과 일치한다.

먼저 유한요소 해의 정확성을 검증할 목적으로, 벌칙 상수에 따른 모델 SUB8의 오차 분석 결과를 Fig. 3에 제시하였다. 벌칙 지수  $\alpha_{TI}$ ,  $\alpha_{TR}$ 는 열전도 행렬의 대각 성분 중 최대 값을 기준으로 하여 벌칙 상수  $\varepsilon_{TI}$ ,  $\varepsilon_{TR}$ 를 표준화한 값이다.

$$\varepsilon_{TI}^{(k)} = 10^{\alpha_{TI}} \times \max_i (\mathbf{K}_T^{(k)})_{ii} \quad (18)$$

$$\varepsilon_{TR}^{(k)} = 10^{\alpha_{TR}} \times \max_i (\mathbf{K}_T^{(k)})_{ii} \quad (19)$$


**Fig. 2** Domain/boundary decomposition models for 2D heat transfer problems

**Fig. 3** Error norm vs. penalty index (SUB8)

또한 공유면과 복사 공유면에서 온도 해의 오차 norm을 다음과 같이 정의하였다.

$$e_{TI} = \frac{\|\theta - \varphi\|_{\Gamma_1}}{\|\theta\|_{\Gamma_1}} = \left[ \frac{\sum_{k=1}^{N_S} ({}^t\theta^{(k)T} {}^t\mathbf{p}_{TI}^{(k+)} + {}^t\varphi^T {}^t\mathbf{p}_{TI}^{(k-)})}{\sum_{k=1}^{N_S} {}^t\theta^{(k)T} {}^t\mathbf{P}_{TI}^{(k)} {}^t\theta^{(k)}} \right]^{0.5} \quad (20)$$

$$e_{TR} = \frac{\|\theta - \psi_R\|_{\Gamma_R}}{\|\theta\|_{\Gamma_R}} = \left[ \frac{\sum_{k=1}^{N_S} ({}^t\theta^{(k)T} {}^t\mathbf{p}_{TR}^{(k+)} + {}^t\psi_R^T {}^t\mathbf{p}_{TR}^{(k-)})}{\sum_{k=1}^{N_S} {}^t\theta^{(k)T} {}^t\mathbf{P}_{TRI}^{(k)} {}^t\theta^{(k)}} \right]^{0.5} \quad (21)$$

그래프에서 넓은 범위에 걸쳐 안정적인 해를 제공하며, 지수에 비례하여 오차가 감소함을 알 수 있다. 이후 해석은  $\alpha_{TI} = \alpha_{TR} = 10$ 으로 고정하였다.

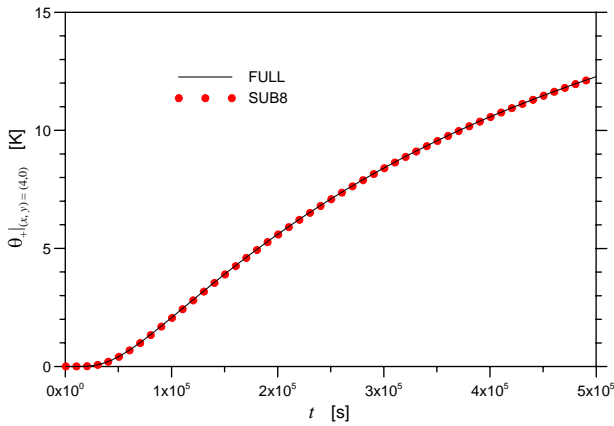


Fig. 4 Time response of temperature change (SUB8)

영역/경계 분할 모델 SUB8의 공유면에 놓여 있는 절점  $(x,y)=(4,0)$ 에서의 온도 이력을 Fig. 4에 도시하였다. 복사 경계면에서의 열 유입에 따라 점진적으로 온도가 상승하는 경향을 보인다. Fig. 3의 결과와 같이, 별칙 지수  $\alpha_{T1} = 10$ 에서 공유면 온도 해는  $10^{-7}$  정도의 매우 작은 오차를 갖는다. 따라서 FULL과 SUB8의 온도 곡선에서 가시적인 차이는 발생하지 않는다.

다음으로 영역/경계 분할을 적용한 해석 모델의 효율성을 정량적으로 분석하였다. Fig. 5~7은 SUB4, SUB5, SUB8에 대하여 반복 계산 횟수  $N_{IT}$ 의 변화에 따른 효율성 향상 결과이다. 영역 분할을 하지 않은 FULL의 FLOPs를 기준 값인 100%로 하였다. 전반적으로 반복 횟수가 증가할수록 효율성이 향상되며, 이는 반복 계산 단계 이전의 초기 계산량 비율이 상대적으로 줄어들기 때문이다. 영역과 경계를 모두 분할한 해석 알고리즘  $\psi\text{-}\phi\text{-}\theta$ 가 가장 좋은 효율성을 제공하였다. SUB8의 경우는 FLOPs가 0.966%까지 감소하였으며, 이를 환산하면 효율성이 103배 증가함을 의미한다. 복사 경계면만 분할한 해석 알고리즘  $\psi\text{-}\theta$ 도 효율성이 크게 향상되었다. 그러나 영역만을 분할한 해석 알고리즘  $\phi\text{-}\theta$ 는 부영역의 크기나 형상에 따라 효율성이 좌우됨을 알 수 있다. 특히, SUB4는 모든 부영역이 복사 경계면을 가지므로 효율성이 오히려 악화된다. 반면, SUB5와 SUB8 계산량은 각각 33.1%, 36.5% 감소하였는데, 이는 복사 경계면을 갖는 내부 4개 부영역의 분할 상태가 비교적 양호하기 때문이다.

Table 2는  $N_{IT} = 20,000$ 일 때 영역/경계 분할 모델 SUB4의 FLOPs 산출 내역이다. 부영역, 공유면, 복사 공유면의 요소 수, 강성 행렬 크기, 반복 연산 횟수 등에 관한 정보를 정리하였다. 각 해석 알고리즘별로 많은 계산량이 소요되는 계산 단계와 영역 등을 구체적으로 파악할 수 있다. 일반적으로 복사 공유면에 관련된 행렬 크기가 작을수록 비선형 반복 계산에 대한 부담이 경감되며, 해석의 효율성이 크게 향상된다.

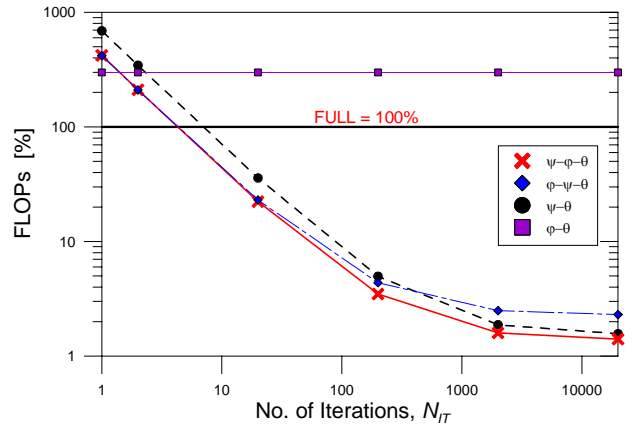


Fig. 5 FLOPs vs. number of iterations (SUB4)

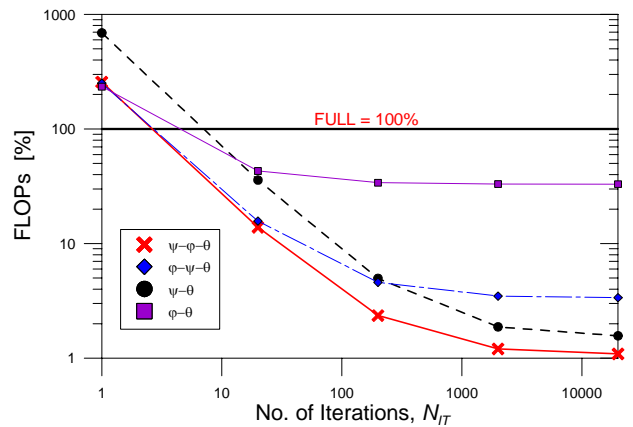


Fig. 6 FLOPs vs. number of iterations (SUB5)

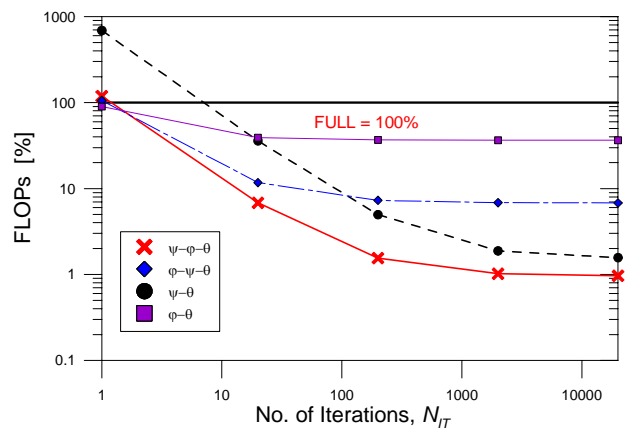


Fig. 7 FLOPs vs. number of iterations (SUB8)

영역 분할에 의한 부영역 크기가 해석 효율성에 미치는 영향을 Fig. 8~9에 제시하였다.  $N_{IT} = 20,000$ 일 때 SUB5와 SUB8에 대한 결과이며, 부영역 비율  $\Omega^{(1)}/\Omega^{(5)}$ 는 내부 부영역  $\Omega^{(1)}$ ( $\sim\Omega^{(4)}$ )과 외부 부영역  $\Omega^{(5)}$ ( $\sim\Omega^{(8)}$ )의 반경 방향 요소 수 비율이다. 부영역 크기의 변화에 따른 해당 강성 행렬 대역폭의 변화도 함께 도시하였다. 해석 알고리즘  $\psi\text{-}\phi\text{-}\theta$ ,  $\psi\text{-}\theta$ 의 경우, 부영역 크기가 FLOPs에 미치는 영향은

Table 2 Details of FLOPs for solution algorithms (SUB4)

Algor.	$\Omega/\Gamma_I/\Gamma_R$	Elements	Matrix Size		No. of Calculations		Total MFLOPs			
			D.O.F	H.B.W	Decomp.	Substi.	Decomp.	Substi.	Total	Percent
<b>FULL</b>	$\Omega$	129,600	130,320	365	20,000	20,000	<b>345,640,604.4</b>	<b>2,844,809.4</b>	<b>348,485,413.8</b>	<b>100.000</b>
$\psi-\phi-\theta$	$\Omega^{(1)}$	32,400	32,761	290	1	20,543	2,729.5	581,589.4	584,319.0	0.168
	$\Omega^{(2)}$	32,400	32,761	290	1	20,543	2,729.5	581,589.4	584,319.0	0.168
	$\Omega^{(3)}$	32,400	32,761	290	1	20,543	2,729.5	581,589.4	584,319.0	0.168
	$\Omega^{(4)}$	32,400	32,761	290	1	20,543	2,729.5	581,589.4	584,319.0	0.168
	$\Gamma_I$	720	724	<del>X</del>	1	20,724	126.5	16,287.0	16,413.5	0.005
	$\Gamma_R$	720	724	<del>X</del>	20,000	20,000	2,530,018.0	15,718.0	2,545,736.0	0.731
	Total	131,040	—	—	—	—	<b>2,541,062.6</b>	<b>2,358,362.8</b>	<b>4,899,425.4</b>	<b>1.406</b>
$\phi-\psi-\theta$	$\Omega^{(1)}$	32,400	32,761	290	1	20,543	2,729.5	581,589.4	584,319.0	0.168
	$\Omega^{(2)}$	32,400	32,761	290	1	20,543	2,729.5	581,589.4	584,319.0	0.168
	$\Omega^{(3)}$	32,400	32,761	290	1	20,543	2,729.5	581,589.4	584,319.0	0.168
	$\Omega^{(4)}$	32,400	32,761	290	1	20,543	2,729.5	581,589.4	584,319.0	0.168
	$\Gamma_I$	720	724	<del>X</del>	20,000	20,000	2,530,018.0	15,718.0	2,545,736.0	0.731
	$\Gamma_R^{(1)}$	180	181	<del>X</del>	20,000	7,260,000	39,530.4	356,110.3	395,640.7	0.114
	$\Gamma_R^{(2)}$	180	181	<del>X</del>	20,000	7,260,000	39,530.4	356,110.3	395,640.7	0.114
	$\Gamma_R^{(3)}$	180	181	<del>X</del>	20,000	7,260,000	39,530.4	356,110.3	395,640.7	0.114
	$\Gamma_R^{(4)}$	180	181	<del>X</del>	20,000	7,260,000	39,530.4	356,110.3	395,640.7	0.114
Total	131,040	—	—	—	—	<b>2,699,057.7</b>	<b>3,766,516.8</b>	<b>6,465,574.5</b>	<b>1.855</b>	
$\psi-\theta$	$\Omega$	129,600	130,320	365	1	20,720	17,282.0	2,947,222.5	2,964,504.6	0.851
	$\Gamma_R$	720	720	<del>X</del>	20,000	20,000	2,488,315.2	15,544.8	2,503,860.0	0.718
	Total	130,320	—	—	—	—	<b>2,505,597.2</b>	<b>2,962,767.3</b>	<b>5,468,364.6</b>	<b>1.569</b>
$\phi-\theta$	$\Omega^{(1)}$	32,400	32,761	290	20,000	7,260,000	54,590,481.6	205,536,647.6	260,127,129.2	74.645
	$\Omega^{(2)}$	32,400	32,761	290	20,000	7,260,000	54,590,481.6	205,536,647.6	260,127,129.2	74.645
	$\Omega^{(3)}$	32,400	32,761	290	20,000	7,260,000	54,590,481.6	205,536,647.6	260,127,129.2	74.645
	$\Omega^{(4)}$	32,400	32,761	290	20,000	7,260,000	54,590,481.6	205,536,647.6	260,127,129.2	74.645
	$\Gamma_I$	720	724	<del>X</del>	20,000	20,000	2,530,018.0	15,718.0	2,545,736.0	0.731
	Total	130,320	—	—	—	—	<b>220,891,944.4</b>	<b>822,162,308.4</b>	<b>1,043,054,252.8</b>	<b>299.311</b>

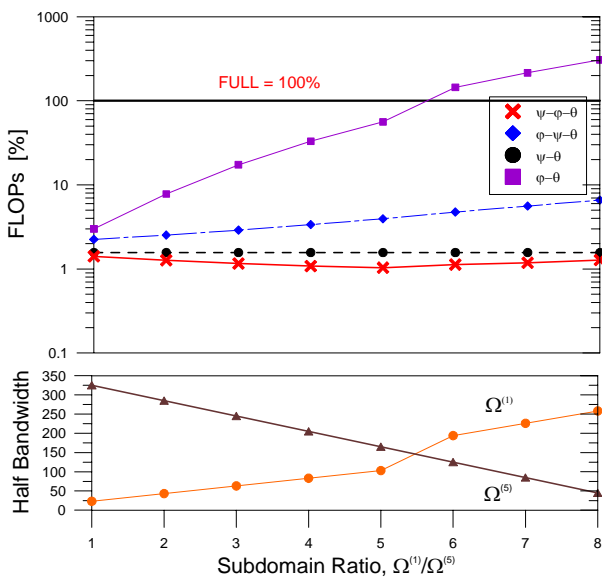


Fig. 8 FLOPs vs. subdomain ratio (SUB5)

매우 작다. SUB5에 대한  $\phi-\psi-\theta$ 의 경우, 내부 부영역이 작을수록 FLOPs가 약간 감소하는데, 공유면 절점 수 축소에 따라 공유면 단위의 계산량이 감소

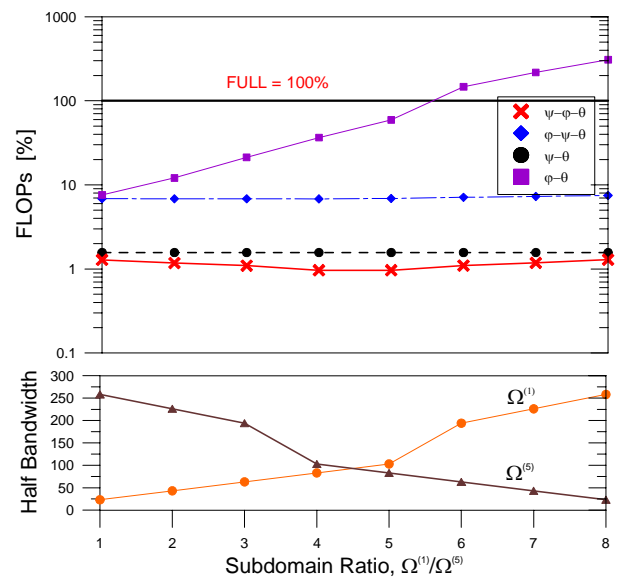
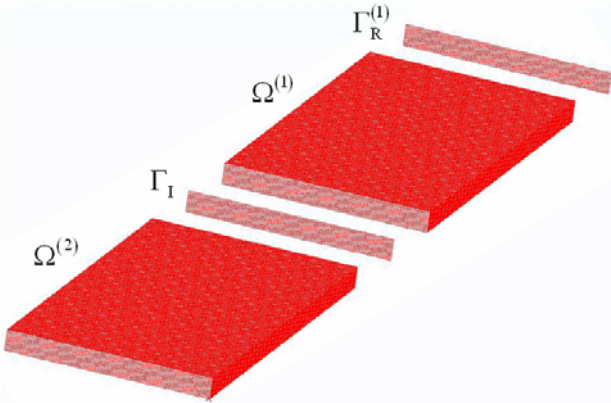


Fig. 9 FLOPs vs. subdomain ratio (SUB8)

하기 때문이다. 영역만 분할한 알고리즘  $\phi-\theta$ 는 내부 부영역이 작아질수록 계산량이 급격히 감소하며, 영역/경계를 분할한  $\phi-\psi-\theta$  결과에 근접하였다.



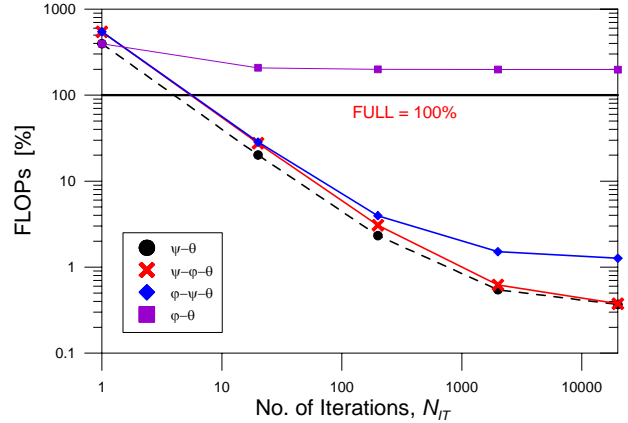
**Fig. 10** Domain/boundary decomposition models for 3D heat transfer problems

삼차원 직육면체 모델

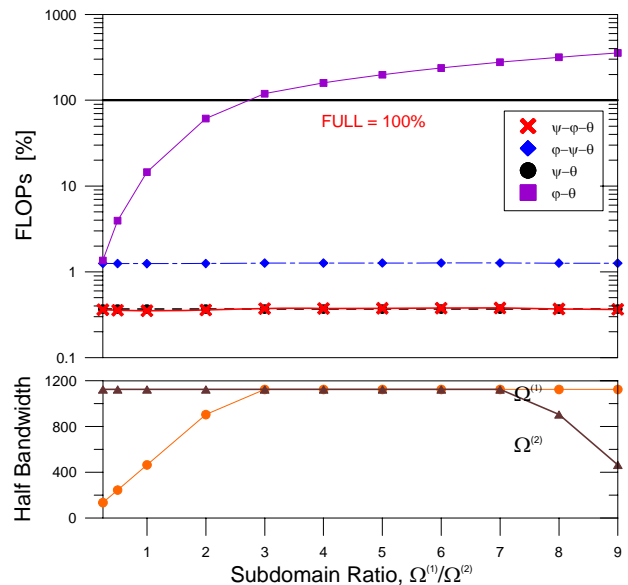
Fig. 10과 같이 삼차원 직육면체 형상을 갖는 단순 복사 모델에 대한 효율성 해석을 수행하였다. 전체 영역을 2개의 부영역(8절점 육면체 요소,  $400 \times 100 \times 10$ 개), 공유면(4절점 사변형 요소,  $100 \times 10$ 개), 복사 공유면(4절점 사변형 요소,  $100 \times 10$ 개)으로 분할한 상태이다.

Fig. 11은 부영역의 크기(길이 방향 요소 수) 비율이  $\Omega^{(1)}/\Omega^{(2)} = 5:5$ 인 경우, 반복 계산 횟수에 따른 효율성 변화를 도시한 결과이다. 전반적으로 반복 계산 횟수가 증가할수록 소요 계산량은 감소하며,  $N_{IT} = 2,000$  이상에서 일정 수준으로 수렴하는 경향을 보였다.  $N_{IT} = 20,000$ 의 경우,  $\psi-\phi-\theta$ ,  $\phi-\psi-\theta$ ,  $\psi-\theta$ 의 FLOPs는 각각 0.376%, 1.269%, 0.368% 수준으로 감소하였다. 이는 해석의 효율성이 각각 266배, 79배, 272배 향상됨을 뜻한다. 반면, 해석 알고리즘  $\phi-\theta$ 는 비선형 계산을 수행하는 부영역 행렬 대역폭이 상대적으로 크기 때문에, FULL보다 FLOPs가 증가하였다. 3.1절에서의 이차원 열전달 문제와 비교하여, 삼차원 문제의 계산량 감소 효과가 다소 크게 나타났다. 이는 삼차원 문제에서 영역/경계를 분할하지 않은 FULL의 절대 계산량이 매우 커지기 때문이다.

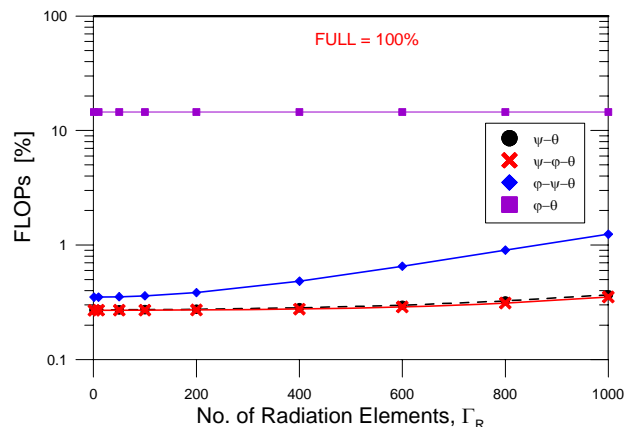
$N_{IT} = 20,000$ 일 때, 부영역의 크기 비율  $\Omega^{(1)}/\Omega^{(2)}$ 의 변화에 따른 FLOPs 결과를 Fig. 12에 도시하였다. 예측한 바와 같이, 복사 경계면을 포함한 부영역  $\Omega^{(1)}$ 의 크기가 작아질수록 해석 알고리즘  $\phi-\theta$ 의 계산량은 급격하게 감소하며,  $\phi-\psi-\theta$ 의 결과에 근접함을 알 수 있다. 비선형 복사 경계면을 완전 분할하는 나머지 세 알고리즘에서는 부영역 크기 변화의 영향이 거의 나타나지 않았다. 이는 열복사 현상에서 기인하는 비선형 계산이 주로 복사 공유면에 국한되기 때문이다.



**Fig. 11** FLOPs vs. number of iterations (3D)



**Fig. 12** FLOPs vs. subdomain ratio (3D)



**Fig. 13** FLOPs vs. number of radiation elements (3D)

마지막으로  $\Omega^{(1)}/\Omega^{(2)} = 1:9$ ,  $N_{IT} = 20,000$ 에서 복사 경계면의 크기(폭 방향 요소 수)에 따른 FLOPs 결과를 Fig. 13에 도시하였다. 경계를 분할하는 알고리즘  $\psi-\phi-\theta$ ,  $\phi-\psi-\theta$ ,  $\psi-\theta$ 의 경우, 설정된 복사 경계

면의 크기가 작아질수록 계산의 효율성이 증가하였다. 이는 복사 경계면에 관련된 비선형 행렬의 크기가 상대적으로 감소하기 때문이다. 반면, 영역 분할법에 의한 알고리즘  $\varphi$ - $\theta$ 는 복사 경계면의 크기에 영향을 받지 않았다. 이는 이미 분할된 부영역에 복사 경계면이 할당되는 방식이므로, 복사가 실제 발생하는 경계면의 요소 수에 상관없이 각종 비선형 반복 계산이 진행되기 때문이다.

#### 4. 결 론

본 논문에서는 영역 및 복사 경계면의 완전 분할을 통한 유한요소 열전달 해석의 효율성 향상을 검토하였다. 공유면과 복사 공유면에서 온도 연속 조건을 간단한 벌칙 함수로서 처리함으로써, 전체 영역을 부영역, 공유면, 복사 공유면으로 분할하여 모델링할 수 있다. 유한요소 근사에 의한 지배 방정식은 블록 행렬 형태로 유도되므로, 비선형 항들을 고려하여 이를 분해함으로써 적절한 해석 알고리즘을 설정하였다.

영역/경계 분할에 의한 계산량 절감 효과는 해석 알고리즘, 영역 및 경계를 분할하는 방식, 유효 강성 행렬의 크기, 비선형 경계면의 분포, 반복 계산 횟수 등에 따라 많은 영향을 받는다. 기본적인 수치 예제들을 해석한 결과, 이차원 문제의 경우 0.966%, 삼차원 문제의 경우 0.368% 수준까지 총 연산 횟수가 감소함을 확인하였다. 이를 환산하면, 계산의 효율성이 각각 103배, 273배 향상됨을 의미한다. 본 영역/경계 분할법은 열접촉과 같은 다른 비선형 경계 문제에도 직접 적용이 가능하며, 매우 효율성 높은 열기계학적 연계 해석 환경을 제공할 수 있다.

#### 후 기

이 논문은 2006년 정부(교육인적자원부) 재원인 한국학술진흥재단의 지원(KRF-2006-331-D00087)과 2007년도 전북대학교의 국외연구교수 지원을 받아 수행된 연구입니다.

#### 참고문헌

- (1) Jaluria, Y. and Torrance, K. E., 2003, *Computational Heat Transfer*, 2nd Ed., Taylor & Francis, New York.
- (2) Bathe, K., 1996, *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- (3) Laursen, T. A., 2002, *Computational Contact and Impact Mechanics*, Springer, New York.
- (4) Siegel, R. and Howell, J. R., 2002, *Thermal Radiation Heat Transfer*, 4th Ed., Taylor & Francis, New York.
- (5) Ryu, H. Y. and Shin, E. S., 2007, "Efficient Finite Element Analyses of Contact Problems by Domain/Boundary Decomposition Method," *Trans. of the KSAS*, Vol. 35, No. 5, pp. 404~411.
- (6) Kim, Y. U., 2008, "A Proposal of Domain/ Boundary Decomposition Method for Efficient Thermo-mechanical Finite Element Analysis," MS Thesis, Chonbuk National Univ.
- (7) Farhat, C. and Roux, F. X., 1991, "A Method of Finite Element Tearing and Interconnecting and its Parallel Solution Algorithm," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 32, pp. 1205~1227.
- (8) Aminpour, M. A., Ransom, J. B. and McCleary, S. L., 1995, "A coupled Analysis Method for Structures with Independently Modelled Finite Element Sub-domains," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 38, pp. 3695~3718.
- (9) Pantano, A. and Averill, R. C., 2002, "A Penalty-Based Finite Element Interface Technology," *Compu. & Struct.*, Vol. 80, pp. 1725~1748.
- (10) Cho, M. H. and Kim, W. B., 2002, "A coupled Finite Element Analysis of Independently Modeled Substructures by Penalty Frame Method," *KSME Int. J.*, Vol. 16, pp. 1201~1210.