

## 성능지수와 제약조건을 고려한 불안정 시스템의 제어

안종갑\* · 이윤형\* · 소명옥†

(원고접수일 : 2007년 12월 24일, 심사완료일 : 2008년 4월 5일)

### Control of Unstable Systems Concerned with the Performance Indexes and Constraints

Jong-Kap Ahn\* · Yun-Hyung Lee\* · Myung-Ok So†

**Abstract** : A technique for determining the feedback gain of the states feedback controller using a real-coded genetic algorithm(RCGA) is presented. It is concerned with the states error to the performance index of a RCGA. As for assessing the performance of the controller three performance criteria (ISE, IAE and ITAE) are adopted. And designing the controller involves a constrained optimization problem. Therefore, a real-coded genetic algorithm incorporating the penalty strategy is used. The performance of the proposed method is demonstrated through a set of simulation about an inverted pendulum system.

**Key words** : Feedback controller(피드백제어기), Real-coded genetic algorithm(실수코딩유전알고리즘), Performance criteria(성능지수), Constrained problem(제약문제), Penalty strategy(벌점전략)

#### 1. 서 론

제어시스템을 설계하는 목적은 동적시스템의 성능향상과 강인성을 갖도록 하는 것이다. 일반적으로 동적시스템에는 시스템에 가해지는 입력에 대하여 바람직한 성능을 보이는 상태피드백 제어시스템을 사용한다. 상태피드백 제어시스템을 이용한 다변수 제어시스템 설계에는 극점배치, LQ최적제어<sup>(1)</sup> 등이 널리 이용되고 있다.

극점배치방법은 요구되는 성능을 만족시키는 극점을 적절히 배치함으로써 만족스러운 제어시스템

을 설계할 수 있다. 이 때 극점의 위치는 경험에 근거한 선정 방법이 가장 많이 이용되고 있다.

LQ최적제어는 현대제어이론에서 기술설계를 위해 쉽게 실행될 뿐만 아니라 다른 제어 이론들의 기초적인 이론이 되고 있다. 이는 가중치행렬 Q와 R을 선택하여 비선형 리카치방정식을 풀고 상태피드백 이득행렬 K를 계산함으로써 선형 최적 조정을 얻을 수 있다. 그러나 제어객체들의 차원이 증가하면 시스템의 성능이 반영된 가중행렬의 선택에 정교한 임무가 남는다. 물론 Kalman R E.<sup>(2)</sup>, Wan<sup>(3)</sup>, Sugimoto<sup>(4)</sup> 그리고 Hsueh와 Sehitoglu<sup>(5)</sup>

† 교신저자(한국해양대학교 선박전자계공학부, E-mail:smo@hhu.ac.kr, Tel:051)410-4248)

\* 한국항만연수원 부산연수원

등에 의해서 많은 접근 방법들이 제안되었다. 하지만 이러한 방법은 획득된 결과에 기반을 두고 있으며 대부분 경험이나 시행착오에 의해 설계되어지고 있다.

그래서 LQ최적제어의 가중행렬 Q와 R을 탐색하는 방법에 GA 내부 연산자로 적절한 적합도함수를 도입하여 나름대로 만족스러운 결과를 얻었음을 보고하고 있다. 그러나 이들은 실제 시스템을 개발할 때 수반되는 설계사양을 체계적으로 접근하려는 노력이 결여되어 있다.

따라서 본 논문에서는 먼저 시스템의 제어환경에 따라 GA의 적절한 목적함수를 선택할 수 있도록 ISE, IAE, ITAE 세 가지 성능지수를 고려한다. 그리고 설계사양을 만족할 수 있도록 GA 목적함수에 제약조건을 추가한다. 제안된 방법의 검증을 위해 도입된 시스템에 대한 제어시스템의 성능을 시간영역에서 시험입력 신호에 대한 과도응답과 정상상태 응답을 조사하여 살펴본다.

## 2. 상태 피드백과 유전알고리즘

### 2.1 다변수 상태피드백 시스템

(1)과 같은 일반적인 다변수 시스템에 대하여 생각하기로 한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

단,  $x(t) \in R^m$ ,  $u(t) \in R^n$ ,  $y(t) \in R^p$ 이다.

그리고 모든 상태 변수를 측정할 수 있고 (2)와 같은 상태 피드백 제어법칙을 사용한다고 가정한다.

$$u(t) = -Kx(t) + v(t) \quad (2)$$

여기서  $K$ 는  $(m \times n)$  제어이득행렬로서 설계파라미터이고,  $v(t) \in R^m$ 는 시스템 외부로부터 생긴 신호로서 본 논문에서는 기준입력( $y_r(t)$ )만 생각한다.

설계파라미터  $K$ 를 선정하는 방법에 GA를 이용하고 목적함수로는 (3)과 같은 세 가지 성능지수를 사용한다.

$$ISE : J_1 = \int_0^{t_f} e^2(t) dt \quad (3a)$$

$$IAE : J_2 = \int_0^{t_f} |e(t)| dt \quad (3b)$$

$$ITAE : J_3 = \int_0^{t_f} t|e(t)| dt \quad (3c)$$

일반적으로 ISE는 해석이 용이하여 최적제어기 설계 등에 자주 이용되나 오차가 클 때는 큰 벌점을, 작을 때는 작은 벌점을 주는 결과를 초래해 최적해 부근에서 계수의 변화에 둔감하다. 한편 IAE는 오차의 절대 크기를 취함으로써 양이나 음의 오차에 균등한 벌점을 부여하는 효과를 주므로 ISE보다 나은 감도를 나타낸다. ITAE는 장시간의 과도현상에 대해 벌점을 주는 매우 유용한 기준으로 IAE나 ISE보다 훨씬 더 변별력이 있다. 이 적분의 최소값은 시스템의 파라미터들이 변하는 경우에 훨씬 더 잘 정의 될 수 있다.

### 2.2 유전알고리즘<sup>[6],[7]</sup>

유전알고리즘의 탐색 과정은 Fig. 1에서 보는 것과 같이 크게 집단의 초기화, 적합도 평가, 재생산, 교배, 돌연변이의 5단계로 구분된다.

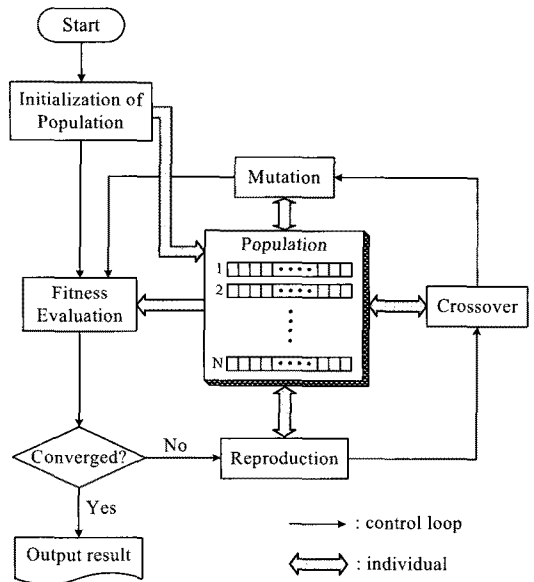


Fig. 1 Basic structure of a RCGA

본 논문에서는 실수코딩유전알고리즘(RCGA)을 사용한다. RCGA는 변수(표현형)와 유전자(유전자형)간에 일대일 대응으로 프로그래밍이 간편하고, 이진코딩유전알고리즘(BCGA)에서 요구되는 부호화, 복호화 프로세스가 필요 없어 탐색속도를 높일 수 있다. 그리고 구배와 유사한 재생산, 수정 단순교배, 동적돌연변이 연산자를 기본 연산자로 선택하여 사용하였다. 이들의 제어변수는 문헌에서 알려진 일반적인 결과들을 바탕으로 실험과 경험을 통해 선정되었다. 또한, 탐색성능을 향상시키기 위해 선형 스케일링과 엘리티즘전략을 사용하였다.

### 3. RCGA를 이용한 제약조건의 취급

#### 3.1 제약조건의 취급

복잡한 최적화 문제에 유전알고리즘을 적용할 때 고려되어야 할 사항 중 하나는 제약조건을 어떻게 다룰 것인가 하는 것이다. 왜냐하면 주어진 문제에는 제약조건이 수반될 수 있으며 유전 연산자들이 염색체를 다루면서 부적합한 해를 생산할 수 있기 때문이다.

제약조건을 다루는 방법에는 크게 거부전략, 복구전략, 유전 연산자와의 보완 전략, 벌점전략으로 분류된다. 여기서는 본 논문에서 사용할 벌점전략 중 고정 벌점전략에 대해서 간단히 살펴보도록 한다.

흔히 제약조건을 가지는 최적화 문제들의 해공간은 적합한 영역과 부적합한 영역으로 구성되어 있다. 만약 알고리즘이 부적합한 영역을 탐색하게 될 때 벌점을 부과하고, 이 벌점을 목적함수 계산에 반영하면 제약조건이 따르는 최적화 문제를 제약조건이 없는 문제로 변환할 수 있다.

대부분의 경우 시스템은 다음과 같은 몇 가지 고려되어야 할 요소들을 가진다.

- 계단함수 입력에서 정의되는 최대오버슈트( $M_p$ )
- 지연시간( $t_d$ )
- 상승시간( $t_r$ )
- 정정시간( $t_s$ )

- 제한된 입력( $u$ )

이외에도 시스템 설계시 요구되는 사항들을 추가하여 고려해야 할 요소로 선정할 수가 있다. 이러한 제약조건을 고려함으로써 제어가 설계문제는 복잡한 제약성 최적화 문제로 귀착되는데, 그 최적해를 구하기 위해 RCGA를 이용한다.

집단내의 잠재적인 해들이 제약조건을 위반(부적합한 영역을 탐색)할 때를 처리하기 위해 벌점전략을 채용하고, 그 위반 정도에 따라 벌점을 추가하도록 벌점함수  $P(\psi)$ 를 정의하였다.

$$F(\psi) = J(\psi) + P(\psi) \tag{4}$$

$$\text{단, } P(\psi) = \begin{cases} 0 & , \psi \text{가 적합한 해일 경우} \\ \sum_{j=1}^n w_j g_j^2 & , \psi \text{가 부적합한 해일 경우} \end{cases}$$

여기서  $w_j$ 는 각 제약조건에 대응되는 벌점상수로서 설계자에 의해 적절하게 선정되는 변수이며  $J(\psi)$ 는  $\psi$ 에 종속되는 목적함수 값이다. 이렇게 함으로써 제약성 최적화 문제는 시스템의 방정식을 만족하면서  $F(\psi)$ 를 최소로 하는 비제약성 최적화 문제로 변환된다.

### 4. 성능지수와 제약조건을 고려한 독립진자시스템의 상태피드백 제어

#### 4.1 독립진자 시스템의 모델링

(5)와 같은 독립진자 모델<sup>(8)</sup>을 고려하자.

$$\begin{aligned} (M_c + M_p)\ddot{x}_c(t) - M_p l_p \cos(\alpha(t))\ddot{\alpha}(t) + M_p l_p \sin(\alpha(t))\dot{\alpha}^2(t) \\ = F_c - B_{vq}\dot{x}_c(t) \end{aligned} \tag{5a}$$

$$\begin{aligned} -M_p l_p \cos(\alpha(t))\ddot{x}_c(t) + (I_p + M_p l_p^2)\ddot{\alpha}(t) - M_p g l_p \sin(\alpha(t)) \\ = -B_p \dot{\alpha}(t) \end{aligned} \tag{5b}$$

(5)를 다시 (6)과 같이 선형 상태공간 모델로 나타낼 수 있다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{6}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

여기서  $x_1 = x_c$ (대차위치),  $x_2 = \dot{x}$ (진자각),  $x_3 = \dot{x}_c$ (대차속도),  $x_4 = \dot{\alpha}$ (진자각속도)는 상태변수이고, 각 행렬과 원소들은 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$a_{32} = 2.35145, a_{33} = -15.96343, a_{34} = -0.00738,$   
 $a_{42} = 27.59864, a_{43} = -36.26551, a_{44} = -0.08513,$   
 $b_3 = 2.28836, b_4 = 5.19829$

4.2 성능지수에 따른 상태피드백 이득 탐색

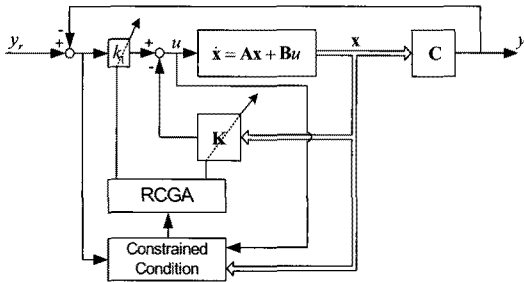


Fig. 2 Optimization of a constrained state feedback control system using a RCGA

RCGA를 사용하여 도립진자시스템의 상태피드백 이득행렬을 탐색하기 위한 목적함수의 성능지수는 (7)과 같다.

ISE :  $J_1 = \int_0^{t_f} \{(y_r - x_1)^2 + x_2^2 + x_4^2\} dt$  (7a)

IAE :  $J_2 = \int_0^{t_f} \{|y_r - x_1| + |x_2| + |x_4|\} dt$  (7b)

ITAE :  $J_3 = \int_0^{t_f} t \{|y_r - x_1| + |x_2| + |x_4|\} dt$  (7c)

이때 RCGA의 제어변수는 집단의 크기  $N=80$ , 재생산계수  $\eta=1.8$ , 교배확률  $P_c=0.95$ , 돌연변이 확률  $P_m=0.2$ 가 사용되었다.

각각의 성능지수에 따라 RCGA가 탐색한 피드백이득 행렬은 다음과 같다.

ISE:  $[-20.353488 \ 110.613292 \ -27.873355 \ 30.495626]$   
 IAE:  $[-1411.824197 \ 2137.994720$   
 $-845.124096 \ 395.269812]$   
 ITAE :  $[-38.838802 \ 193.627429 \ -48.661757 \ 48.449328]$

시뮬레이션 결과는 Fig. 3 및 Fig. 4, 위치에 대한 성능은 Table 1과 같다.

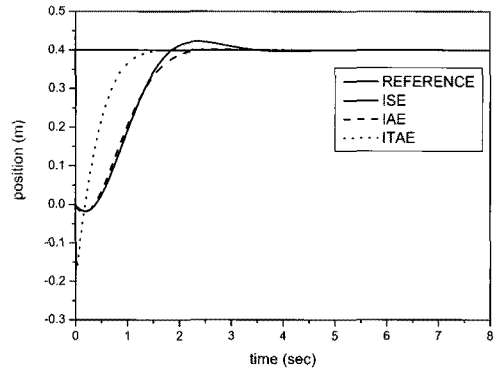


Fig. 3 Position of An inverted pendulum system

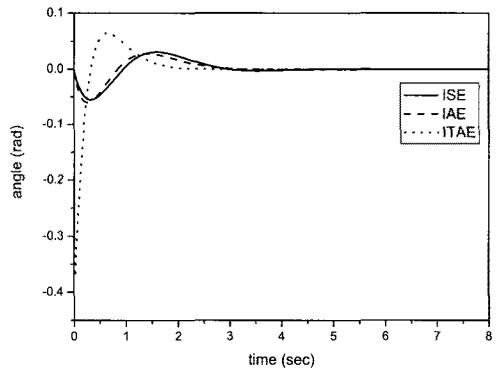


Fig. 4 Angle of An inverted pendulum system

Table 1 Result of Performance criteria

	$m_p$	$t_p$	$t_r$	$t_s$	$e_{ss}$
ISE	5.63	2.37	1.02	2.60	0.00
IAE	0.51	2.75	1.16	1.90	0.00
ITAE	0.14	2.15	0.73	1.16	0.00

앞서 성능지수에 대해서 설명했던바와 같이 도립진자 시스템에서도 ITAE에 의해 탐색된 피드백이득 행렬이 모든 항목에서 보다 나은 성능을 보여주

고 있다. 하지만 급격한 변화에 의한 입력의 과대로 진자의 흔들림이 크게 나타나고 있다. 이는 시스템의 제어환경에 따라 성능지수가 적절히 선택되어야 함을 알 수 있다.

따라서 본 논문에서는 오버슈트가 작으면서 빠른 시간에 목표위치를 추종하는 IAE 성능지수를 채택하여 설계사양을 만족하는 제어시스템을 설계하고자 한다.

#### 4.3 성능지수와 제약조건을 고려한 상태피드백 이득 탐색

먼저, 본 논문에서는 도립진자 시스템에 다음의 제약조건이 추가된 경우를 고려하기로 한다.

- (1) 대차의 이동시 오버슈트가 발생하지 않아야 한다.
- (2) 최단시간 내에 목적지까지 대차의 이동이 가능해야 한다.
- (3) 대차가 목적지에 정상편차 없이 도달하여야 한다.

위의 요소를 기본적으로 만족시키기 위하여 본 논문에서는 시스템의 계단 응답에 대한 최대오버슈트( $M_p=0$ ), 상승시간( $t_r=1.2\text{sec}$ ), 정정시간( $t_s=2.0\text{sec}$ )에 대해 고려한다. 또한 각 제약조건에 대응되는 벌점상수는  $w_1$ ( $M_p$ 에 대한):  $1 \times 10^{30}$ ,  $w_2$ ( $t_r$ 에 대한):  $1 \times 10^{20}$ ,  $w_3$ ( $t_s$ 에 대한):  $1 \times 10^{20}$ 과 같이 설정하였다.

먼저 설계사양은 1)  $g_1(K) = -M_p(K) \geq 0$ , 2)  $g_2(K) = 1.2 - t_r(K) \geq 0$ , 3)  $g_3(K) = 2.0 - t_s(K) \geq 0$ 과 같이 선정한다. 또한, 위반 정도에 따라 벌점을 추가하도록 벌점함수  $F(K)$ 가 추가된 새로운 목적함수  $F(K)$ 는 식(8)과 같이 정리된다.

$$F(K) = \int_0^{t_f} \{|y_r - x_1| + |x_2| + |x_1|\} dt + w_1 g_1^2 + w_2 g_2^2 + w_3 g_3^2 \quad (8)$$

여기서,  $t_f$ 는 최종적분시간으로 충분히 큰 시간이다.

이때 RCGA의 제어변수는 집단의 크기  $N=80$ .

재생산계수  $\eta=1.8$ , 교배확률  $P_c=0.95$ , 돌연변이 확률  $P_m=0.2$ 가 사용되었다.

RCGA가 탐색한 피드백이득 행렬은  $k_1 = -30.531679$ ,  $k_2 = 151.515282$ ,  $k_3 = -40.030370$ ,  $k_4 = 38.059763$ 이다. 시뮬레이션 결과, 위치에 대한 성능은  $m_p=0.00$ ,  $t_p=0.00$ ,  $t_r=1.18$ ,  $t_s=1.93$ ,  $e_{ss}=0.00$ 로 오버슈트 없이 상승시간과 정착시간 모두 설계사양을 충분히 만족하고 있음을 알 수 있다.

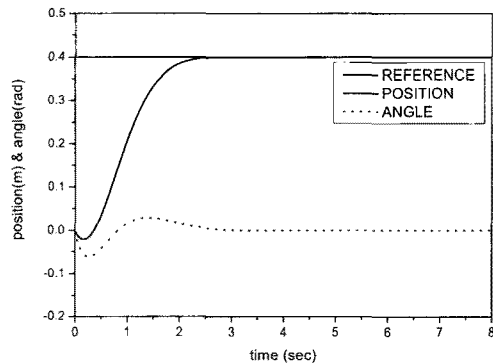


Fig. 5 Response of the constrained optimal control about An inverted pendulum system

## 5. 결 론

본 논문에서는 대차의 오버슈트가 없고 가능한 빨리 목표위치에 정상편차 없이 도달하기 위해, 그리고 동시에 진자의 흔들림을 가능한 빨리 안정화될 수 있도록 하는 제어를 설계하였다. 이것은 설계사양을 만족하기 위해 적절한 성능지수에 제약조건을 추가한 RCGA를 사용하였다. 제안한 탐색법을 대표적인 불안정시스템인 도립진자에 적용하여 시행착오 없이 체계적으로 상태피드백 이득행렬을 추정할 수 있었다. 그리고 추정된 이득행렬을 시뮬레이션을 통해 설계사양에 만족함을 확인할 수 있었다.

## 참고문헌

[1] Zheng Dazhong, Linear System Theory.

- Tsinghua press, 1990.
- [2] Kalman, R. E. "When is a Linear Control System Optimal", J. Basic Eng. Trans. ASME-86D, 51-56, 1964.
- [3] Wang Yaoqing, The Determination of Weighting Matrices in LQ Optimal Control Systems, ACTA Automatica Sinica, 18 (2), 213-217, 1992.
- [4] K. Sugimoto, Partial Pole Placement by LQ Regulators: An Inverse Problem Approach, IEEE Transactions on Automatic Control, VoL 43, No.5, pp.706-708, May 1998.
- [5] M. H. Hsueh and H. Sehitoglu, A New Eigenvalue Placement Method for Linear Dynamic Systems, Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control, pp.4286-4287, 1997.
- [6] 진강규, 유전알고리즘과 그 응용, 교우사, 2004.
- [7] 진강규, 하주식, "최적화기법으로서의 유전알고리즘과 그 응용", 한국박용기관학회, 제21권 제2호, 1997.
- [8] 안종갑, 이윤형, 유희한, 소명옥, 진강규, "RCGA를 이용한 도립진자 시스템의 파라미터 추정 및 안정화 제어", 한국마린엔지니어링학회지, 제30권 6호, 2006.

## 저 자 소 개



### 안종갑(安鍾甲)

2000년 한국해양대학교 기관시스템공학부(공학사), 2006년 한국해양대학교 대학원 메카트로닉스공학(석사), 2006~동대학원 메카트로닉스 공학과 박사 과정. 현재 한국항만연수원 부교수, 관심분야 : 제어이론, 유전알고리즘 응용



### 이윤형(李潤炯)

2002년 한국해양대학교 기관시스템공학부(공학사), 2004년 한국해양대학교 대학원 기관시스템공학과(석사), 2007년 한국해양대학교 대학원 메카트로닉스 공학과(박사). 현재 한국항만연수원 부교수. 관심분야 : 제어이론, 유전알고리즘 응용



### 소명옥(蘇明玉)

1980년 한국해양대학교 기관학과(학사), 1989년 한국해양대학교 대학원 기관학과 석사, 1997년 동 대학원 박사. 한국항만·운송노동연구원 연구위원, 2005~2006년 University of Wales Cardiff 파견교수. 현재 한국해양대학교 선박전자기계공학부 교수. 관심분야 : 퍼지제어, 최적제어.