

# 변형에너지를 고려한 파형 플렉시블조인트 곡선부의 등가보 해석기법 및 실험적 검증

김진곤<sup>#</sup>

## Equivalent Beam Modeling Technique and Experimental Verification of Corrugated Flexible Joint Bend Considering Strain Energy

Jin Gon Kim<sup>#</sup>

### ABSTRACT

Corrugated flexible joint with bellows shape is widely used in many industrial fields as it provides a relatively simple means of absorbing mechanical vibration and deformation due to its inherent flexibility. In this study, an effective equivalent beam modeling technique of corrugated flexible joint bend using a commercial CAE software is proposed to reduce the excessive efforts and costs required for three dimensional shell modelling in vibration analysis of bellows shape structure. When this simple and practical technique, based on the strain energy concept, is employed to modify the beam sectional properties of the flexible joint bend, quite satisfactory results can be obtained.

**Key Words** : Corrugated flexible joint (파형 플렉시블조인트), Bellows (벨로우즈), Equivalent beam modeling (등가보 모델링), Strain energy (변형에너지), Flexibility (유연성), Vibration analysis (진동해석)

### 1. 서론

벨로우즈 형상 플렉시블조인트(Flexible Joint) 구조는(Fig. 1 참조) 자체의 유연성으로 인하여 기계적 진동이나 변형들을 흡수하는 능력이 뛰어나 발전소, 플랜트 등의 배관시스템 뿐만 아니라 수송 기계용 배기시스템과 와이어링 하네스(wiring harness) 등 다양한 산업분야에서 사용되고 있다. 특히, 엔진출력의 증가와 차량의 전륜구동화 추세에 따라 승용차 엔진에서 배기계의 진동전달을 최소화하기 위해 배기계 벨로우즈의 진동해석과 관련된 많은 연구들이<sup>1-10</sup> 이루어졌으며, 그 외에

도 벨로우즈 구조를 이용하여 인라인 스케이트 브레이크 시스템을 구현한 연구도<sup>11</sup> 수행되었다. 자동차의 와이어링 하네스 시스템에도 Fig. 2와 같은 파형 신축 케이블(corrugated flexible cable)이 사용되고 있으며, 차량 성능 및 내구성 증대를 위해 이러한 와이어링 하네스 시스템의 피로 및 동적특성의 분석 필요성 또한 갈수록 증대되고 있다.<sup>12</sup>

배기계 및 기계용 시스템 등에서 진동 소음, 변형량 저감 등을 통하여 구조물의 변형 및 파손을 방지하기 위해 벨로우즈 형태의 플렉시블조인트가 사용되고 있지만, 진동특성을 고려하지 않고

접수일: 2008년 1월 18일; 게재승인일: 2008년 4월 25일  
교신저자: 대구가톨릭대학교 기계자동차공학부  
Email: kimjg1@cu.ac.kr Tel. (053) 850-2711

사용하게 되면 플렉시블조인트 자체가 공진 등에 의해서 단시간에 파손되거나 연결된 다른 기계 시스템에도 부적절한 영향을 미칠 수 있다.

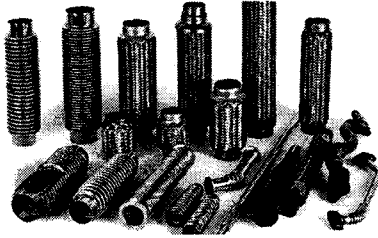


Fig. 1 Various automotive bellows shape flexible joint assemblies



Fig. 2 Corrugated flexible cable of automotive wiring harness

그러므로, 형상, 지지 조건, 굴곡부의 곡률 효과 등 여러 요인들에 따라 달라지는 플렉시블조인트 벨로우즈의 동적특성을 정확하게 파악할 필요가 있다. 하지만, 해석을 통하여 벨로우즈의 동적특성을 정확하게 예측하기 위해서는 3 차원 셸 요소(shell element)를 사용한 유한요소해석을 수행하여야 하는데, 이를 위해서는 벨로우즈의 모델링 및 해석에 상당한 노력과 시간이 요구된다. 하지만 대부분의 연구들이 직선형 벨로우즈에서 등가보로 모델링 하는 방법들에만 국한되어 왔으며,<sup>3,10</sup> 굴곡부를 고려한 진동특성해석이나 등가보 모델링 연구들은 파이프 형상 구조물에 대해서만 이루어졌다.<sup>13,14</sup> 실제로 곡선형 파이프를 셸로 모델링한 유한요소 진동해석 결과와 보로 모델링한 유한요소 진동해석 결과를 비교해 보면 고유진동수에서 상당히 차이가 남을 알 수 있다.<sup>15</sup>

본 연구에서는, Kim 등이<sup>13</sup> 파이프 굴곡부에 적용한 변형에너지(strain energy) 개념을 이용하여 곡선형 플렉시블조인트의 진동해석에 실용적으로 활용할 수 있는 등가보 해석기법을 제안하였다. 플렉시블조인트가 Fig. 1 과 2 의 배기계 플렉시블조

인트와 와이어링 하네스 케이블과 같이 직선부와 곡선부로 이루어져 있는 경우, 곡선부를 직선부와 동일하게 보로 모델링하면 실제보다 훨씬 낮은 유연성을 갖게 된다. 이를 보완하기 위해서, 굴곡부의 곡률에 의한 유연성을 적절히 고려한 실용적인 등가보(equivalent beam) 해석기법을 제안하였다. 모든 수치해석은 상용 유한요소해석프로그램인 ANSYS<sup>14</sup> 를 사용하였다. 제안된 등가보 해석결과의 타당성을 검증하기 위하여, 폐속조형기를 이용하여 벨로우즈 형상의 시험모델을 제작하여 진동 실험을 수행하여 그 결과를 비교하였다. 비교결과 제안된 등가보 해석기법의 신뢰성과 효율성을 확인할 수 있었다.

## 2. 벨로우즈 직선부 등가보 모델링

벨로우즈는 사용 용도에 따라 산 모양이 C 형, U 형, S 형 등의 다양한 기하학적 구조를 갖지만, 본 연구에서는 모델링과 해석의 용이성을 위해 일단 Fig. 3 과 같이 사각형 산 모양을 가지는 벨로우즈를 고려하였다.

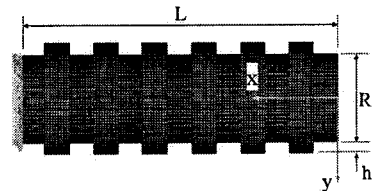


Fig. 3 Shell element modelling of straight bellows

이러한 벨로우즈는 진동해석에서 셸 유한요소를 사용할 경우 모델링의 어려움 및 상당한 계산 시간을 필요로 한다. 따라서 해석의 용이성과 효율성을 위하여 다음과 같이 보로 등가화시킨다.

$$L_{beam} = L_{shell} \quad (1)$$

$$E_{beam} = E_{shell} \quad (2)$$

$$G_{beam} = G_{shell} \quad (3)$$

$$M_{beam} = M_{shell} \quad (4)$$

$$(K_{axial})_{beam} = (K_{axial})_{shell} \quad (5)$$

$$(K_{lateral})_{beam} = (K_{lateral})_{shell} \quad (6)$$

$$(K_{torsional})_{beam} = (K_{torsional})_{shell} \quad (7)$$

여기서  $L$  은 전체길이,  $E$  는 탄성계수,  $G$  는 전단계수,  $M$  은 전체 질량을, 그리고 식 (5)~(7)의  $K$  는 각각 등가보와 셸 유한요소모델의 축방향(axial), 횡방향(lateral), 비틀림방향(torsional) 강성들을 나타낸다.

식 (1), (2)와 같이 등가보의 전체길이를 탄성계수는 본 연구에서 선정한 벨로우즈의 전체길이 및 탄성계수와 같도록 한다. 그리고 이와 같은 벨로우즈의 축방향, 횡방향 그리고 비틀림방향의 강성은 식 (5)~(7)과 같이 등가보의 강성과 같도록 한다. 기하학적인 경계조건은 외팔보(cantilever beam)로 가정하였으며, 각 방향으로 단위하중을 가하여 등가보의 단면적  $A_{beam}$ , 단면의 관성모멘트(moment of inertia of the cross-section)  $I_{beam}$  및 극관성모멘트(polar moment of inertia)  $J_{beam}$  들을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$A_{beam} = \frac{L_{shell} (K_{axial})_{shell}}{E_{shell}} \quad (8)$$

$$I_{beam} = \frac{(L_{shell})^3 (K_{lateral})_{shell}}{3E_{shell}} \quad (9)$$

$$J_{beam} = \frac{L_{shell} (K_{torsional})_{shell}}{G_{shell}} \quad (10)$$

또한, 등가보와 직선형 벨로우즈의 진동문제에서 동특성을 같게 하기 위해서 반드시 고려되어야 할 등가보의 밀도  $\rho_{beam}$  는 다음과 같이 구해진다.

$$\rho_{beam} = \frac{M_{shell}}{A_{beam} L_{beam}} \quad (11)$$

이와 같은 직선 벨로우즈의 등가보 모델링 과정의 신뢰성을 검토하기 위하여 등가보와 3 차원 셸 유한요소를 이용하여 구한 고유진동수를 Table 1 에 비교하였다. 비교결과 직선 벨로우즈의 등가보 해석결과가 3 차원 셸요소를 이용하여 구한 해석결과와 상당히 잘 일치하였으며 이로부터 제시된 등가 과정의 신뢰성을 확인할 수 있었다. Fig. 4 는 등가보와 셸 요소를 이용하여 구한 진동모드형

상들도 매우 유사함을 보여주고 있다.

Table 1 Natural frequencies of straight bellows (unit: Hz)

Mode	1st	2nd	3rd
Shell modelling	13.934	65.808	142.817
Beam modelling	13.085	65.166	146.664

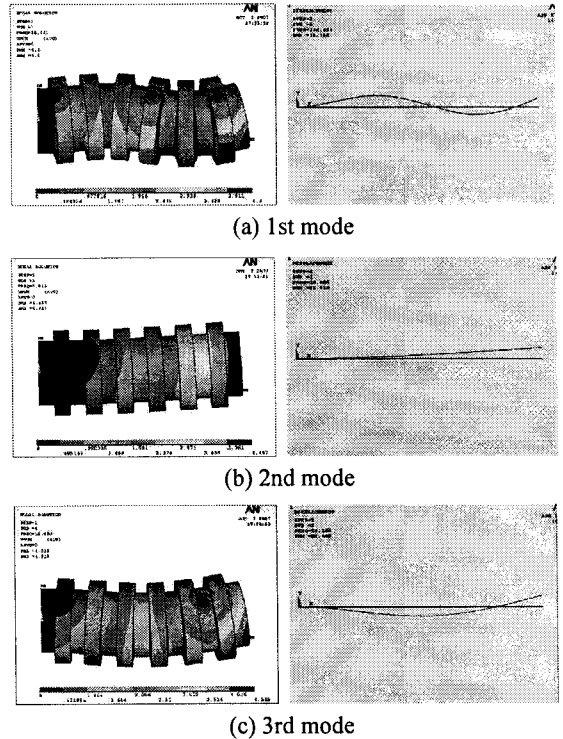


Fig. 4 Comparison of mode shapes obtained by shell element model and equivalent beam model

### 3. 벨로우즈 굴곡부 등가보 모델링

다음으로 Fig. 5 와 같이 굴곡부를 포함한 벨로우즈를 살펴보고자 한다. 그림과 같은 곡선형 벨로우즈를 셸요소를 이용하여 해석하면 상당히 정확한 결과를 얻을 수 있다. 하지만, 소프트웨어와 하드웨어의 발달에도 불구하고 곡선형 벨로우즈는 모델링 상의 어려움뿐만 아니라 전체 시스템을 고려한 진동해석을 할 경우 상당한 해석시간이 소요되는 등 초기설계에 셸요소를 이용한 상세해석을

적용하기에는 여러 가지 어려움들을 가진다. 따라서, 본 절에서는 초기설계에서 유용하게 적용할 수 있는 굴곡부의 곡률에 의한 유연성을 고려한 등가보 해석기법을 Fig. 5 와 같은 모델을 이용하여 살펴보고자 한다. 먼저,  $L_1$  과  $L_2$  의 직선부는 전 절에서 기술한 직선형 벨로우즈의 등가보 모델링 방법을 이용하여 관련 단면특성치와 물성치들을 구하여 해석에 이용한다.

다음으로 곡선부를 단순히 직선부로 가정하면 곡선부의 곡률에 의한 유연성을 고려하지 않아 매우 부정확한 결과를 얻게 되므로 곡선부의 굽힘강성과 비틀림강성같은 단면특성치를 적절히 수정해 주어야 한다. 이를 위해 본 논문에서는 정적하중에 의해 저장되는 변형에너지 개념을 이용하고자 한다. 즉, 상세 셀 모델링에 의해 Fig. 4 에 저장되는 변형에너지와, 통상의 보 모델링에 의해 Fig. 4 의 구조에 저장되는 변형에너지가 같도록 굴곡부의 강성값을 수정하고자 한다.

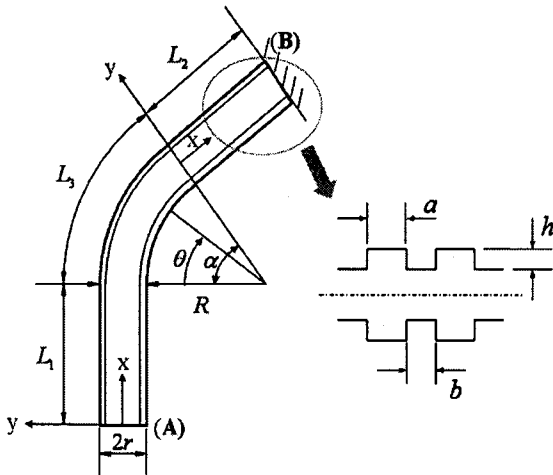


Fig. 5 Geometry of a curved bellows and local coordinates

이 과정을 수행하기 위해 먼저 Fig. 5 의 벨로우즈를 셀요소를 이용하여 상세 모델링한 후 끝단 B 를 고정하고, 자유단 A 의 중심에 3 방향의 정적 모멘트  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  를 가한다. 이에 대한 모델링은 자유단 A 의 중심에 한 점 P 를 생성하고, 이 점과 A 단면의 원주상에 있는 절점들에 강체구속 조건을 적용한 후 P 점에 하중을 작용시킨다.

점 P 에 가해지는 하중의 조합이 각각 ( $M_x = M_1, M_y = M_z = 0$ ), ( $M_y = M_2, M_x = M_z = 0$ ), ( $M_z = M_3, M_x = M_y = 0$ )인 3 경우에 대해 해석을 수행하였다. P 에 가해지는 모멘트가 ( $M_y = M_2, M_x = M_z = 0$ )인 경우 Fig. 6 으로부터 굴곡부의 비틀림모멘트  $M_x$  와 굽힘모멘트  $M_y$  를 구하면

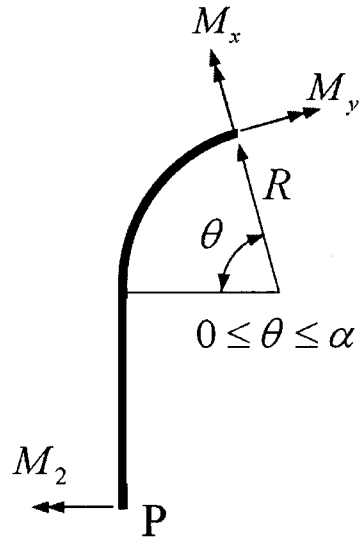


Fig. 6 Free-body diagram of the curved bellows subjected to the tip moment

$$M_y = M_2; M_x = 0 \quad (12)$$

그리고, 직선부  $L_2$  에서는 다음과 같이 표시된다.

$$M_y = M_2 \cos \alpha; M_x = M_2 \sin \alpha \quad (13)$$

유사하게 P 에 ( $M_x = M_1, M_y = M_z = 0$ )가 가해지는 경우에도 직선부와 곡선부에 작용하는 모멘트 성분들을 구해낼 수 있다. 이로부터 등가보의 굴곡부  $L_3$  의 강성값을  $(EI_y)^*$ ,  $(EI_z)^*$ ,  $(GJ)^*$  로 표시하면, 상세 셀 유한요소해석에 의한 총 변형에너지와 보 이론에 의한 총 변형에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}M_1\phi_1 &= \int_0^{L_1} \frac{M_1^2}{2GJ} dx \\ &+ \int_0^{\alpha} \frac{1}{2} \left( \frac{M_1^2 \sin^2 \theta}{(EI_z)^*} + \frac{M_1^2 \cos^2 \theta}{(GJ)^*} \right) Rd\theta \quad (14) \\ &+ \int_0^{L_2} \frac{1}{2} \left( \frac{M_1^2 \sin^2 \alpha}{EI_y} + \frac{M_1^2 \cos^2 \alpha}{GJ} \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}M_2\phi_2 &= \int_0^{L_1} \frac{M_2^2}{2EI_y} dx \\ &+ \int_0^{\alpha} \frac{1}{2} \left( \frac{M_2^2 \cos^2 \theta}{(EI_z)^*} + \frac{M_2^2 \sin^2 \theta}{(GJ)^*} \right) Rd\theta \quad (15) \\ &+ \int_0^{L_2} \frac{1}{2} \left( \frac{M_2^2 \cos^2 \alpha}{EI_y} + \frac{M_2^2 \sin^2 \alpha}{GJ} \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}M_3\phi_3 &= \int_0^{L_1} \frac{M_z^2}{2EI_z} dx + \\ &+ \int_0^{\alpha} \frac{M_z^2}{2(EI_z)^*} Rd\theta + \int_0^{L_2} \frac{M_z^2}{2EI_z} dx \quad (16) \end{aligned}$$

여기서  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  는 자유단 A 의 P 점에서 3 방향의 회전각을 나타내고, 식(14)~(16)으로부터 다음과 같은 식들을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\phi_1}{M_1} \right]_{at A} &= \frac{L_1 + L_2 \cos^2 \alpha}{GJ} + \frac{L_2 \sin^2 \alpha}{EI_y} \\ &+ \frac{R}{(EI_y)^*} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) + \frac{R}{(GJ)^*} \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\phi_2}{M_2} \right]_{at A} &= \frac{L_1 + L_2 \cos^2 \alpha}{EI_y} + \frac{L_2 \sin^2 \alpha}{GJ} \\ &+ \frac{R}{(EI_y)^*} \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) + \frac{R}{(GJ)^*} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) \quad (18) \end{aligned}$$

$$\left[ \frac{\phi_3}{M_3} \right]_{at A} = \left[ \frac{L_1 + L_2}{EI_z} + \frac{R\alpha}{(EI_z)^*} \right] \quad (19)$$

식 (17)~(19)를 연립하여 풀면, 최종적으로 곡선부의 수정된 강성값  $(EI_y)^*, (EI_z)^*, (GJ)^*$  들을 구할 수 있다. 이러한 방법은 정적해석을 통해, 굴곡

부의 강성을 수정하였기 때문에 비교적 낮은 고유진동수 영역에 적용하는 것이 바람직할 것이다. 만약 곡선부가 있는 벨로우즈를 셀 요소에 의한 동적 유한요소해석결과와 보 요소에 의한 동적 유한요소해석결과를 활용한다면 높은 주파수 영역에서도 좀 더 정확한 결과를 얻을 수 있을 것으로 판단된다. 그러나 이 해석자재가 상당한 시간과 노력을 요구하므로, 본 연구에서는 중요한 역학적 특성만을 고려한 실용적인 해석기법을 제시하고자 하였다.

#### 4. 실험적 검증

본 절에서는, 제시된 벨로우즈 형상 플렉시블 조인트 곡선부 등가보 해석기법의 타당성을 검증하기 위해서 쾌속조형기(Rapid Prototyping Machine) SLA5000 을 이용하여 Fig. 7 과 같은 시험용 모델을 제작하여 진동실험(modal test)을 수행하였다. 실험에 사용된 벨로우즈의 재료는 WaterShed11120 이며, 재료물성치는 탄성계수  $E = 2.7 \text{ GPa}$ , 밀도  $\rho = 1147 \text{ kg/m}^3$  이다. 실험용 모델의 기하학적인 치수는 양 끝단의 직선부 길이  $L_1 = L_2 = 170 \text{ mm}$ , 곡선부의 곡률반경  $R = 135 \text{ mm}$ , 곡선부 각도  $\alpha = 90^\circ$ , 벨로우즈 반경  $r = 25 \text{ mm}$ , 산과 골의 길이비  $a/b = 1.11$ , 산의 높이  $h = 7 \text{ mm}$ , 그리고 벨로우즈의 두께  $t = 2 \text{ mm}$  이다. 진동실험에는 B&K 사의 Pulse3560c, type8202 임팩트 해머(impact hammer) 그리고 type4508 가속도계를 사용하였다. 벨로우즈 산에 표시된 15 군데의 측정점에 가속도계를 부착한 후 임팩트 해머로 측정점마다 4 회 반복하여 측정된 결과들의 평균값을 구하였다.



Fig. 7 Rapid prototyping model and modal test configuration

Fig. 8 은 자유경계조건에서 모달해석을 수행하여 구한 주파수응답함수이며, Table 2 에서 실험용

벨로우즈 모델의 고유진동수에 대한 실험 및 해석 결과들을 비교하였다. (괄호 안은 실험에 대한 상대적인 오차를 나타낸다) 실험결과와 비교하면 본 연구에서 제안한 등가보 해석결과가 3 차 진동모드까지 약 5% 내외의 만족할만한 수준의 오차를 나타냄을 알 수 있다. 하지만, 곡선부의 유연성을 고려하지 않고 단순히 직선보로 모델링하면 직선부 변형보다 곡선부의 변형에 의한 영향이 상대적으로 큰 1 차 진동모드에서 매우 큰 오차가 발생함을 알 수 있다. 이로부터, 본 논문에서 제시된 등가보 해석기법이 저차모드에서 상대적으로 큰 효과가 있음을 알 수 있다.

Fig. 9~10 은 각각 실험, 셸 유한요소해석 그리고 곡선부 유연성을 고려한 등가보 해석으로부터 구한 진동모드들을 보여주고 있다. 그림으로부터, 제안된 등가보 해석 기법으로부터 구한 구조물의 1 차부터 3 차 진동모드 형상들이 실험 및 셸 유한요소해석 결과들과 매우 유사함을 확인할 수 있다.

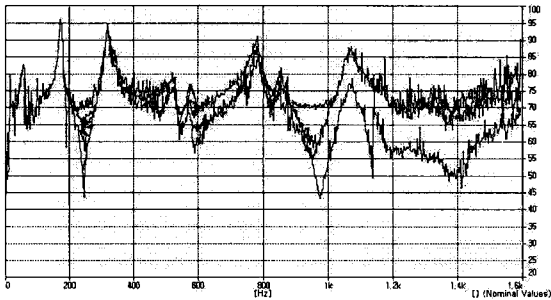
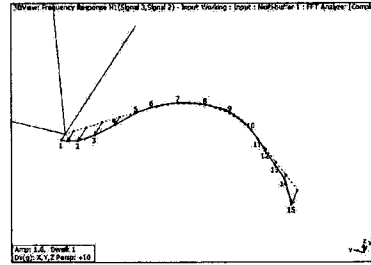


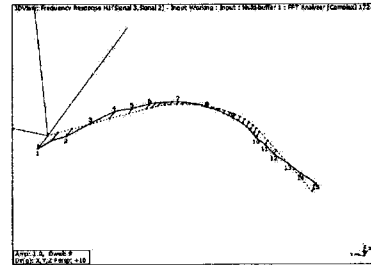
Fig. 8 FRF curve obtained from modal test

Table 2 Natural frequencies of the curved bellows shown in Fig. 7 obtained from modal test and finite element analysis (unit: Hz)

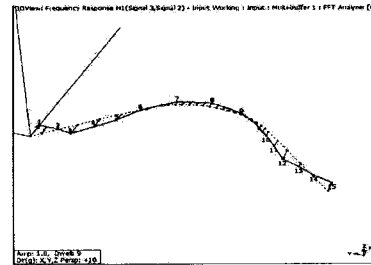
Mode	1st	2nd	3rd
Experiment	57.9	171.8	319.5
Shell modelling	55.9 (3.4%)	169.1 (1.6%)	315.7 (1.2%)
Beam modelling (After modification)	53.3 (7.9%)	163.1 (5.1%)	305.2 (4.5%)
Beam modelling (Before modification)	84.4 (46%)	205.7 (20%)	373.8 (17%)



(a) 1st mode

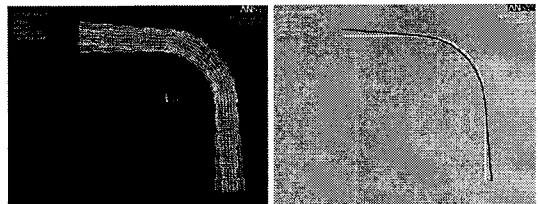


(b) 2nd mode

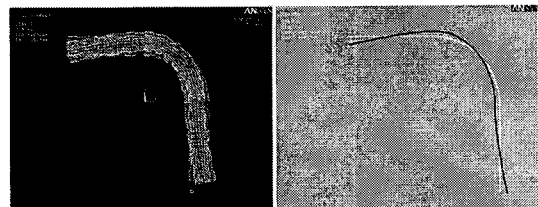


(c) 3rd mode

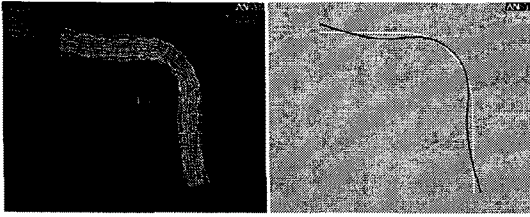
Fig. 9 Mode shapes obtained by modal testing



(a) 1st mode



(b) 2nd mode



(c) 3rd mode

Fig. 10 Mode shapes obtained by shell and equivalent beam modelling

### 5. 결론

본 연구에서는 파형 플렉시블조인트 구조물의 진동해석에 활용할 수 있는, 곡선형 벨로우즈에 대한 등가모 모델링기법을 제안하였다. 곡선부를 일반적인 직선부로 해석할 때는 곡률에 의한 유연성을 고려하지 않아 고유진동수가 상당히 높게 평가된다. 따라서 이러한 곡선부의 곡률효과를 고려하여 강성을 적절히 수정해 주어야 한다. 본 연구에서는 정적 변형에너지 개념을 이용하여 실용성이 높은 벨로우즈 곡선부의 등가모 모델링 기법을 제시하였다. 제시된 기법의 타당성을 검증하기 위하여 폐속조형기를 이용하여 실험모델을 실제 제작하여 진동실험을 수행하여 그 결과를 비교하였다. 비교결과 제안된 등가모 해석기법을 적용하는 경우 저차모드에서 큰 개선 효과를 보임을 확인할 수 있었다.

### 참고문헌

1. Lee, W. I., Oh, J. E. and Kim, T. W., "A study on the dynamics characteristics of bellows," Transactions of KSME, Vol. 12, No. 6, pp. 1273-1281, 1988.
2. Lim, J. M., Kim, M. S. and Lee, K. Y., "Vibration analysis of an exhaust system with bellows using the component mode synthesis," Transactions of KSME, Vol. 17, No. 7, pp. 1833-1840, 1993.
3. Ko, B. G., Lee, W. I. and Park, G. J., "Improvement of the vibrational characteristics according to attachment of bellows and evaluation of bellows optimal position in automobile exhaust system," Journal of KSAE, Vol. 2, No. 3, pp. 21-32, 1994.
4. Ko, B. K. and Park, G. J., "Development of finite element analysis program and simplified formulas of

- bellows and shape optimization," Transactions of KSME, Vol. 21, No. 8, pp. 1195-1208, 1997.
5. Kim, K. H., Han, G. H. and Kim, H. K., "Vibration characteristics of steering columns with bellows," IMechE Part D: J. Automobile Engineering, Vol. 215, No. 2, pp. 171-178, 2001.
6. Lu, C. L., Wu, T. X., Yu, J. G. and Ye, Q. T., "On torsional stiffness and natural frequency of bellows," IMechE Part D: J. Automobile Engineering, Vol. 218, No. 3, pp. 263-271, 2004.
7. Englund, T. L., Wall, J. E., Ahlin, K. A. and Broman, G. I., "Dynamic characteristics of a combined bellows and liner flexible joint," IMechE Part D: J. Automobile Engineering, Vol. 218, No. 5, pp. 485-493, 2004.
8. Radhakrishna, M. and Rao, C. K., "Axial vibrations of U-shaped bellows with elastically restrained end conditions," Thin-Walled Structures, Vol. 42, Issue 3, pp. 415-426, 2004.
9. Jakubauskas, V. F. and Weaver, D. S., "Transverse vibrations of bellows expansion joints. part II: beam model development and experimental verification," Journal of Fluids and Structures, Vol. 12, Issue 4, pp. 457-473, 1998.
10. Chung, T. J., Kim, B. G., Cho, W. Y. and Yu, J. G., "The study on the equivalent modeling of multi-ply bellows," Fall Conferences of KSPE, pp. 981-985, 2004.
11. Rhee, E. J., Park, M. K. and Joo, D. W., "A development of brake system for inline skate using bellows," J. of KSPE, Vol. 16, No. 3, pp. 30-37, 1999.
12. Inoue, T., Kawakita, Y. H., Kohtake, Y., Furusyo, M., Ohuchi, K. and Kaji, M., "The development of a method to estimate the bending reliability of wiring harness," SAE 2000 World Congress, 2000-01-0457, pp. 1-5, 2000.
13. Kim, Y. Y., Lee, C. M., Kim, Y. H. and Kim, J. H., "The bend modelling technique in the vibration analysis of the exhaust system," Transactions of KSME, Vol. 19, No. 2, pp. 597-610, 1995.
14. Redekop, D., "Vibration analysis of a torus-cylinder shell assembly," Journal of Sound and Vibration, Vol. 277, Issues 4-5, pp. 919-930, 2004.
15. Natarajan, R. and Blomfield, J. A., "Stress analysis

- of curved pipes with end restraints,” Computers and Structures, Vol. 5, Issues 2-3, pp. 187-196, 1975.
16. ANSYS Analysis Guide, Release 8.0, ANSYS Inc. 2002.