

비압축성 2 상유동의 모사를 위한 Level Set 방법의 Reinitialization 방정식의 해법에 관한 연구

조명환* · 최형권† · 유정열**

(2008년 2월 13일 접수, 2008년 6월 11일 수정, 2008년 8월 13일 심사완료)

Study on the Solution of Reinitialization Equation for Level Set Method in the Simulation of Incompressible Two-Phase Flows

Myung Hwan Cho, HyoungGwon Choi and Jung Yul Yoo

Key Words : Re-initialization Process(재초기화 과정), Level Set Method(Level Set 방법), Free-surface Flow(자유표면유동), Broken Dam Problem(댐 붕괴 문제)

Abstract

Computation of moving interface by the level set method typically requires the reinitialization of level set function. An inaccurate estimation of level set function ϕ results in incorrect free-surface capturing and thus errors such as mass gain/loss. Therefore, an accurate and robust reinitialization process is essential to the simulation of free-surface flows. In the present paper, we pursue further development of the reinitialization process, which evaluates level set function directly using a normal vector on the interface without solving the re-distancing equation of hyperbolic type. The Taylor-Galerkin approximation and P1P1 splitting/SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) FEM are adopted to discretize advection equation of the level set function and the incompressible Navier-Stokes equation, respectively. Advection equation and re-initialization process of free surface capturing are validated with benchmark problems, i.e., a broken dam flow and time-reversed single vortex flow. The simulation results are in good agreement with the existing results.

1. 서론

우리 주변의 일상생활에서 액상과 기상의 상호 작용에 의한 2 상유동은 쉽게 접할 수 있으며 연료 분사, 잉크젯 프린팅, 선박 수력학, 점탄성 자유표면 유동 등과 같은 광범위한 분야에서 적용되고 있다. 이러한 복잡한 상경계면에서의 2 상유동을 해석하는 수치해석 방법으로는 크게 상경계면을 추적(tracking)하는 방법과 상경계면을 포착

(capturing)하는 방식으로 나눌 수 있다. 이 중에서 상경계면을 포착하는 가장 대표적인 방법으로는 Level Set(LS) 방법^(1,2)과 Volume-of-Fluid(VOF) 방법⁽³⁾이 있다. VOF 방법은 비압축성 2 상유동의 모사에 광범위하게 사용되어 왔으며, 상경계면은 각 셀에서 0 과 1 사이의 값을 가지는 유체의 체적분율(volume fraction)로 정의된 함수에 의해 주어진다. VOF 방법은 체적분율로부터 상경계면을 표현하게 되며 체적분율을 국부속도(local velocity)로 이송시킴으로써 상경계면을 전진시킨다. VOF 방법은 자연적으로 체적을 잘 보존시키는 장점이 있는 반면에 함수가 불연속적이기 때문에 상경계면의 곡률이나 법선 벡터를 정확하게 계산하기 어렵다는 단점을 가지고 있다. 또한 VOF 방법은 공간상에서 불연속적인 VOF 함수에 관한 이송방정식을 이산

* 회원, 서울대학교 대학원

† 책임저자, 회원, 서울산업대학교 기계공학과
E-mail : choi@snut.ac.kr

TEL : (02) 970-6312 FAX : (02) 883-0179

** 회원, 서울대학교 기계항공공학부

화해야 하므로 구해진 VOF 함수로부터 계면에서의 형상을 예측해야 하는 추가적인 과정을 필요로 한다. 이에 비해 LS 방법은 2 상유동에서 존재하는 불연속적인 계면을 임의의 지점에서 상경계면까지의 최단거리로 정의된 연속함수 ϕ (LS function)를 이용하여 내재적으로 찾기 때문에 상경계면을 쉽고 효율적으로 찾을 수 있을 뿐만 아니라, 기포의 결합/분리(merging/breaking) 및 3 차원에서의 확장 등에 있어서 추가적인 문제점이 나타나지 않는 장점을 가진다. 그러나 LS 방법은 격자가 성긴(coarse) 경우 질량보존 문제가 커지는 단점을 가지고 있다.⁽⁵⁾ 그리고, LS 방법은 LS 함수를 이송한 후에는 LS 함수가 상경계면으로부터 최단거리를 유지하기 위하여 추가적인 재초기화 과정을 필요로 한다. 이를 위하여 대부분 비선형 쌍곡선형 미분방정식을 풀게 되며 이 편미분 방정식에는 표면적분항이 포함된다. 이 적분항에는 경계조건이 포함되며 물리적으로 타당한 경계조건을 부여해야 한다. 그러나, 부적절한 경계조건을 부여한 경우에는 유동이 불안정해지며 비물리적인 현상을 초래할 수 있다. 따라서, 쌍곡선형 미분방정식을 푸는 대신에 경계조건을 필요로 하지 않는 새로운 직접 접근법(Direct approach method)을 제안하였다. 직접 접근법은 각 셀에서의 법선벡터(normal vector), 그리고 계면과 셀 모서리가 만나는 점의 내적을 이용하여 각 노드에서의 ϕ 값을 재초기화 하므로, 기존의 편미분방정식을 푸는 방법과는 달리, 타당한 경계조건을 부여하는 부담에서 자유로운 장점이 있다. 본 연구에서는 4 단계 분리 유한요소법(fractional four-step FEM)⁽⁶⁾과 LS 방법을 결합하였으며 직접접근법(direct approach method)을 이용하여 LS 함수를 재초기화 하였다.

2. 수치해석 방법

2.1 지배 방정식

기체-액체의 2 상유동에 대한 지배방정식은 비정상, 비압축성 유체에 대한 Navier-Stokes 방정식이며 다음과 같다:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho(\phi)} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho(\phi)} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu(\phi) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + g_i \quad (1)$$

여기서 u_i 는 속도벡터이며, g_i 는 i 방향으로의 중력가속도, ϕ 는 기상에서는 음수를 액상에서는 양수를 나타내는 LS 함수를 나타낸다. 식 (1)은 4 단계 분리 유한요소법을 이용하여 이산화하였다. LS 함수 ϕ 는 LS 함수의 정의에 의하여 음수에서 양수로 부호가 바뀌는 부분에서 물성치가 급격하게 변한다. 따라서 상경계면에서 유체 물성치가 급격하게 변화하는 것을 막기 위해서 일정한 완충영역(smooth zone)을 주게 되는데 일반적으로 많이 사용하는 $\varepsilon = 1.5\Delta x$ [Δx 는 유한요소의 특성길이]로 주었으며 다음과 같이 물성치의 변화가 부드럽게 변화하도록 하였다.

$$H(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{if } \phi < -\varepsilon \\ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\phi}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\phi}{\varepsilon}\right) \right] & \text{if } |\phi| \leq \varepsilon \\ 1 & \text{if } \phi > \varepsilon \end{cases} \quad (2)$$

이 Heaviside 함수를 통하여 물성치는 다음과 같이 계산된다.

$$\rho(\phi) = \rho_g + (\rho_l - \rho_g)H(\phi)$$

$$\mu(\phi) = \mu_g + (\mu_l - \mu_g)H(\phi) \quad (3)$$

여기서 하첨자 g 는 기체를 l 은 액체를 나타낸다.

2.2 LS 함수의 이송방정식

LS 함수의 이송방정식은 아래와 같은 편미분방정식 형태로 표시된다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

여기서 u_i 는 속도벡터로 식 (1)을 풀 결과로 주어지며 이산화는 Taylor-Galerkin 방법을 사용하였다.

2.3 LS 함수의 재초기화

식 (4)로부터 구한 ϕ 는 일반적으로 재초기화 기법이 적용되지 않으면 공간상의 임의의 노드에서 ϕ 값은 초기의 함수 값과는 달리 상경계면까지의 최단거리를 나타내지 않게 되므로 재초기화 되어야 한다. Fig. 1에서 상경계면과 셀 모서리의 교점 x_s 는 주변에서의 ϕ 값을 이용한 선형보간법을 통해 다음과 같이 구할 수 있다.⁽⁷⁾

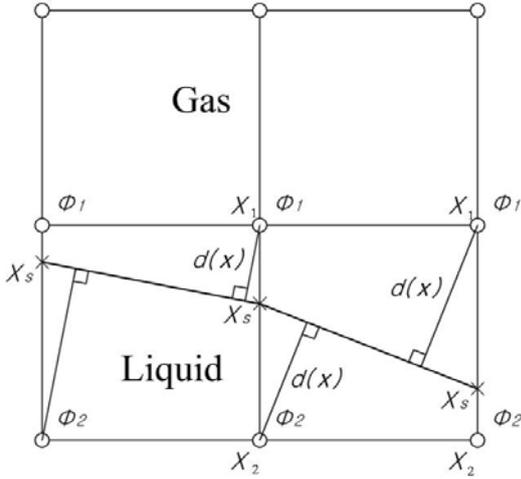


Fig. 1 Schematic representation of the intersection of interface and cell face

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_1 - \frac{\phi_1}{\phi_1 - \phi_2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \quad (5)$$

Fig. 1 과 같이 \mathbf{x}_s 와 상경계면에서의 법선벡터 \mathbf{n} 을 이용하면 각 노드에서의 ϕ 값은 다음과 같은 절차에 의해 재초기화된다⁽⁸⁾:

- 1) Set $|\phi| =$ 임의의 큰 값
- 2) 각 노드에서 상경계면이 위치한 요소에 내린 수선의 발이 그 요소 내에 위치한 경우에는 ϕ 값을 다음과 같이 구한다.

$$d(\mathbf{x}) = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (6)$$

$$\phi = \min(|\phi|, |d(\mathbf{x})|)$$

여기서 \mathbf{n} 은 상경계면에서 액상을 향한 법선벡터, $d(\mathbf{x})$ 는 노드 $\mathbf{x}(x, y)$ 에서 상경계면까지의 최단거리를 나타낸다.

- 3) 각 노드에서 상경계면이 위치한 요소에 내린 수선의 발이 그 요소 내에 위치하지 않은 경우에는 식 (6)에서 구한 값과 비교하여 다음과 같이 ϕ 값을 구한다.

$$\phi = \min(|\phi|, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|) \quad (7)$$

- 4) 이전 시간단계에서의 ϕ 의 부호로부터 재초기화된 ϕ 의 부호를 결정한다.

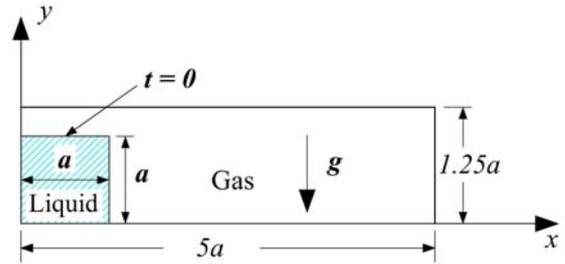
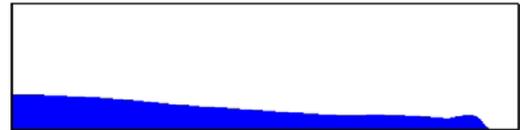


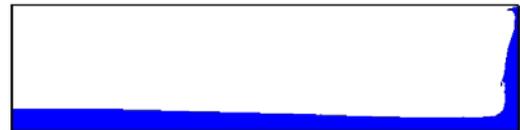
Fig. 2 Schematic for a 2-D broken dam problem



(a) $t^* = 1.310$



(b) $t^* = 3.144$



(c) $t^* = 4.324$



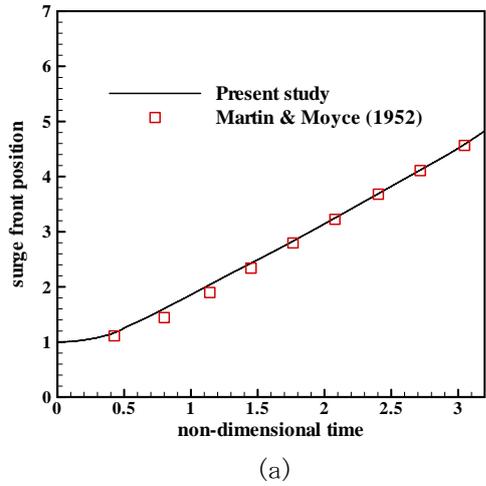
(d) $t^* = 8.123$

Fig. 3 Temporal variation of free surface configuration for the 2-D broken dam problem

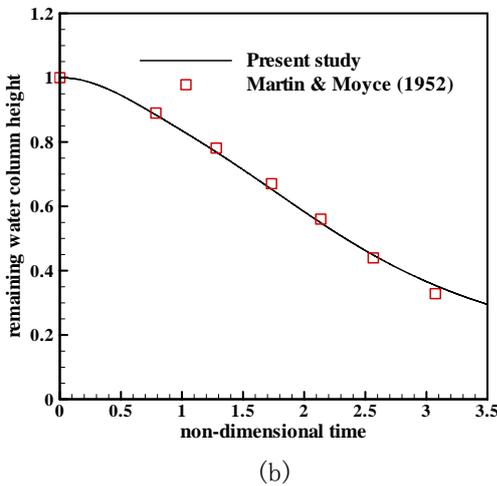
3. 수치해석 결과

3.1 2차원 댐 붕괴 문제

개발된 직접접근법의 검증을 위해서 2 차원 댐 붕괴 문제를 해석하였다. 수력학적 평형 상태에 있는 사각 물 기둥이 댐이 제거되면서 중력의 영향으로 붕괴되기 시작하여 자유표면은 전진하는 물결 파를 형성한다. 물의 밀도와 점성계수는 각각 $1000 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ 과 $1 \times 10^{-3} \text{ [kg/m}\cdot\text{s]}$ 이며 공기의 밀도와 점성계수는 각각 $1 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ 과 $1 \times 10^{-5} \text{ [kg/m}\cdot\text{s]}$ 이다. 중력 가속도 $g = 9.8 \text{ [m/s}^2\text{]}$ 이다. 계산 영역은



(a)



(b)

Fig. 4 (a) The position of the water surge front and (b) the height of the remaining water column as a function of non-dimensional time in the 2-D broken dam problem

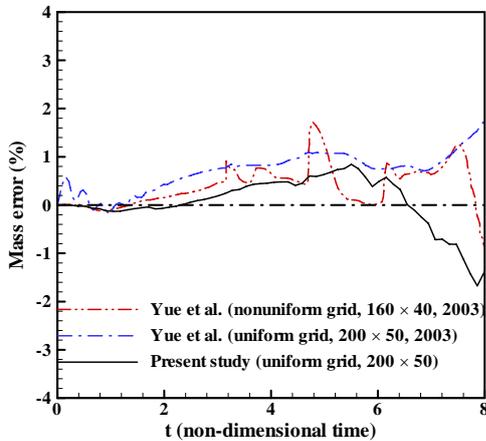


Fig. 5 Mass errors of 2-D broken dam with non-dimensional time

Fig. 2 에서처럼 $5a \times 1.25a$ 이며 정사각 물기둥($a \times a$, $a = 0.05715$ m)은 Martin & Moyce⁽⁹⁾의 실험조건과 같다. Fig. 3 은 200×50 균일한 사각형 격자를 사용하여 얻어진 시간에 따른 자유표면 형상을 나타내며, 시간은 $t^* = \sqrt{a/g}$ 로 무차원화 하였다. 물 기둥은 오른쪽 상단 자유표면에서부터 붕괴되기 시작하여 시간이 지남에 따라 밀면을 흘러 오른쪽 방향으로 전진함을 볼 수 있다. Fig. 4 는 시간의 경과에 따른 자유 표면의 선단 위치 및 왼쪽 벽에서의 물기둥 높이를 나타내며 각 위치는 최초 물기둥의 높이 a 로 무차원화 하였다. Fig. 4 에서 볼 수 있듯이 기존의 실험결과인 Martin & Moyce 의 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. Fig. 5 는 시간에 따른 질량보존 오차를 나타내며, 기존의 Yue 등⁽¹⁰⁾의 결과와 비교해 볼 때 질량보존에도 큰 문제가 없음을 확인할 수 있다.

3.2 Time-reversed single vortex flow

엄밀해가 주어진 주기적인 유동장을 이용하여 한 주기(T)가 지난 후에 와류가 원래의 형태를 어느 정도 유지하고 있는지, 즉 얼마나 질량보존이 되고 있는가를 측정하였으며 이때 주어진 주기적인 속도장은 다음과 같다:

$$\begin{aligned} u &= 2 \sin^2(\pi x) \times \sin(\pi y) \times \cos(\pi y) \times \cos(\pi t / T) \\ v &= -2 \sin(\pi x) \times \cos(\pi x) \times \sin^2(\pi y) \times \cos(\pi t / T) \end{aligned} \quad (8)$$

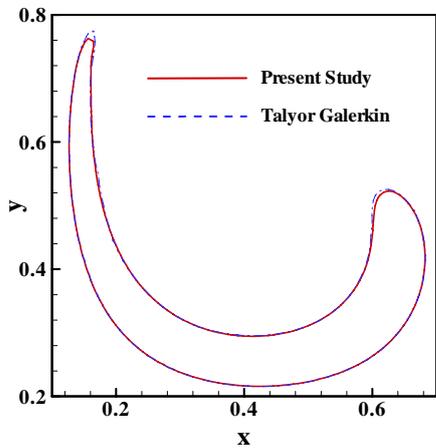
Table 1 은 time-reversed single vortex 유동에서 다양한 재초기화 방법을 사용했을 때, 한 주기 후의 ϕ 값과 엄밀해와의 차이를 나타낸다. 오차는 상경계면 주위에서의 LS 함수 분포가 중요하기 때문에 ϕ 값의 절대치가 ϵ ($1.5 \times \Delta x$)보다 작은 점들만을 고려하여 계산하였으며, 오차는 다음과 같이 정의된다.⁽⁴⁾

$$Error = \sqrt{\frac{\sum_{|\phi| < \epsilon} (\phi_{Num} - \phi_{Exact})^2}{M}} \quad (9)$$

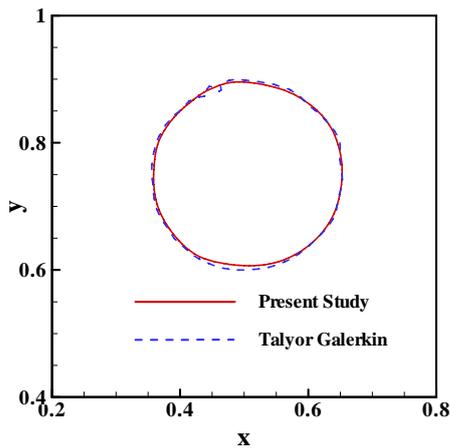
여기서 M 은 ϕ 의 절대치가 ϵ 보다 작은 절점의 개수를 나타낸다. 직접접근법은 3 차 정확도 ENO(Essentially-Non-Oscillatory), CSUPG(Consistent Streamline Upwind Petrov-Galerkin)와 거의 비슷한 정확도를 주며, TG(Taylor-Glaerkin)는 다른 방법들에 비해서 좀 더 높은 정확도를, 그리고 SUPG(Streamline Upwind Petrov-Galerkin)는 상대적으로 오차가 큰 것을 알 수 있다. 직접접근법은 각 셀

Table 1 Error of level set function in a time-reversed single vortex flow

Method \ Grid resolution	64 × 64	128 × 128
SUPG ⁽⁴⁾	1.50E-02	7.98 E-03
CSUPG ⁽⁴⁾	1.07 E-02	5.06 E-03
3 rd ENO ⁽⁴⁾	9.02 E-03	4.55 E-03
TG ⁽¹¹⁾	7.90 E-03	3.50 E-03
Present study	9.60 E-03	5.11 E-03



(a) $t = T/2$



(b) $t = T$

Fig. 6 Advection of LS function in time reversed single vortex flow (128 × 128 grid)

에서의 상경계면이 지나는 점을 현재는 선형보간법을 이용하여 구하였으나, 고차의 보간법을 사용하였을 경우에 좀 더 고차의 정확도를 얻을 수 있을 것으로 판단된다. Fig. 6 은 128 × 128 격

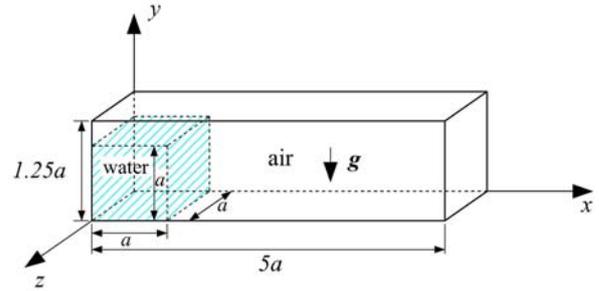


Fig. 7 Schematic for a three-dimensional broken dam problem

자계에서 time reversed single vortex 유동을 TG 및 직접접근법을 이용하여 재초기화하였을 때, 각각 $t = T/2, T$ 에서의 상경계면의 모양을 나타낸다. 두 방법 모두 한 주기 이후에 비교적 원형 모습을 잘 유지하고 있는 것을 볼 수 있으며, TG 방법에 비해 직접접근법은 상경계면이 날카로운 부분(sharp interface)에서 좀 더 큰 질량손실을 보이는 반면에, 원형 형상을 좀 더 잘 유지하고 있는 것을 확인할 수 있다. TG 방법을 사용하여 재초기화 과정에 대한 미분방정식을 이산화하는 경우에는 다음과 같은 경계조건을 포함하게 된다:

$$\int_{\Omega_e} w \left[C_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(C_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \right] d\Omega = \int_{\Omega_e} (\nabla w \cdot \nabla \phi) d\Omega + B.C.T \tag{10}$$

여기서 C 는 단위 벡터로 상경계면 선상에서 수직 방향으로 멀어지는 방향을 향하며 B.C.T은 경계에 대한 적분항으로 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$B.C.T = \int w C_i n_i C_j \phi_j d\Gamma \tag{11}$$

직접접근법을 사용하였을 경우에는 이러한 경계 조건에서 자유로울 수 있으며, 따라서 유동이 복잡한 경우에는 직접접근법이 쌍곡선형 편미분방정식을 푸는 TG 방법에 비해 좀 더 안정적인 해를 가져다 주는 것으로 판단된다.

3.3 3 차원 댐 붕괴 문제

직접접근법을 3 차원 문제에 대하여 검증하기 위해서 3 차원 댐 붕괴 문제에 적용하였다. Fig. 7 에서 보는 바와 같이 계산영역의 크기는 x, y, z 각 방향으로 $5a \times 1.25a \times a$ 이며, $200 \times 40 \times 50$ 육면체 균일 격자계를 사용하였다⁽¹⁰⁾. 모든 경계는 벽으로 처리하였으며, 벽에서의 접선 방향으로는

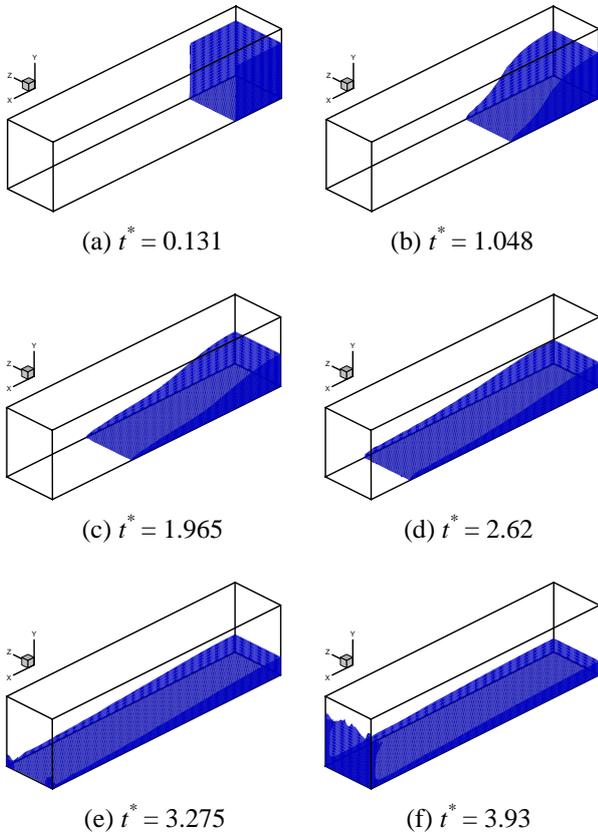


Fig. 8 Free surface configuration as time goes by

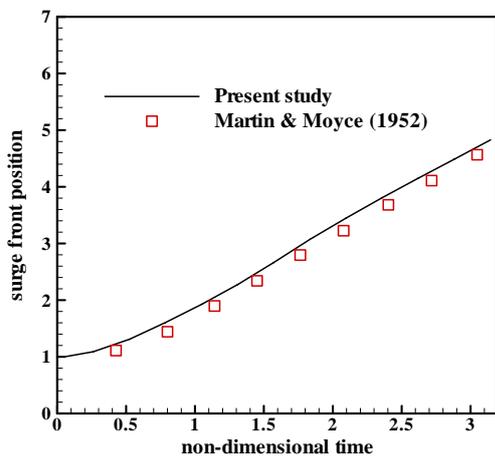


Fig. 9 The position of the water surge front as a function of non-dimensional time in the 3-D broken dam problem

미끄럼 조건을 주었다. Fig. 8 은 시간 경과에 따른 자유표면의 전진을 나타내며, Fig. 9 와 10 은 각각 시간에 따른 자유 표면의 선단 위치 및 왼쪽 벽에서의 물기둥 높이를 나타낸다. 시간은 2 차원

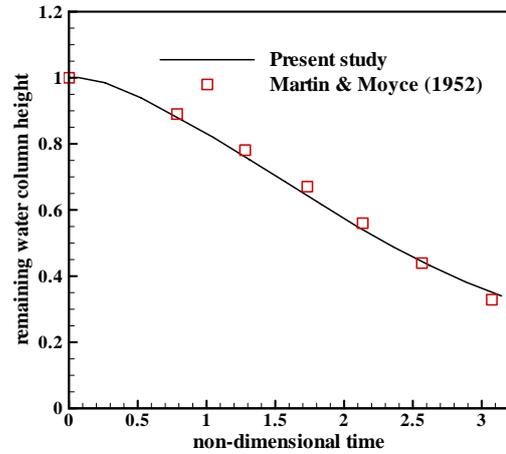


Fig. 10 The position of the water height of the remaining water column as a function of non-dimensional time in the 3-D broken dam problem

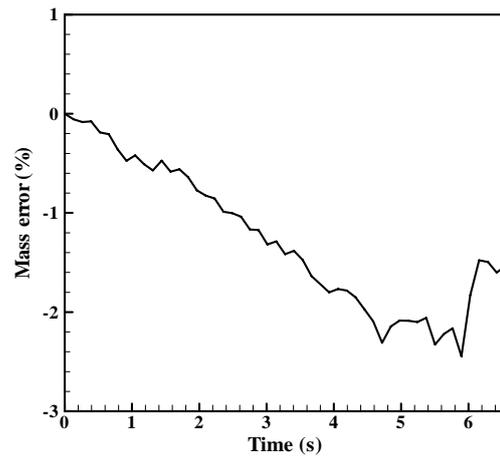


Fig. 11 Mass errors of 3-D broken dam with non-dimensional time

담 붕괴 문제에서와 같은 방식으로 무차원화 하였으며, 기존의 실험결과인 Martin & Moyce 의 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. Fig. 11 은 시간에 따른 질량보존 오차를 나타내며, 최대오차는 약 2.3%이다. 비교적 질량보존이 잘 되고 있음을 확인할 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 LS 방법의 재초기화 과정을 해석하기 위하여 기존의 편미분방정식을 푸는 대신에 각 셀에서의 법선벡터, 그리고 상경계면과 셀 모서리의 교점을 이용하는 직접접근법을 사용하였다. 재초기화 과정을 직접접근법으로 해석한 경우

에 기존의 편미분방정식으로 푸는 경우에 비해서 질량보존을 크게 훼손시키지 않으면서도 좀 더 안정적인 해를 얻을 수 있었으며 또한 물리적으로 타당한 경계조건을 부여해야 하는 부담에서도 좀 더 자유로울 수 있었다. 다만, 상경계면이 셀과 만나는 교점을 구하는 방식에서 좀 더 고차의 정확도를 가지는 보간법⁽¹²⁾을 선택할 필요가 있을 것으로 판단된다.

후 기

이 연구는 NGV 기술개발사업과 마이크로열시스템연구센터의 지원으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Sussman, M., Smereka, P. and Osher, S., 1994, "A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flow," *J. Comput. Phys.*, Vol. 114, pp. 146~159.
- (2) Chang, Y. C., Hou, T. Y., Merriman, B. and Osher, S., 1996, "A Level Set Formulation of Eulerian Interface Capturing Methods for Incompressible Fluid Flows," *J. Comput. Phys.*, Vol. 124, pp. 449~464.
- (3) Hirt, C. W. and Nichols, B. D., 1981, "Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries," *J. Comput. Phys.*, Vol. 39, pp. 201~225.
- (4) Choi, H. G., Kang, S. W., Yoo, J. Y. and Lee, Y. P., 2005, "Study on the Finite Element Discretization of the Level Set Redistancing Algorithm," *Trans. of the KSME (B)*, Vol. 29, No. 6, pp. 703~710.
- (5) Sussman, M. and Puckett, E. G., 2000, "A Coupled Level Set and Volume-of-Fluid Method for Computing 3D and Axisymmetric Incompressible Two-Phase Flows," *J. Comput. Phys.*, Vol. 162, pp. 301~337.
- (6) Choi, H. G., Choi, H. and Yoo, J. Y., 1997, "A Fractional Four-Step Finite Element Formulation of the Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equations Using SUPG and Linear Equal-Order Element Methods," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 143, pp. 333~348.
- (7) Shin, S. and Lee, W. I., 2000, "Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flow with Moving Free Surface by Selective Volume of Fluid Method," *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol. 21, pp. 197~206.
- (8) Son, G., 2003, "Efficient Implementation of a Coupled Level-Set and Volume-of-Fluid Method for Three-Dimensional Incompressible Two-Phase Flows," *Numer. Heat Trans., Part B*, Vol. 43, pp. 549~565.
- (9) Martin, J. C. and Moyce, W. J., 1952, "An Experimental Study of the Collapse of Liquid Columns on a Rigid Horizontal Plane," *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, Math. Phys. Sci.*, Vol. 244, pp. 312~324.
- (10) Yue, W., Lin, C. L. and Patel, V. C., 2003, "Numerical Simulation of Unsteady Multidimensional Free Surface Motions by Level Set Method," *Int. J. Numer. Methods Fluid*, Vol. 42, pp. 853~884.
- (11) Choi, H. G., Kang, S. W. and Yoo, J. Y., 2006, "Level Set Based Finite Element Method of Bubble-in-Liquid Simulation," *Proceedings of the 4th Int. Conf. Comput. Fluid Dynamics*, pp. 37~38.
- (12) Hou, T. Y., Li, Z., Osher, S. and Zhao, H., 1997, "A Hybrid Method for Moving Interface Problems with Application to the Hele-Shaw Flow," *J. Comput. Phys.*, Vol. 134, pp. 236~252.