

임의의 탄성 경계 지점으로 지지된 판과 셸의 기하학적 선형 및 비선형해석

Geometrically Linear and Non-linear Analysis of Plates and Shells Resting on Arbitrary Elastic Edge Supports

이원홍* · 한성천** · 박원태***

Lee, Won Hong · Han, Sung Cheon · Park, Weon Tae

Abstract

A linear and non-linear analysis for plates and shells with arbitrary edge supports subjected to various loading was presented. The 9-node ANS(Assumed Natural Strain) shell element was employed and the spring element, which could express an arbitrary edge support using the six degrees of freedom, was introduced. For the application of this analysis, the plates and shells with various edge supports were analyzed, and the bending behavior with these edge supports were obtained accurately. For these edge supports, particularly elastic edge support was simulated by six springs and reasonable results were obtained. The results show that the present method can be widely used to analyze the bending behavior of plates and shells with arbitrary edge conditions.

Key words: Geometrically non-linear analysis, Elastic edge support, 9-node ANS shell element, Spring element, Plates, Shells

요 지

여러 가지 하중을 받는 임의의 탄성 경계 지지된 판과 셸의 기하학적 선형 및 비선형해석을 수행하였다. 가정변형률 9절점 셸 요소를 이용하였으며, 임의의 탄성 경계 지지를 표현하기 위해 6개의 자유도를 갖는 스프링 요소가 사용되었다. 탄성 경계 지지 구조물 해석의 응용을 위하여, 여러 형태의 단부 지지를 받는 판과 셸이 분석되었으며, 이들 단부 지지에 대한 휨 거동을 정확히 얻을 수 있었다. 6개의 스프링으로 표현된 탄성 경계 지지 조건에 대하여 적절한 결과를 얻을 수 있었다. 해석 결과로부터 본 연구의 해석 방법이 임의의 탄성 경계 조건을 갖는 판과 셸의 거동을 해석하는데 폭넓게 사용될 수 있음을 알 수 있었다.

핵심용어: 기하학적 비선형 해석, 탄성경계지지점, 가정변형률 9절점 셸 요소, 스프링 요소, 판, 셸

1. 서 론

많은 셸 요소 공식이 Ahamed 등(1970)에 의해 소개된 '축퇴(Degenerated)' 모델에 바탕을 두고 있다. 축퇴 셸 요소는 두꺼운 판이나 두꺼운 셸 문제를 처리할 수 있는데, 그 결과는 두께가 얇아질수록 급격히 정확도가 떨어지게 된다. 이와 같은 현상을 잠김 현상이라고 한다. 일반적으로, 두 종류의 잠김 현상이 곡선 셸의 유연한 휨 요소에서 발생할 수 있는데, 한 종류는 전단 잠김이고 다른 한 종류는 막 잠김이다. 전단 잠김은 평면이거나 곡선 셸 휨 요소에서 발생할 수 있는 반면, 막 잠김은 오직 얇은 셸에서만 나타난다. 많은 연구자들의 노력이 Mindlin-Reissner 형태의 셸 요소에서 잠김 문제를 극복하고 얇은 판과 셸의 응용에 대하여 효과적이며

신뢰할 수 있도록 표현하는데 집중되었다. Bathe 와 Dvorkin (1986)은 막 잠김 및 전단 잠김을 피하기 위한 8절점 셸 요소(MITC8)를 제안하였다. Huang과 Hinton(1986)은 9절점 가정변형률 셸 요소(QUAD9)를 개발하였다. 그들은 전단 잠김을 극복하기 위하여 자연좌표계에서 횡 전단변형의 향상된 보간법을 사용하였다. 막 변형률의 향상된 보간법은 막 잠김 거동을 피하기 위하여 국부 좌표계에서 사용되었다. Yoo와 Choi(2000)는 개선된 기하학적 비선형 축퇴 셸 요소를 제시 하였다. 그들은 자연좌표에서 횡 전단 변형률의 향상된 보간 법과 막 변형률에서 감차 적분과 비적합 변위 모드의 선택적 추가법을 사용하였다. Kebari와 Cassell(1992)은 안정화 기법을 사용한 순수 변위 방법에 기초한 9절점 셸 요소를 개발 하였다. 순수변위 셸 요소는 잠김을 피하기 위하여 감차 적

*정회원 · 진주산업대학교 토목공학과 부교수 (E-mail : whyee@jinju.ac.kr)

**정회원 · 대원과학대학 토목과 부교수

***정회원 · 공주대학교 토목공학과 교수 (교신저자)

분을 사용하였다. Ma와 Kanok-Nukulchai(1989)는 요소 기저 정식화에 바탕을 둔 9절점 가정변형률 쉘 요소를 개발하였으며, Han 등(2004)은 Ma 등의 개념을 적층 복합 판과 쉘로 확장하였고 한성천과 최삼열(2004)은 적층복합구조의 자유진동해석으로 확장하였다. Kim 등(2007)은 가정변형률 4절점 쉘요소를 이용하여 적층복합쉘의 비선형 해석을 수행하였고 Han 등(2007)은 보강된 적층복합판의 동적특성에 관해 연구하였다.

Gorman(2000)은 회전 탄성 경계 지지를 고려한 판의 자유진동과 좌굴 문제를 연구하였다. Huang과 Thambiratnam(2001) 탄성 지반 위에 놓인 판을 유한 대판법을 이용하여 해석하였다. Ni 등(2005)은 *pb-2* Rayleigh-Ritz 방법을 이용하여 탄성 경계 지지된 적층판을 연구하였다.

본 연구에서는 전단 잠김과 막 잠김을 제거하기 위하여, Han 등(2004)의 가정변형률 방법이 자연 좌표계에 사용되었고, 등가 구성 방정식이 두께 방향의 층 효과를 고려하기 위하여 사용되었다. 본 연구에서 사용한 쉘 요소는 다른 가정변형률 방법을 사용한 참고 문헌과 비교하여 매우 좋은 결과를 나타내고 있다. 9절점 ANS 쉘 요소와 임의의 단부 지지를 표현하기 위하여 절점 당 6개의 자유도를 갖는 스프링 요소가 판과 쉘의 휨 해석에 사용되었다. 임의의 하중을 받는 이상화된 경계 사이에 존재하는 실질적인 경계로 지지된 판과 쉘의 기하학적 선형 및 비선형 휨 거동을 해석하였다. 특히, 탄성 경계 지지를 갖는 판과 쉘이 다양하게 연구되었다. 참고 문헌과 비교된 일부의 선택된 예제가 본 연구에서 제안된 쉘과 스프링 요소의 유효성을 확인하기 위하여 제시되었다.

2. 탄성 경계 지지

단순 지지 및 고정 지지는 이상화된 단부 지지 조건으로 알려져 있다. 이들 지지 조건 외에, 탄성 경계 지지는 또 다른 중요한 단부 지지 조건이다. 실제적인 응용에서, 판의 단부 구축에 다소의 탄성 조건이 있을 수 있으며, 따라서 판을 해석함에 있어서 탄성 경계 지지가 더 중요할 수도 있게 된다. 본 연구에서는, 그림 1에 표현된 바와 같이 각각의 스프

k_i : x, y, z 축 방향의 변위에 대한 스프링 계수 ($i=1,2,3$)
 k_j : x, y, z 축 방향의 회전에 대한 스프링 계수 ($j=4,5,6$)

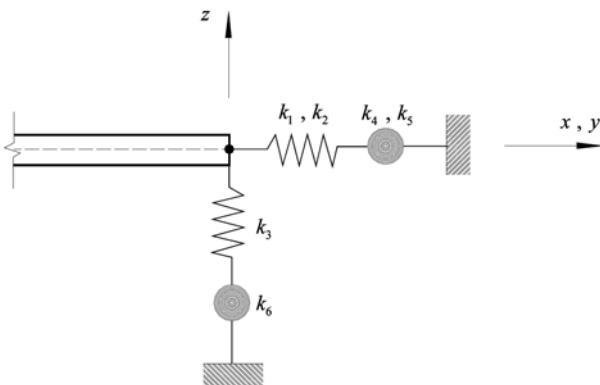


그림 1. 탄성 단부 지지의 스프링 모델

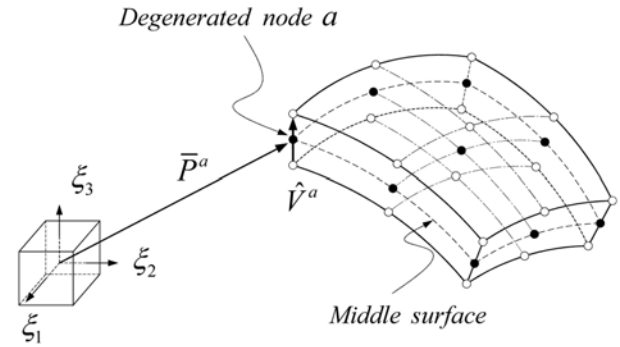


그림 2. 6개의 자유도를 갖는 9절점 쉘 요소

링 모델을 조합하여 탄성 경계 지지를 가정하였고, 구조물의 해석에는 6개의 자유도를 갖는 9절점 쉘 요소가 사용되었다. 스프링 모델은 6개의 자유도를 갖도록 하였는데, 3개의 축방향 스프링과 3개의 회전 스프링이 사용되었으며, 그 특성이 다음과 같이 나열된다.

3. 쉘 요소의 기하와 운동학

6개의 자유도를 갖는 9절점 쉘 요소의 구조 형상은 그림 2와 같다.

중립면에 수직인 법선은 변형 후에도 직선으로 유지된다는 쉘의 가정을 사용하면, 쉘 요소의 초기 형상은 상수의 두께 h 를 가지며, 식(1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{P}(\xi_i) = \bar{\mathbf{P}}(\xi_\beta) + \xi_3 \bar{\mathbf{V}}(\xi_\beta); \quad i=1,2,3, \quad \beta=1,2 \quad (1)$$

$$\bar{\mathbf{P}}(\xi_\beta) = \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_\beta) \bar{\mathbf{P}}^a \quad (2)$$

$$\bar{\mathbf{V}}(\xi_\beta) = \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_\beta) \frac{h^a}{2} \hat{\mathbf{V}}^a \quad (3)$$

여기서, \mathbf{P} 는 쉘 요소에서 일반적인 한 점의 위치 벡터를 나타내고, $\bar{\mathbf{P}}$ 는 중립면에서 한 점의 위치 벡터를 나타낸다. N_a 는 노드 a 와 관련하여 2차원 2차 라그랑지안 보간 함수이며, $\bar{\mathbf{P}}^a$ 는 3개의 직교 좌표 요소를 갖고 있는 위치 벡터이다. h^a 는 노드 a 에서 쉘 두께이다. $\hat{\mathbf{V}}^a$ 는 절점 a 에서 중립면에 수직한 단위 법선 벡터이다. 절점 a 에서의 단위 법선 벡터 $\hat{\mathbf{V}}^a$ 는 식(4)와 같이 간단히 결정 된다.

$$\hat{\mathbf{V}}^a = \frac{\frac{\partial \bar{\mathbf{P}}^a}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{P}}^a}{\partial \xi_2}}{\left[\frac{\partial \bar{\mathbf{P}}^a}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{P}}^a}{\partial \xi_2} \right]} \quad (4)$$

3개의 직교 축에 대한 유한 회전은 미소 회전과는 달리 벡터로 특정 지을 수 없다(Groesberg, 1968). 쉘의 선형 해석에 일반적으로 사용되는 3개의 전체 좌표축에 대한 쉘 수직 성분 회전의 사용은 기피되었으며, 이것은, 유한 회전이 포함될 때, 이들 회전의 변환 및 갱신에 특별한 처리 과정이 필

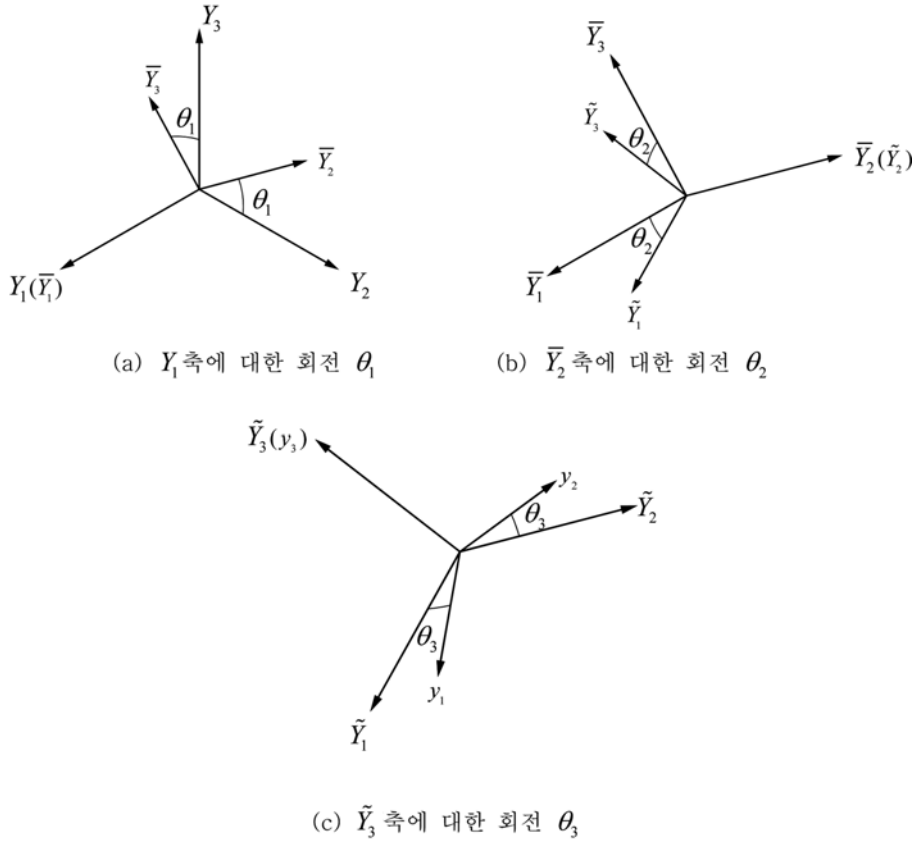


그림 3. 제안된 방법의 회전 표현

요하기 때문이다. 강제 동역학에서 오일러의 각(Groesberg, 1968)을 이용하여 성공적으로 다루어진 강체의 회전 운동은 일련의 엄밀한 회전 변위에 의해 정의되는 것으로 알려져 있다. 여기서 회전에 관한 변환 행렬은 필요한 3개의 모드 대신 오직 2개의 독립 회전 모드를 표현할 수 있으며, 따라서, 이것은 미소 회전이 주된 문제일 때 오일러 각의 단점을 보여준다. 본 연구에서는 회전을 연속된 3개 회전으로 엄밀히 분리 하고 이를 순차적으로 표현하여 제안하였으며, 그림 3에 나타내었다.

그림 3의 3개의 회전에 관한 좌표 변환 행렬은 식(5)와 같다.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & -s_1 \\ 0 & s_1 & c_1 \end{bmatrix}; \quad R_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix}; \quad R_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

여기서, $c_i = \cos \theta_i$, $s_i = \sin \theta_i$ ($i=1,2,3$) 이고 좌표 변환 행렬 \mathbf{R} 은 식(6)과 같다.

$$\mathbf{R} = R_1 R_2 R_3 = \begin{bmatrix} c_2 c_3 & -c_2 s_3 & s_2 \\ c_1 s_3 + s_1 s_2 c_3 & c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 & -s_1 c_2 \\ s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 & s_1 c_3 + c_1 s_2 s_3 & c_1 c_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

3개의 회전은 식(6)과 같이 하나의 변환 행렬로 정의할 수 있다. 그러므로 3개의 회전은 각 절점에 추가된 참고 시스템

에서 일반적인 좌표계로 사용할 수 있다. 그때 중립면에 대한 회전 변위는 이 3개의 회전으로 나타낼 수 있다.

셀 요소에서 변위장 \mathbf{u} 는 식(7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{u}(\xi_i) = \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_\beta) \left[\bar{\mathbf{u}}^a \xi_3 \frac{h^a}{2} \hat{\mathbf{e}}^a \right] = \bar{\mathbf{u}}(\xi_\beta) + \xi_3 \bar{\mathbf{e}}(\xi_\beta) \quad (7)$$

여기서 $\bar{\mathbf{u}}$ 는 중립면의 임의 점의 병진 변위 벡터이고 $\hat{\mathbf{e}}^a$ 는 절점 a 에서 회전 변위 벡터이다. 즉,

$$\hat{\mathbf{e}}^a = \mathbf{R}^a \hat{\mathbf{V}}^a - \hat{\mathbf{V}}^a \quad (8)$$

결국, 식(6)의 좌표 변환 행렬을 사용하여 식(7)의 변위장은 식(9)와 같이 표현될 수 있다.

$$\mathbf{u}(\xi_i) = \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_\beta) \left[\bar{\mathbf{u}}^a \xi_3 \frac{h^a}{2} (\mathbf{R}^a - \mathbf{I}_{3 \times 3}) \hat{\mathbf{V}}^a \right] \quad (9)$$

여기서 $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ 는 단위 행렬이다.

본 연구의 셀 요소에 대한 변위장의 증분 형태는 Ma 등 (1989)의 절점 증분 벡터 $\Delta \mathbf{u}^a$ 를 사용하여 식(10)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta \mathbf{u}(\xi_i) = \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_\beta) [\mathbf{I}_{3 \times 3} \xi_3 \Psi^a] \Delta \mathbf{u}^a \quad (10)$$

여기서,

$$\Psi^a = \frac{h^a}{2} \mathbf{R}^a \Phi^a \mathbf{R}_A, \quad \Delta \mathbf{u}^a = \{ \Delta \bar{u}_1^a, \Delta \bar{u}_2^a, \Delta \bar{u}_3^a, \Delta \theta_1^a, \Delta \theta_2^a, \Delta \theta_3^a \} \quad (11)$$

그리고

$$\Phi^a = \begin{bmatrix} 0 & \hat{V}_3^a & -\hat{V}_2^a \\ -\hat{V}_3^a & 0 & \hat{V}_1^a \\ \hat{V}_2^a & -\hat{V}_1^a & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_A = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\cos \theta_2 \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

4. 비틀림 효과

수직 회전 자유도에 관련된 직접 강성이 없는 요소에서 이웃하는 요소들이 거의 동일 평면상에 존재하게 되면 강성 행렬의 역행렬을 구할 수 없게 된다. 과거에는, 요소에 국부적으로, 혹은 각 절점에 정의된 유사 수직 방향에 가상의 비틀림 스프링을 추가하였다. 이러한 기법은 종종 만족스럽지 못한 결과를 나타내는데, 특히 연성 시스템에서 강제 운동에 의해 스프링에 과도한 변형 에너지가 발생할 수 있다. 본 연구에서는 Kanok-Nukulchai(1979)의 제안에 근거하여 수직 회전 자유도에 식(13)과 같은 추가 변형 에너지를 이용한 벌칙 범함수를 면내 비틀림에 결합하여 사용한다.

$$U_i = k_t G \int_V \left[\alpha_i(\xi_1, \xi_2) - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial w_2}{\partial z_1}(\xi_1, \xi_2, 0) - \frac{\partial w_1}{\partial z_2}(\xi_1, \xi_2, 0) \right\} \right]^2 dV \quad (13)$$

여기서 k_t 는 지정될 매개 변수이며 0.1을 사용하였고, G 는 전단 계수; V^e 는 요소의 체적; α_i 는 면내 비틀림 회전; w_1 과 w_2 는 국부 좌표계에서 변위 성분; z_3 축이 셸의 중립면에 수직인 $z_i(i=1,2,3)$ 는 국부 직교 좌표축; 그리고 dV 는 미소 체적이다. 과다 구속 현상을 피하기 위하여 비틀림 강성을 계산할 때 2×2 가우스 적분법을 사용하였다.

5. 자연 변형률 텐서

자연 좌표계(Han 등, 2004)에 따르면, Green 변형률 텐서에 대응하는 자연 변형률 텐서는 식(14)와 같이 정의 된다.

$$\tilde{E}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{P}_I \partial \mathbf{P}_J}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} E_{IJ} \quad (14)$$

증분 변형률은 식(15)로 간단하게 표현될 수 있다.

$$\Delta \tilde{E}^m = \tilde{\mathbf{B}}_m \Delta \bar{\mathbf{u}}, \quad \Delta \tilde{E}^b = \xi_3 \tilde{\mathbf{B}}_b \Delta \bar{\mathbf{u}}, \quad \Delta \tilde{E}^s = \tilde{\mathbf{B}}_s \Delta \mathbf{u} \quad (15)$$

여기서, $\Delta \tilde{E}^m$, $\Delta \tilde{E}^b$, $\Delta \tilde{E}^s$ 는 각각 증분 면내 변형률, 증분 휨 변형률, 증분 수직 전단 변형률 성분이고 $\tilde{\mathbf{B}}$ 는 변형률-변위 행렬이다

6. 구성 텐서

자연 구성 텐서는 식(16)과 같이 정의 된다.

$$\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \tilde{J}_0 \frac{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta \partial \xi_\gamma \partial \xi_\delta}{\partial \mathbf{P}_I \partial \mathbf{P}_J \partial \mathbf{P}_K \partial \mathbf{P}_L} C_{IJKL} \quad (16)$$

여기서, $\tilde{J}_0 = \det[\partial \mathbf{P}_I / \partial \xi_\alpha]$ 이고 C_{IJKL} 는 직교좌표계에서 일반적인 등방성 연속체를 위한 구성 텐서로써 식(17)과 같이 표현할 수 있다.

$$C_{IJKL} = \lambda \delta_{IJ} \delta_{KL} + \mu (\delta_{IK} \delta_{JL} + \delta_{IL} \delta_{JK}) \quad (17)$$

여기서, λ 와 μ 는 Lamé 상수이다.

식(16)에서 자연 구성 텐서는 식(18)과 같이 표현될 수 있다.

$$\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \tilde{J}_0 [\lambda g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} + \mu (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} + g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma})] \quad (18)$$

여기서

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{IJ} \frac{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta}{\partial \mathbf{P}_I \partial \mathbf{P}_J} = \frac{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta}{\partial \mathbf{P}_I \partial \mathbf{P}_I} \quad (19)$$

식(18)은 두께 방향 자연 구성 계수의 변화 효과를 무시할 수 있다는 가정하에 일반화 평면 응력 조건을 사용하여 단순화시킬 수 있으며 식(20)와 같다.

$$\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \tilde{J}_0 [\bar{\lambda} \bar{g}_{\alpha\beta} \bar{g}_{\gamma\delta} + \mu (\bar{g}_{\alpha\gamma} \bar{g}_{\beta\delta} + \bar{g}_{\alpha\delta} \bar{g}_{\beta\gamma})] \quad (\alpha, \beta) \neq (3, 3)$$

그리고 $(\gamma, \delta) \neq (3, 3)$

$$(20)$$

여기서, $\bar{\lambda}$ 는 변환된 Lamé 상수이고

$$\tilde{J}_0 = \det \left[\frac{\partial \mathbf{P}_I}{\partial \xi_\alpha} \right]_{\xi_3=0}, \quad \bar{g}_{\alpha\beta} = \left[\frac{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta}{\partial \mathbf{P}_I \partial \mathbf{P}_I} \right]_{\xi_3=0} \quad (21)$$

자연 구성 관계식은 식(22)와 같이 행렬로 표현할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \tilde{S}_{11} \\ \tilde{S}_{22} \\ \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{13} \\ \tilde{S}_{23} \end{Bmatrix} = \tilde{J}_0 \begin{bmatrix} [\tilde{\mathbf{C}}_{mb}]_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & [\tilde{\mathbf{C}}_s]_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{E}_{11} \\ \tilde{E}_{22} \\ \tilde{E}_{12} \\ \tilde{E}_{13} \\ \tilde{E}_{23} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

여기서 \tilde{S}_{ij} 는 자연 응력 텐서이고

$$[\tilde{\mathbf{C}}_{mb}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} (\bar{\lambda} + 2\mu)(\bar{g}_{11}^2) & \bar{\lambda}(\bar{g}_{11}\bar{g}_{22}) + 2\mu(\bar{g}_{12}^2) & (\bar{\lambda} + 2\mu)(\bar{g}_{11}\bar{g}_{22}) \\ & (\bar{\lambda} + 2\mu)(\bar{g}_{11}^2) & (\bar{\lambda} + 2\mu)(\bar{g}_{11}\bar{g}_{22}) \\ \text{symm.} & & \bar{\lambda}(\bar{g}_{12}^2) + \mu(\bar{g}_{11}\bar{g}_{22} + \bar{g}_{12}^2) \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{\mathbf{C}}_s]_{2 \times 2} = \mu_k \begin{bmatrix} \bar{g}_{11}\bar{g}_{33} & \bar{g}_{12}\bar{g}_{33} \\ \bar{g}_{12}\bar{g}_{33} & \bar{g}_{22}\bar{g}_{33} \end{bmatrix} \quad (23)$$

이때, $\mu_k = k_s \mu$ 이고 Reissner에 의해서 제안된 전단보정계수 (k_s) 5/6가 유한요소 정식에 사용되었다.

7. 전단 잠김과 면내 잠김

잠김 문제를 해결하기 위하여, Han 등(2004)이 제안한 9 절점 셸 요소에서 가정 자연 변형률 방법을 사용하였다. 따라서, 전단 및 면내 변형률장은 그림 4와 같은 표본점으로 보간 되었다.

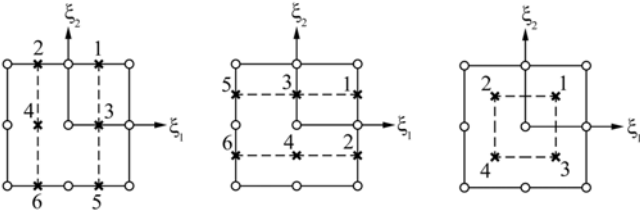


그림 4. $\tilde{e}_{11}, \tilde{e}_{13}, \tilde{e}_{22}, \tilde{e}_{23}$ (22) 및 \tilde{e}_{12} 의 가정 변형률을 위한 표본점

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{13} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \Omega_i(\xi_1) \Xi_j(\xi_2) \tilde{E}_{13}^{\delta}, & \tilde{e}_{23} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \Omega_i(\xi_2) \Xi_j(\xi_1) \tilde{E}_{23}^{\delta} \\ \tilde{e}_{12} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Omega_i(\xi_1) \Omega_j(\xi_2) \tilde{E}_{12}^{\delta} \end{aligned} \quad (24)$$

여기서 $\delta = 2(j-1) + i$ 는 그림 4에서 표본점의 위치를 나타내고, 그 형상 함수 $\Omega_i(\xi_1)$ 및 $\Xi_j(\xi_2)$ 식(25)와 같다.

$$\begin{aligned} \Omega_1(\xi_1) &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\xi_1), & \Omega_2(\xi_1) &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\xi_1) \\ \Xi_1(\xi_2) &= \frac{1}{2}\xi_2(\xi_2 + 1), & \Xi_2(\xi_2) &= 1 - \xi_2^2, & \Xi_3(\xi_2) &= \frac{1}{2}\xi_2(\xi_2 - 1) \end{aligned} \quad (25)$$

여기서 $\Omega_i(\xi_2)$ 및 $\Xi_j(\xi_1)$ 는 변수를 바꾸어서 얻을 수 있다. 가정 변형률 $\tilde{e}_{11}, \tilde{e}_{22}$ 는 각각 $\tilde{e}_{13}, \tilde{e}_{23}$ 와 동일한 보간 방법이 쓰인다.

식 (24)로부터 유도된 가정 변형률 \tilde{e} 를 변위장에서 얻어진 변형률 \tilde{E} 대신에 본 연구의 쉘 요소에 사용하였다. 본 연구에서는, 식(26)과 같이 새로운 $\tilde{\mathbf{B}}_{AS}$ 행렬이 일반적인 $\tilde{\mathbf{B}}$ 행렬 대신에 사용되었다.

$$\begin{Bmatrix} \tilde{e}^m \\ \tilde{E}^b \\ \tilde{e}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{B}}_m)_{AS} & 0 \\ \xi_3 \tilde{\mathbf{B}}_{b1} & \xi_3 \tilde{\mathbf{B}}_{b2} \\ (\tilde{\mathbf{B}}_{s1})_{AS} & (\tilde{\mathbf{B}}_{s2})_{AS} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (26)$$

여기서 \tilde{e}^m 와 \tilde{e}^s 는 가정 면내 변형률과 가정 전단 변형률 요소이다.

8. 변형률 에너지와 요소 강성 행렬

미소 변형률 이론을 사용하면 식(27)과 같이 증분 평형방정식을 나타낼 수 있다.

$$\int \delta(\Delta^L \tilde{E})^T \tilde{\mathbf{C}} \Delta^L \tilde{E} dV + \int \mathbf{S}(\Delta^{NL} \tilde{E}) dV = {}^{t+\Delta t} \delta W_{ext} - \int \delta(\Delta^L \tilde{E})^T \mathbf{S} dV \quad (27)$$

여기서 \mathbf{S} 는 자연 응력 텐서이고 위 첨자 t 는 일반적으로 현재 상태를 나타내며, 위 첨자 $t+\Delta t$ 는 증분된 상태를 나타내며, ${}^{t+\Delta t} \delta W_{ext}$ 는 $t+\Delta t$ 에서 외적 가상 일을 의미한다.

임의의 탄성 경계 지점으로 지지된 판과 쉘의 기하학적 선형 및 비선형 해석

8.1 선형 강성행렬

전체 접선 강성행렬은 탄성접선강성(\mathbf{K}_L)을 포함한다. 식 (27)로부터, 증분 평형 방정식의 선형부분은 식(28)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int \delta(\Delta^L \tilde{E})^T \tilde{\mathbf{C}} \Delta^L \tilde{E} dV = \delta \Delta \mathbf{u}^T \left(\int \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{B}} dV \right) \Delta \mathbf{u} = \delta \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_L \Delta \mathbf{u} \quad (28)$$

여기서 $\Delta \mathbf{u} = \{\Delta \bar{\mathbf{u}} \Delta \theta\}^T$ 이다.

선형 강성행렬은 두께방향으로 직접적분을 수행하여 얻을 수 있다. 최종적으로 6×6 요소 강성행렬을 식(29)와 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_L] &= \int \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{B}}_m)_{AS} + \xi_3 \tilde{\mathbf{B}}_{b1} & \xi_3 \tilde{\mathbf{B}}_{b2} \\ (\tilde{\mathbf{B}}_{s1})_{AS} & (\tilde{\mathbf{B}}_{s2})_{AS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\tilde{\mathbf{C}}_{mb}] & 0 \\ 0 & [\tilde{\mathbf{C}}_s] \end{bmatrix} \\ &= \int \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{B}}_m)_{AS} + \xi_3 \tilde{\mathbf{B}}_{b1} & \xi_3 \tilde{\mathbf{B}}_{b2} \\ (\tilde{\mathbf{B}}_{s1})_{AS} & (\tilde{\mathbf{B}}_{s2})_{AS} \end{bmatrix} d\xi_3 dA = \int \begin{bmatrix} \mathbf{K}_L^{11} & \mathbf{K}_L^{12} \\ \mathbf{K}_L^{21} & \mathbf{K}_L^{22} \end{bmatrix} dA \end{aligned} \quad (29)$$

여기서

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_L^{11} &= 2(\tilde{\mathbf{B}}_m)_{AS} [\tilde{\mathbf{C}}_{mb}] (\tilde{\mathbf{B}}_m)_{AS} + \frac{2}{3} \tilde{\mathbf{B}}_{b1} [\tilde{\mathbf{C}}_{mb}] \tilde{\mathbf{B}}_{b1} \\ &\quad + 2(\tilde{\mathbf{B}}_{s1})_{AS} [\tilde{\mathbf{C}}_s] (\tilde{\mathbf{B}}_{s1})_{AS}, \\ \mathbf{K}_L^{12} &= \frac{2}{3} \tilde{\mathbf{B}}_{b1} [\tilde{\mathbf{C}}_{mb}] \tilde{\mathbf{B}}_{b2} + 2(\tilde{\mathbf{B}}_{s1})_{AS} [\tilde{\mathbf{C}}_s] (\tilde{\mathbf{B}}_{s2})_{AS}, \\ \mathbf{K}_L^{21} &= \frac{2}{3} \tilde{\mathbf{B}}_{b2} [\tilde{\mathbf{C}}_{mb}] \tilde{\mathbf{B}}_{b1} + 2(\tilde{\mathbf{B}}_{s2})_{AS} [\tilde{\mathbf{C}}_s] (\tilde{\mathbf{B}}_{b1})_{AS}, \\ \mathbf{K}_L^{22} &= \frac{2}{3} \tilde{\mathbf{B}}_{b2} [\tilde{\mathbf{C}}_{mb}] (\tilde{\mathbf{B}}_{s2})_{AS} + 2(\tilde{\mathbf{B}}_{b2})_{AS} [\tilde{\mathbf{C}}_s] (\tilde{\mathbf{B}}_{s2})_{AS}. \end{aligned} \quad (30)$$

8.2 기하 강성행렬

전체 강성 행렬 중 기하 강성 행렬(\mathbf{K}_G)을 구하기 위하여 Green 변형률 텐서의 비선형 부분을 사용하였다.

$$\left\{ {}^{NL} \tilde{E}_{\alpha\beta} \right\} = \begin{Bmatrix} {}^{NL} \tilde{E}_{11} \\ {}^{NL} \tilde{E}_{12} \\ 2 {}^{NL} \tilde{E}_{13} \\ 2 {}^{NL} \tilde{E}_{23} \\ 2 {}^{NL} \tilde{E}_{13} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_I}{\partial \xi_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_I}{\partial \xi_2} & 0 \\ \frac{\partial u_I}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u_I}{\partial \xi_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_I}{\partial \xi_3} & \frac{\partial u_I}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial u_I}{\partial \xi_3} & 0 & \frac{\partial u_I}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_I}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial u_I}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial u_I}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\Omega} \quad (31)$$

식(7)을 식(31)에 대입하면 각 변위의 자연 좌표계에 대한 편 미분은 식(32)와 같다.

$$\frac{\partial u_I}{\partial \xi_1} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{Bmatrix} + \xi_3 \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{u}}_I + \xi_3 \tilde{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{e}}_I \quad (32)$$

식(31)의 다른 항들도 식(33)과 식(34)와 같이 표현된다.

$$\frac{\partial u_I}{\partial \xi_2} = \tilde{\mathbf{G}}_3 \bar{u}_I + \xi_3 \tilde{\mathbf{G}}_4 \bar{e}_I \quad (33)$$

$$\frac{\partial u_I}{\partial \xi_3} = \tilde{\mathbf{G}}_5 \bar{e}_I \quad (34)$$

식(31)에서 Ω 의 증분은 식(10)을 이용하여 정리하면 식(35)와 같다.

$$\Delta\Omega = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta u_1}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \Delta u_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_1 & \xi_3 \tilde{\mathbf{G}}_2 \\ \tilde{\mathbf{G}}_3 & \xi_3 \tilde{\mathbf{G}}_4 \\ 0 & \tilde{\mathbf{G}}_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{u}_I \\ \Delta \bar{e}_I \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{G}} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{\mathbf{u}} \\ \Delta \theta \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{G}} \Delta \mathbf{u} \quad (35)$$

그리고 Green 변형률 비선형 부분의 증분에 대한 변분은 식(36)과 같다.

$$\delta(\Delta^{NL} \tilde{E}) = \delta \Delta \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{G}} \Delta \mathbf{u} \quad (36)$$

변형률의 비선형 부분을 식(27)에 대입하면 평형방정식의 비선형 부분은 식(37)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int S_{\alpha\beta} \delta(\Delta^{NL} \tilde{E}) dV = \int \delta(\Delta^{NL} \tilde{E})^T S_{\alpha\beta} dV = \int \delta \Delta \Omega^T \Delta \tilde{\mathbf{Q}}^T S_{\alpha\beta} dV \quad (37)$$

그리고,

$$\Delta \tilde{\mathbf{Q}}^T S_{\alpha\beta} = \mathbf{S} \Delta \Omega = \mathbf{S} \tilde{\mathbf{G}} \Delta \mathbf{u} \quad (38)$$

식(38)을 식(37)에 대입하면 식(39)을 얻을 수 있다.

$$\int \delta \Delta \Omega^T \mathbf{S} \tilde{\mathbf{G}} \Delta \mathbf{u} dV = \delta \Delta \mathbf{u}^T \left(\int \tilde{\mathbf{G}}^T \mathbf{S} \tilde{\mathbf{G}} dV \right) \Delta \mathbf{u} = \delta \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_G \Delta \mathbf{u} \quad (39)$$

식(39)에서 기하 강성행렬은 식(40)으로 나타낼 수 있다,

$$\mathbf{K}_G = \int \tilde{\mathbf{G}}^T \mathbf{S} \tilde{\mathbf{G}} dV \quad (40)$$

식(40)은 식(41)과 같은 형태로 표현된다.

$$\mathbf{K}_G = \int_A \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_1^T & \tilde{\mathbf{G}}_3^T & \mathbf{0} \\ \xi_3 \tilde{\mathbf{G}}_2^T & \xi_3 \tilde{\mathbf{G}}_4^T & \tilde{\mathbf{G}}_5^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} \mathbf{I}_3 & S_{12} \mathbf{I}_3 & S_{13} \mathbf{I}_3 \\ & S_{22} \mathbf{I}_3 & S_{23} \mathbf{I}_3 \\ \text{symm.} & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_1 & \xi_3 \tilde{\mathbf{G}}_2 \\ \tilde{\mathbf{G}}_3 & \xi_3 \tilde{\mathbf{G}}_4 \\ 0 & \tilde{\mathbf{G}}_5 \end{bmatrix} d\xi_3 dA \quad (41)$$

국부 회전 좌표계에서 식(41)은 해석적으로 두께 방향으로 적분을 통해 식(42)의 형태로 구할 수 있다.

$$[\mathbf{K}_G] = \int \begin{bmatrix} \mathbf{K}_G^{11} & \mathbf{K}_G^{12} \\ \mathbf{K}_G^{21} & \mathbf{K}_G^{22} \end{bmatrix}_{6 \times 6} dA \quad (42)$$

중분 비선형 평형방정식은 식(43)과 같다.

$$([\mathbf{K}_L] + [\mathbf{K}_G]) \Delta \mathbf{u} = {}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{F} \quad (43)$$

여기서 $\bar{\mathbf{F}}$ 는 외력 벡터 그리고 \mathbf{F} 는 내력 벡터이다.

9. 수치 예제

가장변형률 9절점 쉘 요소와 스프링 요소를 FEAP(Zienkiewicz and Taylor(1989, 2000))의 확장된 버전에 추가하여 해석하였다. 본 연구에서 사용한 요소들의 유효성을 검증하기 위하여, 여러 수치 예제들이 휨 해석에 사용되었다. 수치 해석 예제들은 탄성 경계 지지의 이상화된 특성을 조사하기 위하여 자유단, 단순 지지, 고정 지지 등이 포함되었다.

9.1. 탄성 경계 지지된 직선 보

중앙부분에 집중하중을 받는 직선 보를(그림 5) 오른쪽 끝단의 경계 조건을 변화시켜가면서 해석하였다. 이는 높은 형상비에 대한 요소의 성능을 보여주기 위하여 선택한 예제이다. 본 예제의 기하학적, 재료적 특성은 식(44)와 같다.

$$L = 6.0, \quad b = 0.2, \quad h = 0.1, \quad E = 1.0 \times 10^7, \quad \nu = 0.3. \quad (44)$$

직선 보의 중심에 집중 하중을 받는다. 그림 6에 여러 단부 지지 조건을 갖는 직선 보에 대한 하중점의 처짐 대비 여러 스프링 강성에 대한 결과가 표현되어 있다. 스프링 강성이 10^{-1} 보다 작을 때는 하중점에 대한 처짐이 거의 바뀌지 않음이 보여진다. 그러나, 스프링 강성이 1에서부터 10^3 로 증가할 때는, 처짐 곡선이 감소하기 시작하고, 자유 → 단순지

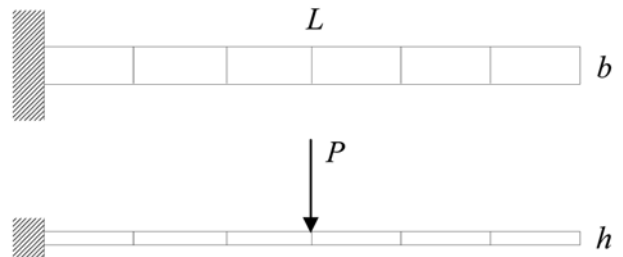


그림 5. 직선 보

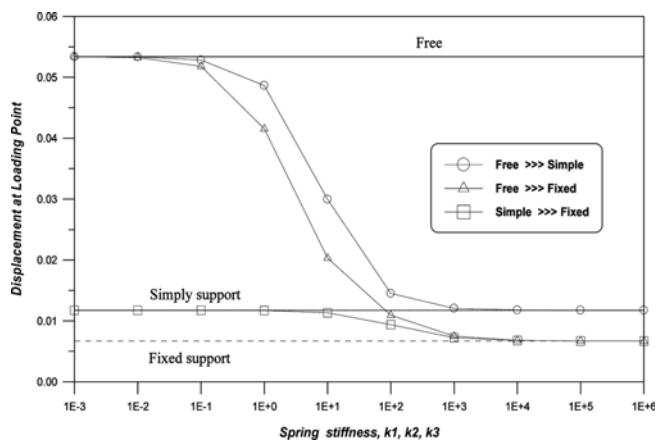


그림 6. 다양한 스프링 강성에 따른 하중 작용점의 처짐

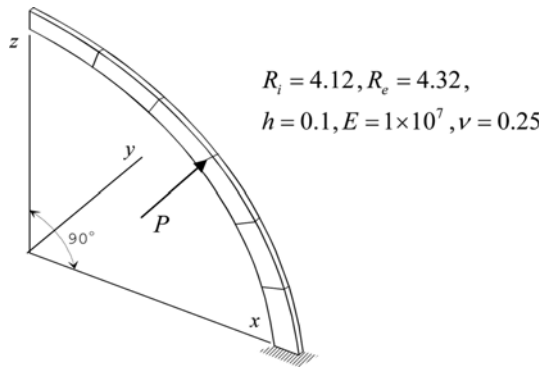


그림 7. 면외 하중을 받는 곡선보

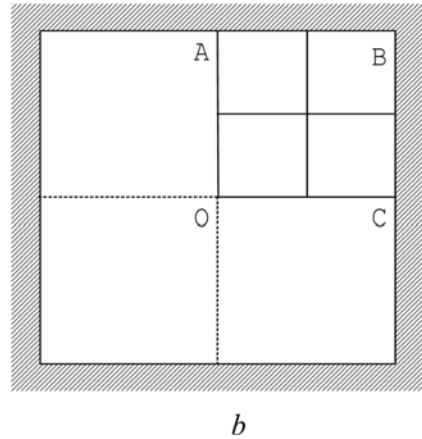


그림 9. 고정판의 형상

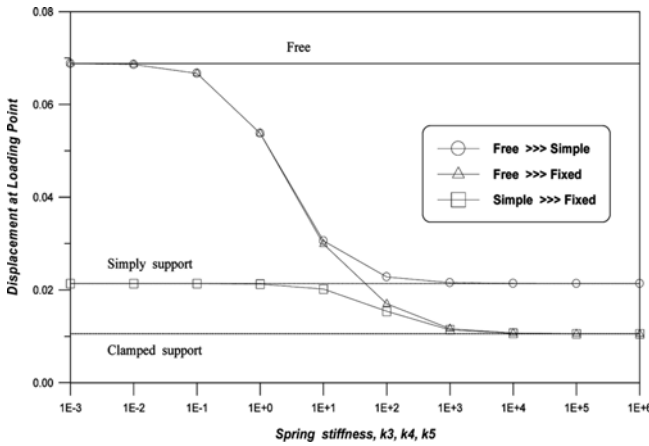


그림 8. 다양한 스프링 강성에 따른 하중 작용점의 처짐

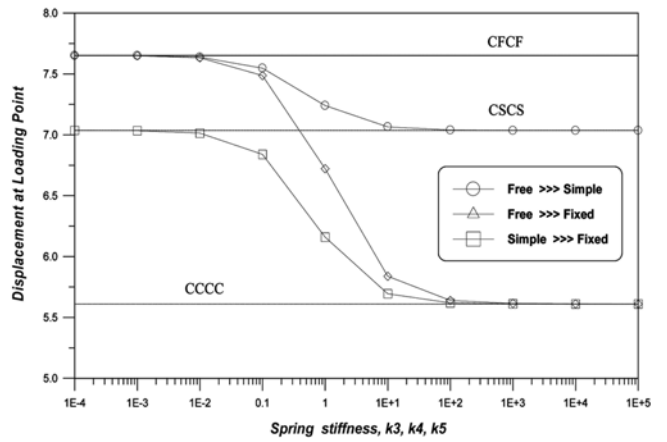


그림 10. 다양한 스프링 강성에 따른 하중 작용점의 처짐

지, 자유→고정 지지, 단순 지지→고정지지 등과 같이 이상화된 지지의 처짐 곡선으로 수렴되었다. 일반적으로 예측할 수 있는 것처럼 이상화된 두 가지 경계 사이에서 임의의 제약이 추가되는 경우 두 가지 경우의 처짐 곡선의 범위를 벗어나지 않고 스프링 강성의 증가에 따라 처짐 곡선이 수렴되었다.

9.2 탄성 경계 지지된 곡선 보

그림 7의 곡선 보는 호의 중심에 면외 전단 하중을 받는다. 고유의 메쉬 비틀림이 존재하기 때문에, 이 문제는 요소에서 기하학적 형상의 미세한 불규칙성 효과를 시험할 수 있다. 그림 8에 표현된 결과는 곡선 보에 대하여 다양한 단부 지지 조건 하에서, 하중점의 처짐 대 서로 다른 스프링 강성에 대한 결과를 보여준다.

스프링 강성이 10^{-2} 보다 작을 때에는, 하중점의 처짐이 거의 변하지 않음을 보여준다. 그러나, 스프링 강성이 1에서 10^3 로 증가할 때는, 처짐 곡선이 감소하기 시작하고, 이상화된 지지의 처짐곡선으로 수렴되었다. 즉, 자유단→단순 지지, 자유단→고정 지지, 단순 지지→고정 지지와 같이 비뚤다. 임의의 스프링 강성을 가지는 지지 조건일 때에, 하중 점의 변위는 상응하는 경계 조건의 사이 값을 갖는다. 직선보의 경우와 마찬가지로 두 가지 처짐 곡선의 범위를 벗어나지 않은 상태에서 처짐 곡선이 수렴되었다.

곡선 보의 경우에는 보의 기하학적 형상으로 인해 자유단에서 단순 지지로 변화하는 경우와 고정 지지로 변화하는 경우에 스프링의 강성이 10^{-2} 에서 10^1 인 구간에서 거의 같은 처짐을 나타내었다.

9.3 탄성 경계 지지된 직사각형 판

판의 중심점에 집중 하중이 두께방향으로 작용하는 고정된 판의 수렴도를 분석하였다. 판의 형상은 그림 9에 나타내었다. 본 논문에 사용된 요소는 사각형 판에 대하여 매우 좋은 결과를 보여주고 있으며, 어떤 형태의 잠김 문제도 발생하지 않았다. 판의 형상 및 사용된 재료의 특성은 식(45)와 같다. 사면 고정 판의 중앙점 처짐은 Timoshenko와 Woinwsky-Krieger(1959)의 정확 해($w = 5.60$)를 기준으로 비교하였다.

$$a = 2.0, b = 2.0, h = 0.01, E = 1.7472 \times 10^5, \nu = 0.3, P = 4.0 \times 10^{-4} \quad (45)$$

직선보의 경우와 마찬가지로 이상화된 세 가지 경계 사이에서 임의의 제약이 추가되는 경우 세 가지 경우의 처짐 곡선의 범위를 벗어나지 않고 스프링 강성의 증가에 따라 처짐 곡선이 수렴되었다.

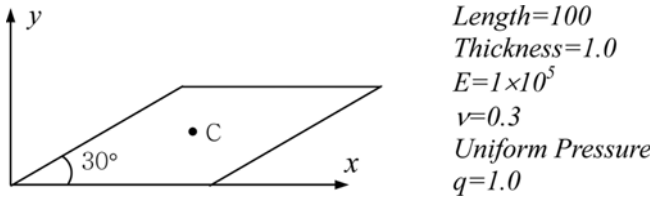


그림 11. 등분포 하중을 받는 경사 판

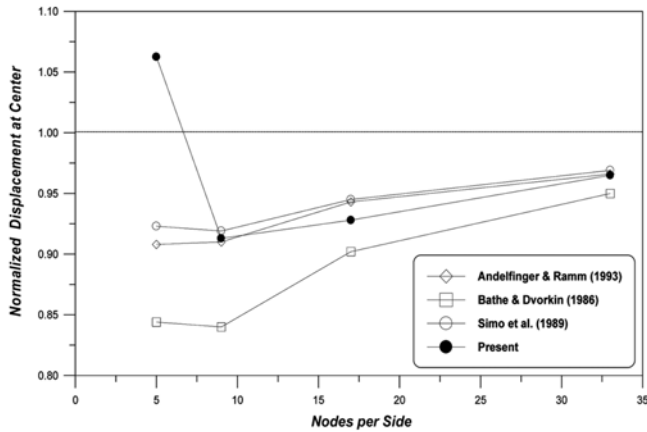


그림 12. Morely 경사 판의 중심점 변위

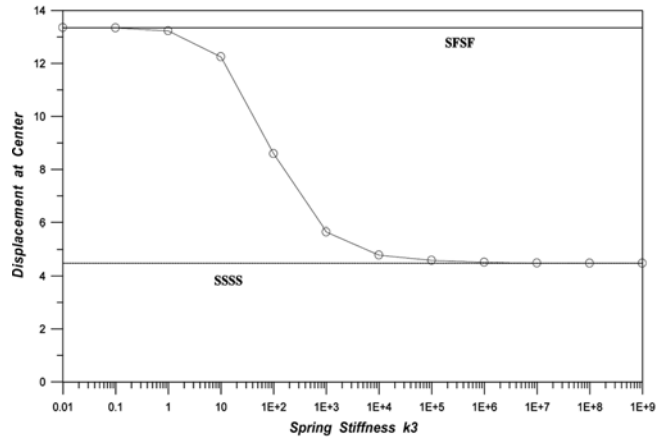


그림 13. 다양한 스프링 강성에 따른 하중 작용점의 처짐

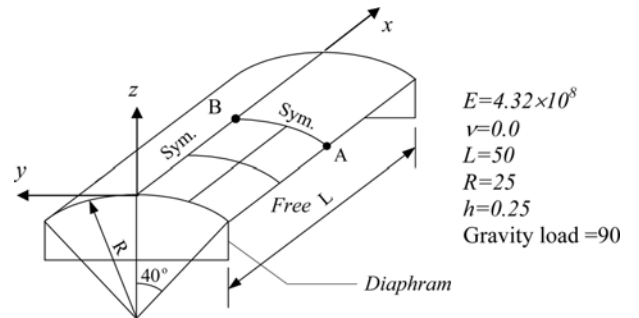


그림 14. Scordellis-Lo의 지붕

9.4. 탄성 경계 지지된 경사 판

등분포 하중을 받는 단순 지지된 경사 판을 그림 11에 나타내었다. 기울어진 사각형에 대하여, Andelginger와 Ramm (1993)의 문헌에 기술되었듯이, 판의 중심 목표 처짐은 4.64를 기준으로 사용하였다. Andelginger와 Ramm(1993), Simo 등(1989) 및 Bathe와 Dvorkin(1986)의 문헌과 비교하여 나타내었다. Andelginger와 Ramm(1993)의 값은 가정자연변형률과 보강변형률을 적용한 쉘 요소 EAS7-ANS를 이용하여 해석한 결과이고 Simo 등(1989)은 그림 12에서 MITC4 요소(Bathe와 Dvorkin(1986))와 같이 잘 알려진 쉘 요소보다 본 연구에서 사용된 요소가 정확한 결과를 보여주고 있음을 알 수 있다. 그림 13에 스프링 강성의 변화에 따른 2변(경사 변) 자유 2변 단순 지지 경사판의 처짐에 수렴되는 곡선을 나타내었다.

경사변의 경계조건이 자유단에서 단순지지로 변화하는 과정에 대한 중앙점의 처짐은 이상화된 자유단과 단순지지 경계 사이에서 스프링의 강성이 증가하는 경우 두 가지 경우의 처짐 곡선의 범위를 벗어나지 않고 스프링 강성의 증가에 따라 처짐 곡선이 수렴되었다.

9.5 탄성 경계 지지된 Scordellis-Lo 지붕

그림 14의 Scordellis-Lo 지붕 문제의 해법에서 면내력과 휨 변형 모두 중요하다. 본 예제는 곡선 쉘 내에 면내력의 상태를 모델링 할 때 요소의 능력을 결정짓는데 사용되어 질 수 있다. 이런 형태의 문제는 MacNeal과 Harder(1985)에 의해 제안되었으며, 점 A에서의 변위는 참고문헌의 해에 의하면 0.3024로 제시되었다. 최근에는, Saleeb 등(1987)에 의해 두꺼운 쉘의 해에서 0.3008로 다르게 제시되었다. 대칭 조건을 이용하여 1/4부분만 모델링 되었다. Andelginger와 Ramm(1993)의 값은 쉘 요소 EAS7-ANS를 이용하여 해석한 결과이다. 여러 가지 참고문헌의 결과들과 본 연구의 결과를 비교하여 표 1에 나타내었다. 본 연구의 결과가 참고문헌의 결과에 정확하게 수렴되는 것을 알 수 있다.

그림 15에 자유단 중심(A)의 처짐을 참고문헌(Saleeb 등, 1987)의 결과(0.3008)로 표준화하여 나타내었으며 본 연구의 결과가 같은 메쉬 분할에서 상대적으로 참고문헌의 결과에 근접하게 수렴되는 것을 알 수 있다.

표 1. 자유단 중심과 지붕 중심에서의 처짐

한 변 당 절점 수	Simo 등 (1989)	Andelfinger와 Ramm (1993)	STRAND 7 (QUAD 9)	본 연구(w_A)	본 연구(w_B)
5	0.3275	0.3147	0.2768	0.2900	-0.04427
9	0.3069	0.3043	0.2991	0.3001	-0.04504
17	0.3024	0.3031	0.3009	0.3009	-0.04514

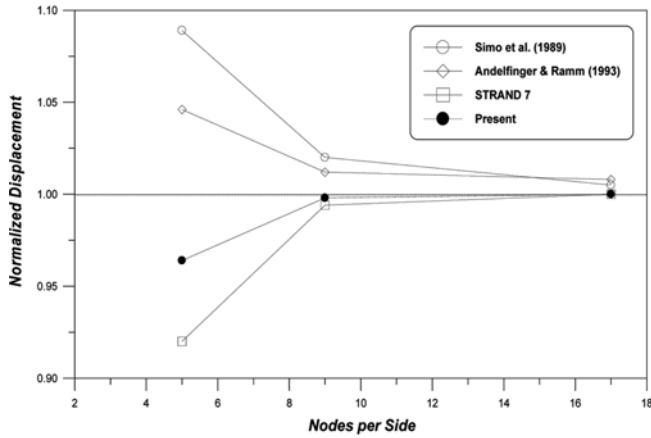


그림 15. 자유단 중심에서의 처짐

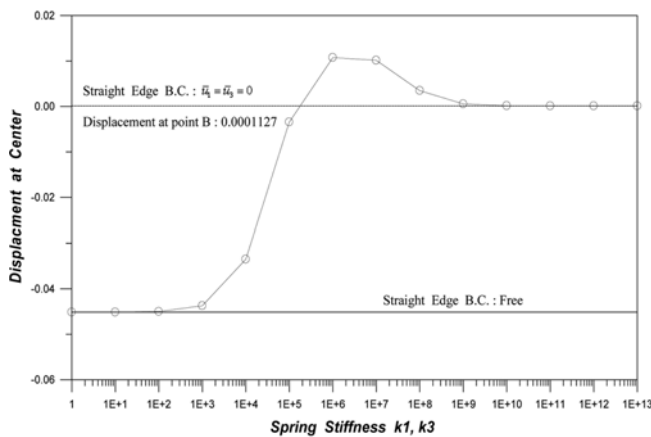


그림 16. 다양한 스프링 강성에 따른 하중 작용점의 처짐

직선 경계의 스프링 강성을 증가시키면서 B점의 처짐을 그림 16에 나타내었다. 본 예제에서는 직선 경계의 조건이 고정 ($\bar{u}_1, \bar{u}_3 = 0$) 되었을 때 보다 상향으로 더 큰 처짐을 가지게 되는 경우가 발생할 수 있다는 것을 알 수 있었다. 쉘의 기하학적 형상에 따라서 두 가지 이상적 경계 조건의 처짐 곡선의 범위를 벗어나는 처짐이 발생하는 경우도 있으므로 탄성 경계 지지를 고려한 엄밀 해석이 필요함을 알 수 있었다.

9.6 탄성 경계 지지되고 2변 단순 지지된 등방성 원통형 쉘

중심에 집중 하중을 받는 원통형 쉘을 해석하였다. 원통형 쉘은 축 방향으로 경계부에 단순지지 되어있고, 곡선 방향 단부는 자유단이다. 쉘의 형상 특성은 그림 17에 표현되어 있으며, 해석을 위하여 문제의 1/4부분만 3×3 메쉬로 분할하여 모델링 되었다. 원통형 쉘의 재료성질은 식(46)과 같다.

$$E = 3.103 \text{ kN/mm}^2, h = 6.35 \text{ mm}, \nu = 0.3, P = 1 \text{ kN} \quad (46)$$

탄성 경계 지지된 판의 경우와 마찬가지로 스프링 강성의 증가로 인해 하중 작용점의 처짐이 4변 단순 지지된 쉘의 경우로 점차 감소됨을 알 수 있었다.

9.7 단순지지된 등방성 쉘의 비선형 해석

9.6절의 단순지지된 쉘에 대한 두 가지 두께($h = 12.7 \text{ mm}$

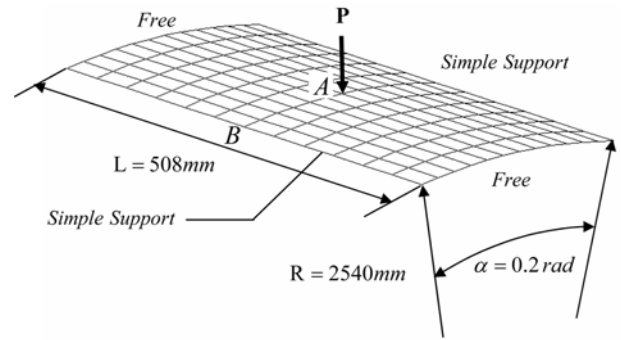


그림 17. 2변 단순 지지된 원통형 쉘

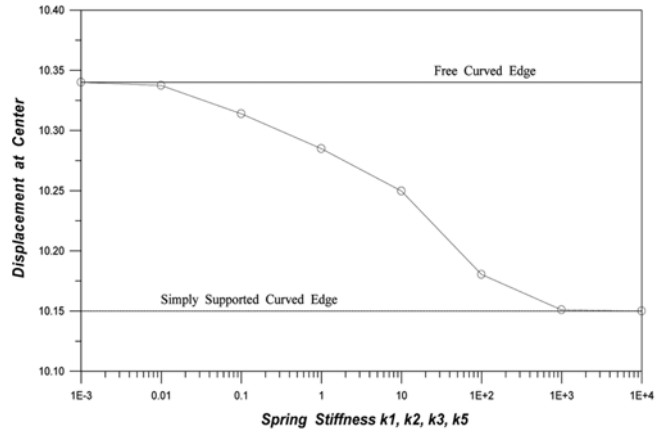


그림 18. 다양한 스프링 강성에 따른 하중 작용점의 처짐

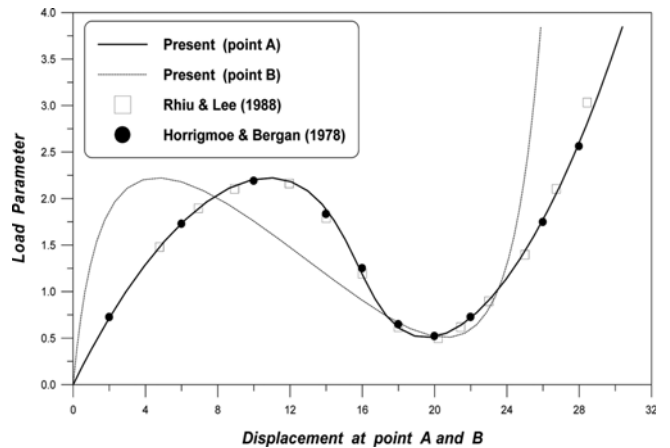


그림 19. A점과 B점의 하중-변위 관계 곡선 ($h = 12.7 \text{ mm}$)

그리고 $h = 6.35 \text{ mm}$)의 경우에 대하여 비선형 해석을 수행하였다. 두께가 $h = 12.7 \text{ mm}$ 인 경우 비선형 해석을 위한 평균 반복 횟수는 5번 이었다. 본 연구의 하중-변위 관계 곡선은 그림 19에서 Horrigmoe 등(1978) 그리고 Rhiu 등(1988)과 비교하였을 때 매우 잘 일치하였다. 직선경계 부분의 스프링 강성을 변화시켜가면서 쉘의 정상부분(A점)과 직선경계의 중앙부분(B점)의 처짐을 그림 20과 그림 21에 나타내었다. 직선경계 부분의 스프링 강성은 자유단과 단순지지 사이의 값을 가진다. 스프링 강성이 10에 도달하게 되면 쉘의 하중-변

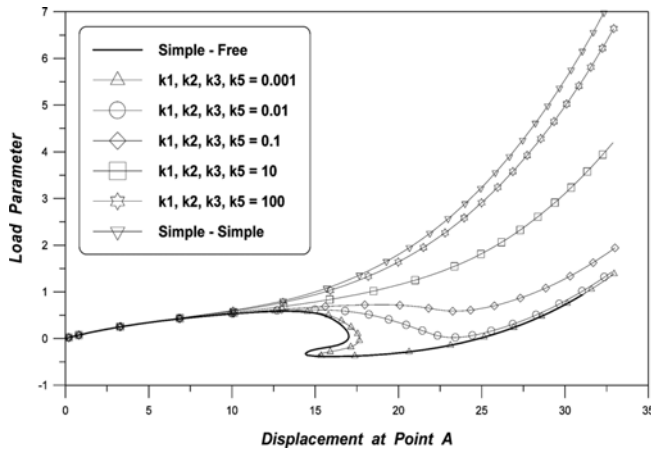


그림 20. 스프링 강성의 변화에 따른 A점의 하중-변위 관계 곡선 (h=12.7 mm)

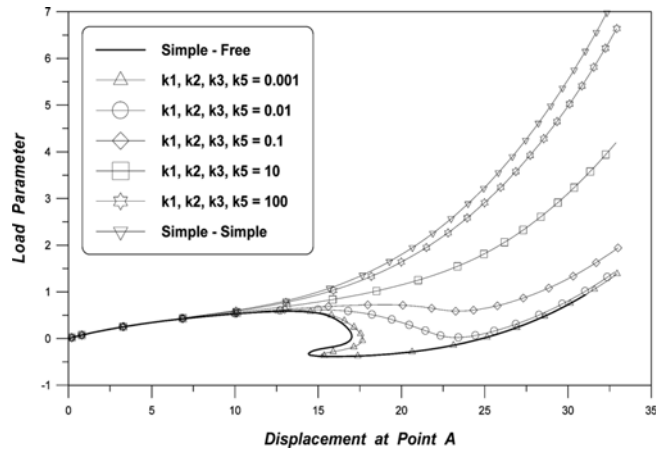


그림 23. 스프링 강성의 변화에 따른 A점의 하중-변위 관계 곡선 (h=6.35 mm)

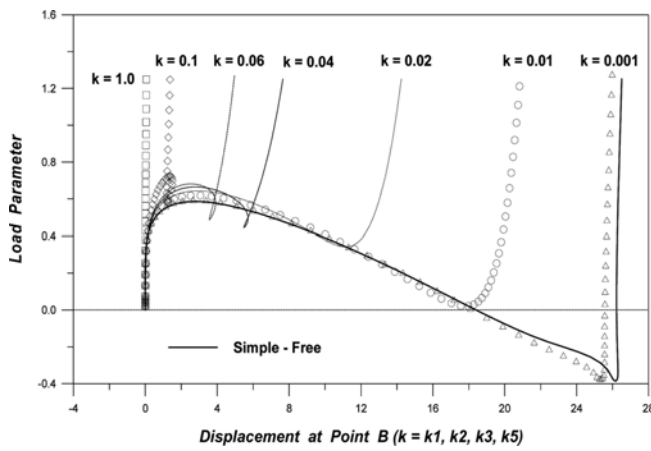


그림 21. 스프링 강성의 변화에 따른 B점의 하중-변위 관계 곡선 (h=12.7 mm)

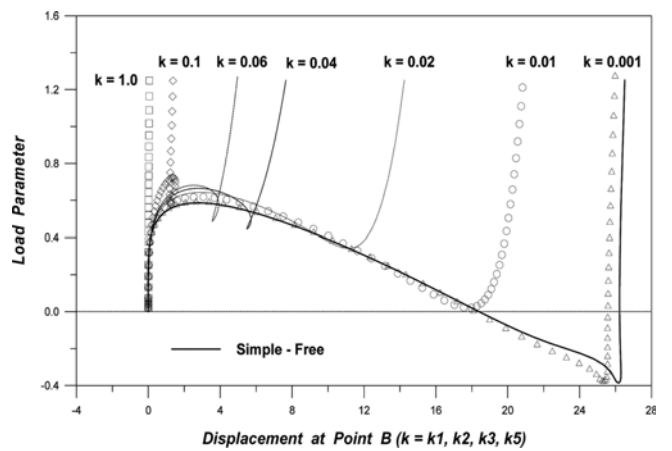


그림 24. 스프링 강성의 변화에 따른 B점의 하중-변위 관계 곡선 (h=6.35 mm)

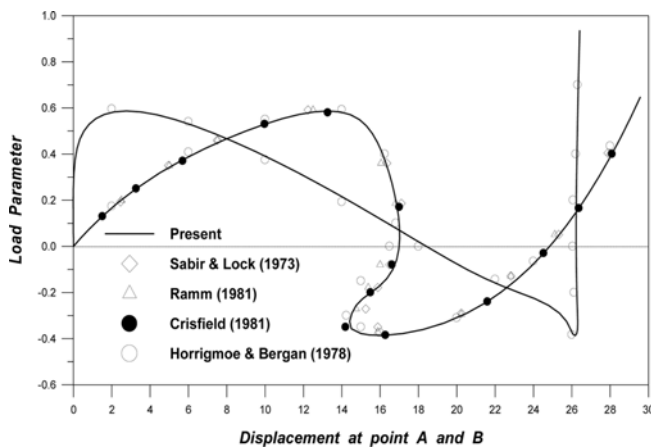


그림 22. A점과 B점의 하중-변위 관계 곡선 (h=6.35 mm)

위 관계 곡선에서 snap-through 현상이 사라지게 된다. 즉, 4변이 단순지지된 쉘의 경우에는 snap-through 현상이 없는 하중-변위 관계 곡선을 나타낸다.

두께가 h=6.35 mm인 쉘의 경우는 Crisfield(1981)에 의해 제시된 결과를 참고문헌으로 선택하여 비교하였다. 본 예제의

비선형 해석을 위한 평균 반복 횟수는 4번 이었다. 그림 22에서 Sabir 등(1973) 그리고 Ramm(1981) 등의 결과들과 비교하여 나타내었다. 본 연구의 결과가 Crisfield(1981)의 결과에 가장 근접함을 알 수 있었다. 그림 23의 하중-변위 관계 곡선(A점)으로부터 스프링 강성이 0.01이 되면 쉘의 snap-back 현상이 없어지고 스프링 강성이 10에 도달하게 되면 snap-through 현상도 사라지는 것을 알 수 있다. 특히 그림 24에서 스프링 강성이 0.01에서 0.1까지 변화하는 동안에 점 B의 하중-변위 관계 곡선은 복잡한 거동을 나타내었다. 이러한 결과는 향후 연구자들의 비교 분석을 위한 자료로 활용될 수 있을 것이다.

10. 결 론

본 연구에서 임의 탄성 경계 지지되고 여러 형태의 하중을 받는 판과 쉘의 선형 및 비선형 휨 거동을 연구하였다. 임의의 경계는 6개의 자유도를 가지도록 스프링 요소로 모델링 되었고, 주로 탄성 경계 지지인 임의의 단부 지지가 논의되었다. 이 논문에 사용된 방법으로는 가정변형을 9절점 쉘 요

소와 임의의 탄성 경계 지지를 위한 스포링 요소가 사용되었으며, 이로 인하여 이상적인 경계조건 사이에 존재하는 임의의 경계에 대한 정확한 선형 및 비선형 해석 결과를 얻을 수 있다. 해석 결과는 본 연구에서 제시된 방법이 임의의 탄성 경계 지지를 갖는 판과 셸의 휨 거동 해석에 폭넓게 사용될 수 있음을 보여주고 있다. 셸의 기하학적 형상에 따라서 두 가지 이상적 경계 조건의 처짐 곡선의 범위를 벗어나는 처짐이 발생하는 경우도 있으므로 탄성 경계 지지를 고려한 엄밀 해석이 필요함을 알 수 있었다. 해석 결과로 얻어진 변위 값들로 제안된 방법이 여러 가지의 탄성 경계 지지를 모의 실험할 경우에 비교 자료로 사용될 수 있을 것으로 판단된다. 또한, 본 연구의 결과들은 건설 현장에서 복합적으로 탄성 경계 지지된 구조물의 휨 특성 예측에 매우 유용할 수 있다.

감사의 글

본 연구는 2007년도 진주산업대학교 기성회 연구비 지원에 의하여 수행되었으며, 이에 감사 드립니다.

참고문헌

- 한성천, 최삼열 (2004) 변형률 보간 9절점 셸 요소를 이용한 적층복합판 과 셸의 선형 정적 해석 및 자유진동 해석, **한국전산구조공학회논문집**, 제17권, 제4호, pp. 279-293.
- Ahmad, S., Irons, B. M. and Zienkiewicz, O. C. (1970) Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements. *Int J Num Meth Eng.*, Vol. 2, pp. 419-451.
- Andelfinger, U. and Ramm, E. (1993) EAS-elements for two-dimensional, three-dimensional, plate and shell structures and their equivalence to HR-elements. *Int J Num Meth Eng.*, Vol. 36, pp. 1311-1337.
- Bathe, K. J. and Dvorkin, E. N. (1986) A formulation of general shell elements-the use of mixed interpolation of tensorial components. *Int J Num Meth Eng.*, Vol. 22, pp. 697-722.
- Crisfield, M. A. (1981) A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through. *Comput Struct.* Vol. 13, pp. 55-62.
- Gorman, D. J. (2000) Free vibration and buckling of in-plane loaded plates with rotational elastic edge support. *J Sound Vib.*, Vol. 229(4), pp. 755-773.
- Groesberg, S. W. (1963) *Advanced Mechanics*, Wiley, New York.
- Han, S. C., Choi, S. and Park, W. T. (2007) The Effect of Varying the In-plane Loads and Stacking Sequence on the Vibration Analysis of Composite Stiffened Plates, *Sci Eng Compos Mater.*, Vol. 14(4), pp. 271-298.
- Han, S. C., Kim, K. D. and Kanok-Nukulchai, W. (2004) An element-based 9-node resultant shell element for large deformation analysis of laminated composite plates and shells. *Struct Eng Mech.*, Vol. 18(6), pp. 807-829.
- Horrigmoer, G. and Bergan, P. G. (1978) Nonlinear analysis of free form shells by flat finite elements. *Comp Meth Appl Mech Eng.* Vol. 16, pp. 11-35.
- Huang, H. C. and Hinton, E. (1986) A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation. *Int J Num Meth Eng.*, Vol. 22, pp. 73-92.
- Huang, M. H. and Thambiratnam, D. P. (2001) Analysis of plate resting on elastic supports and elastic foundation by finite strip method. *Comput Struct.*, Vol. 79, pp. 2547-2557.
- Kanok-Nukulchai, W. (1979) A simple and efficient finite element for general shell analysis. *Int J Num Meth Eng.*, Vol. 14, pp. 179-200.
- Kebari, H. and Cassel, A. C. (1992) A Stabilized 9-node Non-linear Shell Element. *Int J Num Meth Eng.*, Vol. 35, pp. 37-61.
- Kim, K. D., Lee, C. S. and Han, S. C. (2007) A 4-node Co-rotational ANS Shell Element for Laminated Composite Structures, *Compos Struct.*, Vol. 80(2), pp. 234-252.
- MacNeal, R. H. and Harder, R. L. (1985) A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 1, pp. 3-20.
- Ma, H. and Kanok-Nukulchai, W. (1989) *On the application of assumed strained methods*, *Structural Engineering and Construction, Achievements, Trends and Challenges*. Kanok-Nukulchai et al. (eds.), AIT; Bangkok.
- Ni, Q. Q., Xie, J. and Iwamoto, M. (2005) Buckling analysis of laminated composite plates with arbitrary edge supports. *Compos Struct.*, Vol. 69, pp. 209-217.
- Ramm, E. (1981) *Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit, Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis*. Bathe KJ, Oden JT, Wunderlich W (eds), Springer-Verlag: Berlin.
- Rhiu, J. J. and Lee, S. W. (1988) A nine-node finite element for analysis of geometrically non-linear shells. *Int J Num Meth Eng.* Vol. 24, pp. 581-604.
- Sabir, A. B. and Lock, A. C. (1973) *The application of finite elements to the large deflection geometrically non-linear behaviour of cylindrical shells*, *Variational Methods in Engineering*. Brebia CA, Tottenham H (eds), Southampton Univ. Press, Vol. 7, pp. 66-75.
- Simo, J. C., Fox, D. D. and Rifai, M. S. (1989) On stress resultant geometrically exact shell model. Part II: the linear theory; computational aspects. *Comp Meth Appl Mech Eng.*, Vol. 73, pp. 53-92.
- STRAND 7 (2005) *Using STRAND7 manual*, Available from <www.strand7.com>.
- Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S. (1959) *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill.
- Yoo, S. W. and Choi, C. K. (2000) Geometrically nonlinear analysis of laminated composites by an improved degenerated shell element, *Struct Eng Mech.*, Vol. 9(1), pp. 99-110.
- Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. (1989) *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, London.
- Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. (2000) *The Finite Element Method*, Butterworth-Heinemann, London.

- ◎ 논문접수일: 2007년 12월 26일
- ◎ 심사의뢰일: 2007년 12월 26일
- ◎ 심사완료일: 2008년 04월 14일